МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

**В.В. Бардушкин, И.Б. Кожухов,
А.А. Прокофьев, Т.П. Фадеичева**

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ ЧИСЕЛ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Факультативный курс

*Рекомендовано региональным советом МГИЭТ(ТУ)
по довузовской подготовке*

Москва 2003

УДК 511.8

Рецензенты:
- *доктор физико-математических наук, профессор Яковлев В.Б.;*
- *учитель математики школы № 853 (г. Зеленоград), заслуженный учитель России Утина Н.И..*

Бардушкин В.В., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П.
Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс. – М.: МГИЭТ(ТУ), 2003. – 224 с.

Рассмотрены вопросы делимости на множестве целых чисел и методы решения в целых числах некоторых типов уравнений. Все задачи разбиты по темам, многие из них снабжены указаниями и решениями.

Для преподавателей математики и учащихся старших классов лицеев, гимназий и общеобразовательных школ, а также для лиц, занимающихся математикой самостоятельно.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел;

$\boldsymbol{N}_0$ – число 0 и множество натуральных чисел;

$\boldsymbol{Q}$ – множество рациональных чисел;

$НОД(a, b)$ – наибольший общий делитель целых чисел a и b;

$НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – наибольший общий делитель целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$НОК(a, b)$ – наименьшее общее кратное целых чисел a и b;

$НОК(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – наименьшее общее кратное целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

C_n^k – число сочетаний из n элементов по k;

$b \mid a$ – целое число b делит целое число a;

$b \nmid a$ – целое число b не делит целое число a;

$a \,\vdots\, b$ – целое число a делится на целое число b;

$a \not\vdots\, b$ – целое число a не делится на целое число b;

$[x]$ – целая часть числа x (т.е. ближайшее к x и не превосходящее его целое число);

$a \equiv b \pmod{m}$ – целое число a сравнимо с целым числом b по модулю натурального числа m.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемый читатель!

Вашему вниманию предлагается факультативный курс, затрагивающий традиционно сложные вопросы школьной математики. Практика преподавания данной тематики показывает, что многие задачи, связанные с делимостью целых чисел, нестандартны, поэтому их решение вызывает большие затруднения.

Факультативный курс написан на основе многолетнего опыта преподавания авторами этого раздела математики в лицее № 1557, гимназии № 1528, школах №№ 853 и 1151 города Зеленограда. В нем рассмотрены вопросы делимости на множестве целых чисел и методы решения в целых числах некоторых типов диофантовых уравнений. Пособие адресовано в первую очередь преподавателям математики и учащимся лицеев, гимназий и общеобразовательных школ. Но авторы надеются, что оно заинтересует и лиц, занимающихся математикой самостоятельно.

Материал, содержащийся в пособии, традиционно изучается в десятых или одиннадцатых классах школ с программой углубленного курса математики. Однако авторы могли бы рекомендовать учителям этот материал для внеклассной и кружковой работы в общеобразовательных школах с нагрузкой по математике не более пяти часов в неделю. Кроме того, многие задачи можно использовать при составлении текстов математических олимпиад.

При написании факультативного курса авторы прекрасно осознавали трудности, которые возникают перед учителем при подготовке к занятиям по данной тематике и при разъяснении материала школьникам. Поэтому составители не ограничились только теоретическими сведениями и условиями задач с ответами. Все задачи разбиты по темам, многие снабжены решениями и указаниями.

Пособие состоит из девяти параграфов и четырех приложений.

Доказательства многих утверждений основаны на методе математической индукции. Поэтому авторы рекомендуют читателям заранее ознакомиться с этим методом.

В приложении 2 приведены примерные варианты контрольных работ. Эти (или подобные этим) работы проводились авторами при изучении данной темы.

В приложении 3 собраны задачи на целые числа, предлагавшиеся в разные годы на письменных и устных вступительных экзаменах в различные вузы России.

В конце пособия приведена программа данного факультативного курса с примерным указанием часов, отводимых на изучение той или иной темы.

Необходимо сказать несколько слов об условных значках, встречающихся в тексте пособия:

– значок ⇨ указывает на то, что в теореме доказывается необходимое условие;
– значок ⇦ указывает на то, что в теореме доказывается достаточное условие;
– значок ■ указывает на завершение доказательства какого-либо утверждения (леммы, теоремы и т.п.);
– значок * , стоящий после номера упражнения, указывает на то, что для этой задачи имеется либо решение, либо указание, либо ответ в соответствующем разделе в конце пособия.

Авторы приносят искреннюю благодарность рецензентам – профессору МГИЭТ (ТУ) Виктору Борисовичу Яковлеву и заслуженному учителю России Утиной Нэлли Ивановне (школа №853 г. Зеленограда) за ценные советы и замечания, способствовавшие значительному улучшению курса.

В.В. Бардушкин, к.ф.–м.н, доцент, Соросовский учитель

И.Б. Кожухов, д.ф.–м.н, профессор, Соросовский учитель

А.А. Прокофьев, к.ф.–м.н, доцент, Соросовский учитель

Т.П. Фадеичева, учитель математики школы №853 г. Зеленограда, Соросовский учитель

§ 1. Делимость целых чисел

Рассмотрим множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$. Операция деления выполняется не для всех пар чисел из $\boldsymbol{Z}$.

Определение. Число $a \in \boldsymbol{Z}$ делится на число $b \in \boldsymbol{Z}$ $(b \neq 0)$, если существует такое число $q \in \boldsymbol{Z}$, что $a = bq$ (запись: $a \vdots b$).

Замечание. Вместо выражения «a делится на b» очень часто используется фраза «число b делит число a» и при этом применяется запись $b|a$.

Если a делится на b, то b называется *делителем* a, само a называется *кратным* числа b. Число q называется *частным* от деления a на b.

Число 0 делится на любое $b \neq 0$. Если $a \neq 0$, то, очевидно, что множество всех делителей a конечно.

Докажем простейшие ***свойства делимости*** целых чисел.

Лемма 1. Если $c|b$ и $b|a$, то $c|a$.

Доказательство. Так как $c|b$ и $b|a$, то $b = q_1c$, $a = q_2b$ при некоторых $q_1, q_2 \in \boldsymbol{Z}$. Отсюда $a = q_2q_1c = qc$, где $q = q_2q_1$. Следовательно, $c|a$ ■

Лемма 2. Если $m = a + b$, $d|m$ и $d|a$, то $d|b$.

Доказательство. По определению имеем $m = q_1d$, $a = q_2d$ при некоторых $q_1, q_2 \in \boldsymbol{Z}$. Отсюда из равенства $m = a + b$ получаем $b = (q_1 - q_2) \cdot d$, т.е. $d|b$ ■

Замечание. Аналогично доказывается, что если $m = a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ и d делит числа $m, a_1, \ldots, a_{n-1}$, то $d|a_n$.

Определение. *Общим делителем* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{Z}$ называется число $d \in \boldsymbol{Z}$, являющееся делителем каждого из этих чисел. Общий делитель данных чисел называется их *наибольшим общим делителем*, если он делится на всякий общий делитель этих чисел.

Для обозначения наибольшего общего делителя будем использовать следующее:

$$d = НОД(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Замечание. На вопросы, связанные с существованием наибольшего общего делителя, можно получить ответы, изучив § 4 данного пособия. В этом же параграфе можно получить другие достаточно подробные сведения о наибольшем общем делителе.

Из определения наибольшего общего делителя вытекает важное свойство: если $d = НОД(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то множество всех общих делителей чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из всех делителей числа d.

Легко видеть, что если $d = НОД(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то $d = НОД(a_1, a_2, \dots, a_n, 0)$. Очевидно, верно и обратное. Если $d = НОД(a_1, a_2, \dots, a_n, 0)$, то $d = НОД(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Поэтому при нахождении наибольшего делителя нескольких чисел, не все из которых равны нулю, нули можно не учитывать.

Легко видеть также, что число 0 будет наибольшим общим делителем чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. В этом случае нуль является единственным наибольшим общим делителем данных чисел.

В дальнейшем изложении будем ограничиваться случаем, когда все числа отличны от нуля.

Очевидно также, что если $d = НОД(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то число $(-d)$ также является наибольшим общим делителем чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности рассуждений, будем называть наибольшим общим делителем положительное число в этой паре чисел.

Если $НОД(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, то числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называются *взаимно простыми*.

Примеры. $НОД(18, 42) = 6$; $НОД(60, 210, 360) = 30$;

$$НОД(-10, 21) = 1.$$

Лемма 3. Если $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$, $НОД(a, b) = 1$ и $b | ac$, то $b | c$.

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать утверждение для случая, когда $a, b, c \in \boldsymbol{N}$. Но сначала докажем более общее ***утверждение.*** Если $a, b, u, v \in \boldsymbol{N}$, $au = bv$, $НОД(a, b) = 1$, то $a | v$, $b | u$.

Доказательство проведем индукцией по величине суммы $a + b$.

При $a + b = 2$ имеем $a = 1$, $b = 1$, $НОД(a, b) = 1$. Утверждение выполняется.

Предположим, что оно справедливо для всех пар a, b таких, что $НОД(a, b) = 1$, сумма $a + b < k$, $k > 2$.

Докажем, что тогда оно имеет место и для таких пар a, b, что $НОД(a, b) = 1$ и сумма $a + b = k$. Действительно, из условий $НОД(a, b) = 1$, $a + b > 2$ следует, что $a \neq b$. Ввиду симметрии равенства $au = bv$ для определенности можно считать, что $a > b$. Тогда из $au = bv$ следует, что $au - bu = bv - bu$, $(a - b) \cdot u = b \cdot (v - u)$. Но $НОД(a - b, b) = 1$ и сумма $(a - b) + b = a < k$, поэтому по предположению индукции из равенства $(a - b) \cdot u = b \cdot (v - u)$ следует, что $b | u$, или $u = u_1 b$. Подставим это выражение для u в равенство $au = bv$ и сократим обе его части на b. Получим, что $au_1 = v$, следовательно, $a | v$. Утверждение доказано.

Лемма 3 для $a, b, c \in \boldsymbol{N}$ следует из доказанного утверждения. Действительно, если $НОД(a, b) = 1$ и $b | ac$, то $ac = bd$. А по доказанному выше $b | c$ ■

Лемма 4. Если $b \in \boldsymbol{Z}$ взаимно просто с каждым из $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{Z}$, то b взаимно просто с их произведением $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Доказательство. Индукция по n.

При $n = 1$ утверждение очевидно.

Допустим, что $n > 1$ и для $n-1$ утверждение верно.

Если d – общий делитель чисел b и $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, то $НОД(d, a_n) = 1$ и по лемме 3 $d \,|\, a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$. По предположению индукции $НОД(b, a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}) = 1$. Значит, $d = 1$ ■

В любом случае (когда $a \vdots b$ и когда $a \not\vdots b$) можно *число* a *разделить на число* b *с остатком.*

Теорема 1 *(о делении с остатком).* Если $a, b \in \boldsymbol{Z}$, $b > 0$, то существуют единственные $q, r \in \boldsymbol{Z}$ такие, что $a = bq + r$, $0 \le r < b$.
Доказательство. Существование. Согласно *принципу Архимеда (287–212 г.г. до н.э.)* для любого $a \in \boldsymbol{Z}$ существует такое целое число q, что $bq \le a < b \cdot (q+1)$. Отсюда $0 \le a - bq < b$. Обозначая $a - bq = r$, получим требуемое представление.
Единственность. Предположим, что кроме найденного выше представления $a = bq + r$, $0 \le r < b$ имеется другое: $a = bq_1 + r_1$, $0 \le r_1 < b$. Тогда $0 = b \cdot (q - q_1) + r - r_1$, $\left| r - r_1 \right| < b$. Из последнего равенства следует, что число b делит разность $r - r_1$. Но $\left| r - r_1 \right| < b$, следовательно, $r = r_1$, а тогда и $q = q_1$ (подставляя $r - r_1 = 0$ в равенство $0 = b \cdot (q - q_1) + r - r_1$) ■

Замечание. Теорему о делении с остатком можно доказать в более общей формулировке: если $a, b \in \boldsymbol{Z}$, $b \ne 0$, то существуют единственные $q, r \in \boldsymbol{Z}$ такие, что $a = bq + r$, $0 \le r < |b|$.

Примеры. Разделите с остатком a на b, если $a = 110, -53, 156$; $b = 12$.
Решение.

$110 = 12 \cdot 9 + 2$, $0 \le 2 < 12$;
$-53 = 12 \cdot (-5) + 7$, $0 \le 7 < 12$;
$156 = 12 \cdot 13 + 0$, $0 < 12$.

Упражнения

1.1. Докажите следующие утверждения:

1) если $b \mid a$, то $b^n \mid a^n$ для всякого $n \in \boldsymbol{N}$;

2) если $a+b$ и ab делятся на c, то a^2+b^2 делится на c;

3) если a^2 делится на $a+b$, то b^2 делится на $a+b$.

1.2. Докажите следующие утверждения:

1) если $ab+cd$ делится на $a+c$, то $ad+bc$ делится на $a+c$;

2)* если $ab+cd$ делится на $a-c$, то $ad+bc$ делится на $a-c$;

3) если a^2+ab+b^2 делится на $a+b$, то a^4+b^4 делится на $(a+b)^2$.

1.3. Методом математической индукции докажите, что для любого натурального числа n:

1) $2\cdot 7^n+1$ делится на 3;

2) $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ делится на 11;

3) $2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4$ делится на 25;

4) $2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1}$ делится на 37;

5) $2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}$ делится на 17;

6) $3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}$ делится на 19.

1.4.* Докажите, что разность любого трехзначного числа и трехзначного числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9.

1.5.* Докажите, что трехзначное число, записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 37.

1.6.* Докажите, что если в трехзначном числе две последние цифры одинаковы, а сумма его цифр делится на 7, то и само число делится на 7.

1.7.* Даны два трехзначных числа, причем ни одно из них не делится на 37, а сумма их делится на 37. Приписав одно из чисел к другому, получили некоторое шестизначное число. Докажите, что оно делится на 37.

1.8.* Из трех различных цифр получают шесть трехзначных чисел, всевозможным образом переставляя эти цифры (например: 123, 132, 213, 231, 312, 321). Докажите, что если среди этих шести чисел найдется число, делящееся на 37, то обязательно среди них будут и еще два числа, делящиеся на 37.

1.9.* Даны два трехзначных числа, дающие одинаковые остатки при делении на 7. Приписав одно из чисел к другому, получили некоторое шестизначное число. Докажите, что оно делится на 7.

1.10. При каких $n \in \boldsymbol{Z}$ справедливы утверждения:

1) $\dfrac{2n+1}{3n+1}$ – целое число; 2) $\dfrac{4n+3}{5n+2}$ – целое число?

Ответ: 1) 0; 2) 1.

1.11.* Найдите все такие целые числа a, для которых число a^2+1 делится на число $a+1$.

Ответ: $-3, -2, 0, 1$.

1.12. Найдите все целые n, при которых:

1)* n^3+14 делится на $n+2$; 2) n^3+4n^2-3 делится на $n+2$;
3) n^3+7n+1 делится на $n-2$; 4) n^4+7n^2+1 делится на n^2+2.

Ответ: 1) $-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4$;
2) $-7, -3, -1, 3$; 3) $-21, 1, 3, 25$; 4) ± 1.

1.13. Найдите a и b, если для любого натурального n число n^3+an+b делится на n^2+1.

Ответ: $a=1$, $b=0$.

1.14. Докажите, что сумма n последовательных целых чисел делится на n тогда и только тогда, когда n нечетно.

1.15.* Докажите, что число натуральных делителей натурального числа n не превосходит $2\sqrt{n}$.

1.16.* Докажите, что если натуральное число имеет нечетное число натуральных делителей, то оно является квадратом некоторого натурального числа.

1.17.* Числа a и m взаимно просты. Докажите, что если $ad - bc$ делится на m и $a - b$ делится на m, то и число $c - d$ делится на m.

1.18.* Докажите, что если число $a + 4b$ делится на 13, то и число $10a + b$ делится на 13 ($a, b \in \boldsymbol{Z}$). Верно ли обратное?

1.19. Докажите, что если число $3a + 2b$ делится на 17, то и число $10a + b$ делится на 17 ($a, b \in \boldsymbol{Z}$). Верно ли обратное?

1.20.* Разделите с остатком:

1) 12327 на 45; 2) 88943 на (-13); 3) (-35627) на 110.

1.21.* Чему равен остаток от деления:

1) $5n + 2$ на 5; 2) $5n - 2$ на 5; 3) $5n + 3$ на n;

4) $6n + 5$ на 3; 5) $n^2 + 1$ на $n - 1$?

1.22.* При делении с остатком числа 1270 на некоторое положительное число b частное оказалось равным 74. Найдите остаток r и число b.

Ответ: $b = 17$, $r = 12$.

1.23. Целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найдите остаток от деления этого числа на 28.

Ответ: 7.

1.24. Найдите наибольшее четырехзначное число, делящееся на 31.

Ответ: 9982.

1.25. Число 100 разделили на некоторое число, ме́ньшее 50, и получили в остатке 6. На какое число делили 100?

Ответ: 47.

1.26. Может ли число делиться на 8, а при делении на 12 давать остаток 10?

Ответ: нет.

1.27. Было 5 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 5 кусков каждый. Затем некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 5 частей и так далее несколько раз. Могли ли в результате получить 2003 куска?

Ответ: да.

1.28.* Докажите, что если $a > b > 0$, то остаток, который дает число a при делении на b, меньше $0.5a$.

Замечание. Решения многих задач основаны на простых правилах действия над остатками: если r_1 – остаток от деления a на c, а r_2 – остаток от деления b на c, то

1) остаток от деления $a+b$ на c равен остатку от деления r_1+r_2 на c;
2) остаток от деления $a-b$ на c равен остатку от деления r_1-r_2 на c;
3) остаток от деления ab на c равен остатку от деления $r_1\cdot r_2$ на c.

Доказательство. Все эти правила доказываются аналогично. Рассмотрим, например, случай произведения. Пусть $a=cq_1+r_1$, $b=cq_2+r_2$. Разделим $r_1\cdot r_2$ с остатком на c: $r_1\cdot r_2=cq+r$, $0\le r<|c|$. Тогда

$$ab=(cq_1+r_1)(cq_2+r_2)=c\cdot(cq_1q_2+q_1r_2+q_2r_1+q)+r.$$

Следовательно, остаток от деления ab на c равен r ■

1.29. Докажите самостоятельно правила 1) и 2) действий с остатками.

1.30.* Найдите остаток от деления 2^n на 3.

1.31. Докажите, то если n нечетно, то 4^n+1 делится на 5.

1.32. Докажите, что $9^{30}+6^{19}$ делится на 7.

1.33. Докажите, что n^2+2n делится на 8, если n четно.

1.34.* Какие остатки может иметь квадрат целого числа от деления на 3, на 5, на 7?

1.35.* Докажите, что разность квадратов чисел, не делящихся на 3, делится на 3.

1.36. Докажите, что произведение трех последовательных целых чисел делится на 6.

1.37. Докажите, что произведение пяти последовательных целых чисел делится на 120.

1.38. Докажите, что произведение трех последовательных четных чисел делится на 48.

1.39. Докажите, что $n^3 + 5n$ делится на 6 для любого целого n.

1.40. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при любом целом n.

1.41. Докажите, что $n^5 - 15n^3 + 54n$ делится на 5 при любом целом n.

1.42. Докажите, что уравнение $x^2 = 3y + 2$ не имеет решений в целых числах.

1.43. Докажите, что уравнение $x^3 - 7y^3 = 2$ не имеет решений в целых числах.

1.44.* Докажите, что уравнение $2x^3 + y^3 = 5$ не имеет решений в целых числах.

1.45. Докажите, что для любых целых чисел a и b число $a^2 + b^2$ делится на 3 тогда и только тогда, когда оба числа a и b делятся на 3.

1.46. Докажите, что какими бы ни были целые числа a и b, хотя бы одно из чисел a, b, $a+b$, $a-b$, $2a+b$, $2a-b$ делится на 5.

1.47. Докажите, что среди семи натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию с разностью 30, ровно одно делится на 30.

1.48. Докажите, что если $a^2 + b^2$ делится на 7, то $a^2 + b^2$ делится на 49.

1.49. Докажите, что если $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 7, то одно из чисел a, b, c делится на 7.

1.50.* Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы квадратов двух целых чисел.

1.51. Докажите, что число вида $a \cdot (a+1) \cdot (2a+1)$ при любом целом a делится на 6.

1.52. Докажите, что если числа a и b не делятся на 3, но дают одинаковые остатки при делении на 3, то число $ab - 1$ делится на 3. Обратно, если $ab - 1$ делится на 3, то числа a и b не делятся на 3 и дают одинаковые остатки при делении на 3.

1.53. Докажите, что если числа a и b не делятся на 3 и дают разные остатки при делении на 3, то число $ab + 1$ делится на 3. Обратно, если $ab + 1$ делится на 3, то числа a и b не делятся на 3 и дают разные остатки при делении на 3.

1.54.* Докажите, что если m и n – нечетные числа, то число $m^2 - n^2$ делится на 8.

1.55. Докажите, что квадрат нечетного числа, уменьшенный на 1, делится на 8.

1.56. Докажите, что сумма квадратов двух последовательных целых чисел, уменьшенная на 1, делится на 4.

1.57.* Докажите, что при любом нечетном n число $n^3 - n$ делится на 24.

1.58.* Докажите, что при любом целом n число $n^5 - n$ делится на 30.

1.59. Докажите, что для любого целого числа n число $n^3 + 11n$ делится на 6.

1.60. Докажите следующие ***признаки делимости***:

1) для того чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра делилась на 2;
2) для того чтобы число делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы число, записываемое его двумя последними цифрами, делилось на 4;
3) для того чтобы число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа была 0 или 5;
4) для того чтобы число делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы число, записываемое его тремя последними цифрами, делилось на 8;
5) для того чтобы число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра была 0;
6) для того чтобы число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.

1.61.* Докажите, что при любых $n \geq 0$ число $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

1.62.* Последовательность $\{x_n\}$ задана формулами $x_1 = x_2 = 1$ и $x_{n+2} = x_{n+1}^2 + x_n^2$, если $n > 0$. Делится ли x_{2003} на 7?

1.63. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулами $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_{n+1} = x_n \cdot x_{n-1} + 1$, если $n > 2$. Докажите, что ни одно из чисел этой последовательности не делится на 4?

1.64. Докажите, что для всякого целого n либо $n^3 - n$, либо $n^3 + n$ делится на 10.

1.65. Докажите, что если n нечетно, то $n^5 + 5n^4 - n - 5$ делится на 80.

1.66. Докажите, что $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n$ делится на 30 для любого целого n.

1.67. Докажите, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120 для любого целого n.

1.68. Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел, среднее из которых – квадрат натурального числа, делится на 60.

1.69. Докажите, что $n^8 - n^6 - n^4 + n^2$ делится на 1152, если n нечетно.

1.70. Докажите, что $n^9 - 6n^7 + 9n^5 - 4n^3$ делится на 8640 для любого целого n.

1.71. Докажите, что $ab(a^4 - b^4)$ делится на 30 для любых целых a и b.

1.72. Докажите, что $ab(a^6 - b^6)$ делится на 42 для любых целых a и b.

1.73. Докажите, что $n^8 - n^2$ делится на 252 для любого целого n.

1.74. Докажите, что $n^8 - 36n^4 - 10n^2$ делится на 45 для любого целого n.

Замечание. Решения ряда задач используют следующее свойство конечных множеств. Пусть $f : X \to Y$ – отображение множества X, состоящего из m элементов, в множество Y, состоящее из n элементов. Предположим, что $m > n$. Тогда в X найдутся два различных элемента a и b, образы которых совпадают, т.е. $f(a) = f(b)$. Это утверждение иногда называют ***принципом Дирихле*** и формулируют в шутливой форме следующим образом: если посадить в n клеток $m > n$ кроликов, то в некоторой клетке окажется более одного кролика.

1.75.* Докажите, что среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на n.

1.76. Докажите, что для любого целого числа a в последовательности a, $a+1$, ... , $a+(n-1)$ ровно одно из чисел делится на n.

1.77.* Докажите, что для всякого нечетного a найдется такое натуральное n, что $2^n - 1$ делится a.

§ 2. Простые числа

Рассмотрим теперь множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$. Число 1 имеет единственный натуральный делитель. Любое $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, делится на 1 и n.

Определение. Число $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, называется *простым*, если оно не имеет других натуральных делителей, кроме 1 и n.

Определение. Число $n \in \boldsymbol{N}$ называется *составным*, если оно имеет натуральный делитель, отличный от 1 и n.

Замечание. Из последнего определения следует, что каждое составное число представляется в виде $n = a \cdot b$, где $a, b \in \boldsymbol{N}$, $1 < a < n$, $1 < b < n$.

Замечание. Число 1 не является ни простым, ни составным.

Лемма 5. Наименьший отличный от 1 натуральный делитель числа $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, есть простое число.

Доказательство. Число $n > 1$ имеет хотя бы два различных делителя и, следовательно, имеет делитель, отличный от 1. Среди всех делителей n, отличных от 1, имеется наименьший. Пусть это будет q. Число q должно быть простым, так как иначе оно было бы составным и по определению имело бы делитель q_1 такой, что $1 < q_1 < q$. Итак, $q_1 \mid q$ и $q \mid n$, а тогда по лемме 1 $q_1 \mid n$. Противоречие с тем, что q – наименьший делитель n. Следовательно, q – простое число ■

Следствие. Любое число $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, имеет хотя бы один простой делитель.

Лемма 6. Наименьший простой делитель составного числа n не превосходит $\sqrt{n}$.

Доказательство. Пусть p, $p > 1$, – наименьший делитель n, являющийся по лемме 5 простым числом. Так как n – составное число, то $n = pq$, где $q \geq p$. Поэтому $n \geq p^2$, откуда $p \leq \sqrt{n}$ ■

Лемма 7. Если p – простое число, то любое $a \in \boldsymbol{Z}$ либо взаимно просто с p, либо делится на p.

Доказательство. $НОД(a\,,\,p)$ является делителем p и поэтому может быть равен только 1 или p. В первом случае число a взаимно просто с p, а во втором оно делится на p ■

Теорема 2 (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ). Любое число $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, представляется в виде произведения простых чисел, причем единственным образом, если не учитывать порядок следования сомножителей.

Доказательство. По лемме 5 число n имеет наименьший простой делитель p_1. Тогда $n = p_1 \cdot a_1$. Если $a_1 > 1$, то аналогично получим $a_1 = p_2 \cdot a_2$, где p_2 – наименьший простой делитель числа a_1 и т.д. Поскольку числа $a_1, a_2, \ldots$ убывают, то на некотором шаге будем иметь, что $a_r = 1$ и $a_{r-1} = p_r$. Перемножая все полученные равенства, получим

$$n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{r-1} = a_1 \cdot p_1 \cdot a_2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot a_{r-1} \cdot p_{r-1} \cdot p_r\,.$$

После сокращения на $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{r-1}$ получим разложение числа n на простые сомножители: $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$.

Докажем единственность этого разложения. Предположим, что для некоторого n имеются два разложения на простые множители: $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$.

Правая часть этого равенства делится на q_1. Значит, и его левая часть делится на q_1. Тогда по лемме 4 (см. § 1) хотя бы один из сомножителей левой части делится на q_1. Пусть это будет p_1. Тогда $p_1 = q_1$, так как p_1 делится только на 1 и p_1. Сокращая обе части равенства на $p_1 = q_1$, получим, что $p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$.

Повторяя рассуждение для последнего равенства, получим $p_2 = q_2$ и $p_3 \cdot \ldots \cdot p_k = q_3 \cdot \ldots \cdot q_s$ и так далее до тех пор, пока в одной из частей получающихся равенств, например, в правой, сократятся все сомножители. Но тогда и в левой части должны сократиться все сомножители, так как равенство $p_{s+1}\cdot\ldots\cdot p_k=1$ невозможно, поскольку все числа $p_{s+1},\ldots,p_k$ больше единицы. Следовательно, разложения числа n на простые сомножители совпадают ■

Пусть $n\in\boldsymbol{N},\ n>1$, и $n=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r$ есть разложение n на простые сомножители. Среди чисел $p_1,p_2,\ldots,p_r$ могут быть и одинаковые. Пусть $p_1,p_2,\ldots,p_k$ – различные из этих чисел, а $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ – кратности, с которыми они входят в разложение. Тогда

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Последнее представление называется *каноническим разложением* натурального числа $n,\ n>1$, на простые сомножители.

Пример. $261360=2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11^2$.

С помощью канонического разложения $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ можно представить все делители n. Они имеют вид:

$$d=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}\text{, где } 0\le\beta_i\le\alpha_i\text{, при } i=1,2,\ldots,k.$$

Действительно, если $d\mid n$, то по лемме 1 (см. § 1) каждый простой делитель числа d делит n. Поэтому он содержится среди чисел $p_1,p_2,\ldots,p_k$ и входит в каноническое разложение числа d со степенью, не большей, чем в каноническом разложении числа n. Поэтому d представляется в виде $d=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$. Очевидно и обратное, что каждое число вида $d=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$, где $0\le\beta_i\le\alpha_i$, при $i=1,2,\ldots,k$, есть делитель n.

Замечание. Вопросы делимости, связанные с представлением натуральных чисел в каноническом виде, подробно рассмотрены в § 6 данного пособия.

Теорема 3 ***(Евклид*** *(III в. до н.э.)****)***. Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство. Допустим противное, что простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ образуют конечное множество и p_k – наибольшее простое число. Рассмотрим число $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Оно не делится ни на одно из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, так как при делении N на любое из этих чисел остаток равен 1. Но $N > 1$ и по следствию из леммы 5 N должно иметь простой делитель. Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение неверно и теорема справедлива ■

Опишем удобный способ выделения простых чисел в данном отрезке натурального ряда, известный еще греческому ученому *Эратосфену (276–194 г.г. до н.э.)*. Он состоит в отсеивании составных чисел, находящихся в данном отрезке, и носит название ***«решета Эратосфена»***.

Напишем одно за другим числа $2, 3, 4, \ldots, N$. Число 2, являющееся простым, оставляем и зачеркиваем после него все четные числа. Первое следующее за 2 незачеркнутое число есть 3. Оно не делится на 2. Значит, оно не имеет делителей, отличных от 1 и 3, и поэтому является простым. Оставляем 3 и зачеркиваем после него все числа, кратные 3. Продолжая этот процесс, найдем все простые числа, не превосходящие некоторого простого числа p_k. При этом будут зачеркнуты все составные числа, кратные $2, 3, \ldots, p_k$. Первое незачеркнутое после p_k число будет простым числом p_{k+1}, так как оно не делится на $2, 3, \ldots, p_k$ и поэтому имеет своими делителями только 1 и p_{k+1}. Если найдено $p_k \geq \sqrt{N}$, то все оставшиеся незачеркнутыми числа будут простыми, поскольку все кратные чисел

$2, 3, \ldots, p_k$ уже вычеркнуты, а по лемме 6 любое составное число n имеет простой делитель $\leq \sqrt{n}$.

Составление таблицы простых чисел, не превосходящих N, указанным процессом закончено, как только зачеркнуты все числа, кратные простым числам $\leq \sqrt{N}$.

Пример. Составьте таблицу простых чисел в отрезке натурального ряда от 1 до 100.

Решение. В приводимой ниже таблице подчеркнуты все числа, которые должны быть вычеркнуты в процессе применения решета Эратосфена (одной чертой выделены все числа, кратные 2; двумя – все числа, кратные 3 и не выделенные ранее; тремя – все числа, кратные 5 и не выделенные ранее при двух предыдущих переборах; четырьмя – все оставшиеся невыделенными числа, кратные 7):

	2,	3,	$\underline{4}$,	5,	$\underline{6}$,	7,	$\underline{8}$,	$\underline{\underline{9}}$,	$\underline{10}$,
11,	$\underline{12}$,	13,	$\underline{14}$,	$\underline{\underline{15}}$,	$\underline{16}$,	17,	$\underline{18}$,	19,	$\underline{20}$,
$\underline{\underline{21}}$,	$\underline{22}$,	23,	$\underline{24}$,	$\underline{\underline{\underline{25}}}$,	$\underline{26}$,	$\underline{\underline{27}}$,	$\underline{28}$,	29,	$\underline{30}$,
31,	$\underline{32}$,	$\underline{\underline{33}}$,	$\underline{34}$,	$\underline{\underline{\underline{35}}}$,	$\underline{36}$,	37,	$\underline{38}$,	$\underline{\underline{39}}$,	$\underline{40}$,
41,	$\underline{42}$,	43,	$\underline{44}$,	$\underline{\underline{45}}$,	$\underline{46}$,	47,	$\underline{48}$,	$\underline{\underline{\underline{\underline{49}}}}$,	$\underline{50}$,
$\underline{\underline{51}}$,	$\underline{52}$,	53,	$\underline{54}$,	$\underline{\underline{\underline{55}}}$,	$\underline{56}$,	$\underline{\underline{57}}$,	$\underline{58}$,	59,	$\underline{60}$,
61,	$\underline{62}$,	$\underline{\underline{63}}$,	$\underline{64}$,	$\underline{\underline{\underline{65}}}$,	$\underline{66}$,	67,	$\underline{68}$,	$\underline{\underline{69}}$,	$\underline{70}$,
71,	$\underline{72}$,	73,	$\underline{74}$,	$\underline{\underline{75}}$,	$\underline{76}$,	$\underline{\underline{\underline{\underline{77}}}}$,	$\underline{78}$,	79,	$\underline{80}$,
$\underline{\underline{81}}$,	$\underline{82}$,	83,	$\underline{84}$,	$\underline{\underline{\underline{85}}}$,	$\underline{86}$,	$\underline{\underline{87}}$,	$\underline{88}$,	89,	$\underline{90}$,
$\underline{\underline{\underline{\underline{91}}}}$,	$\underline{92}$,	$\underline{\underline{93}}$,	$\underline{94}$,	$\underline{\underline{\underline{95}}}$,	$\underline{96}$,	97,	$\underline{98}$,	$\underline{\underline{99}}$,	$\underline{100}$.

Так как $11^2 = 121, 121 > 100$, то все невычеркнутые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 являются простыми.

Упражнения

2.1. Определите, является ли простым число:

1)* 353; 2)* 767; 3)* 1999; 4) 2003.

Ответ: 1) 353 – простое число; 2) 767 – составное число; 3) 1999 – простое число; 4) 2003 – простое число.

2.2.* Какие из чисел, заключенные между числами a и b $(a < b)$, являются простыми:

1) $a = 2320$, $b = 2350$; 2) $a = 40322$, $b = 40330$;
3) $a = 3628802$, $b = 3628810$?

Ответ: 1) $2333, 2339, 2341, 2347$;
2) среди этих чисел нет ни одного простого;
3) среди этих чисел нет ни одного простого.

2.3.* Докажите, что наименьшее число, взаимно простое с числами $2, 3, \ldots, n$, просто.

2.4.* Докажите, что для любого натурального n найдется такое натуральное x, что число $nx + 1$ составное.

2.5. Докажите, что если число, являющееся квадратом некоторого целого числа, делится на простое число p, то оно должно делиться и на число p^2.

2.6. При каких целых n число $n^2 - 7n + 10$ является простым?

Ответ: таких n не существует.

2.7. При каких целых n число $n^4 + n^2 + 1$ является простым?

Ответ: ± 1.

2.8. Про три простых числа известно, что одно из них является разностью кубов двух других. Какие это числа?

Ответ: 2, 3, 19.

2.9.* Докажите, что если $a^n - 1$ – простое число, то $a = 2$ и n – простое число.

2.10.* Докажите, что если число $2^m + 1$ – простое, то $m = 2^n$ для некоторого целого $n \geq 0$.

2.11.* Найдите все простые числа p такие, что числа $p+2$ и $p+4$ также простые.

Ответ: 3.

2.12.* Какие остатки при делении на 6 может иметь простое число, бóльшее 3?

Ответ: 1 и 5.

2.13. Докажите, что если p и $2p+1$ – простые числа ≥ 5, то число $4p+1$ составное.

2.14.* Известно, что числа p, $p + 10$, $p + 14$ – простые. Чему равно число p?

Ответ: 3.

2.15.* Известно, что числа p и $8p^2+1$ – простые. Чему равно p?

Ответ: 3.

2.16.* Известно, что числа p, $2p + 1$, $4p + 1$ – простые. Чему равно число p?

Ответ: 3.

2.17. Найдите все такие простые числа p, что число $2p^2+1$ также простое.

Ответ: 3.

2.18. Докажите, что число n^3-n+3 составное для любого натурального $n>1$.

2.19.* Найдите все такие простые числа p, что числа $4p^2+1$ и $6p^2+1$ также простые.

Ответ: 5.

2.20. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 либо является простым числом, либо равен 1.

2.21.* Докажите, что если $(n-1)!$ не делится на n, то либо $n=4$, либо n – простое число.

2.22.* Пусть $n>2$. Докажите, что произведение всех простых чисел, не превосходящих n, больше n.

2.23.* Докажите, что если $n > 2$, то между числами n и $n!$ есть простое число.

2.24.* Докажите, что если число n – составное, то число $2^n - 1$ тоже составное.

2.25.* Докажите, что квадрат простого числа, бóльшего трех, дает остаток 1 при делении на 12.

2.26.* Докажите, что для любого числа $k \in \boldsymbol{N}$ в натуральном ряду чисел можно найти k идущих подряд составных чисел.

2.27.* Докажите, что если произведение ab делится на простое число p, то хотя бы одно из чисел a, b делится на p.

2.28.* Докажите, что если сумма и произведение двух целых чисел делятся на простое число p, то каждое из них делится на p. Верно ли это, если p – составное?

2.29.* Найдите простое число p, если известно, что число $13p + 1$ является кубом некоторого натурального числа.

Ответ: 2 или 211.

2.30.* Докажите, что при $n \geq 2$ сумма n последовательных нечетных чисел, т.е. сумма

$$(2k+1) + (2k+3) + (2k+5) + \ldots + (2k+2n-1),$$

является составным числом.

2.31.* Докажите, что если p – простое число, то число C_p^i при $1 \leq i \leq p-1$ делится на p. Верно ли это утверждение, если число p не является простым?

2.32.* Докажите, что число C_{2n}^n делится на любое простое число p такое, что $n < p \leq 2n$.

2.33.* Докажите, что число вида $n^4 + 4$ $(n \in \boldsymbol{N},\ n > 1)$ всегда составное.

2.34.* Обозначим через p_n n-ое по порядку простое число. Докажите, что $p_n \geq 2n$.

2.35.* Обозначим через p_n n-ое по порядку простое число. Докажите, что $p_n \le 2^{2^{n-1}}$.

2.36.* Пусть p – простое число. Докажите, что единственным решением в целых числах уравнения $x^3 + py^3 + p^2z^3 = 0$ является $x = y = z = 0$.

2.37.* Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 3 остаток 2.

2.38.* Докажите, что простых чисел вида $4k - 1$ бесконечно много.

2.39.* Из чисел от 1 до $1000!$ вычеркнуты все числа, делящиеся на 2, 3, 5 и 7. Какая часть первоначально взятых чисел осталась невычеркнутой?

Ответ: $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{8}{35}$.

2.40.* Докажите, что среди чисел от 1 до a (включительно) имеется $\left[\dfrac{a}{b}\right]$ чисел, делящихся на b. (Через $\left[\dfrac{a}{b}\right]$ обозначена целая часть числа a/b.)

2.41.* Числа b и c взаимно просты. Сколько имеется чисел от 1 до a, делящихся хотя бы на одно из чисел b, c?

Ответ: $\left[\dfrac{a}{b}\right]+\left[\dfrac{a}{c}\right]-\left[\dfrac{a}{bc}\right]$.

2.42. Докажите, что число $3^{24}+3^{17}+1$ является составным, разложив его на два целых сомножителя, бóльших 6000 (не вычисляя самого числа, а используя только его выражение).

Ответ: $6535\cdot(3^{16}+3^{11}+2\cdot 3^8+3^6+3^3+1)$.

2.43. Найдите все упорядоченные тройки простых чисел $(p;q;r)$, удовлетворяющие равенству $p^q + q^p = r$.

Ответ: $(2;3;17)$, $(3;2;17)$.

§ 3. Сравнения

В ходе дальнейшего изложения будем считать, что число m является натуральным.

Определение. Целые числа a и b *сравнимы по модулю* m, если они имеют одинаковые остатки от деления на m (при этом используется запись $a \equiv b \pmod{m}$).

Замечание. Запись $a \equiv 0 \pmod{m}$ означает делимость a на m.

Пример. $-10 \equiv 4 \pmod{7}$.

Из определения следует, что все целые числа по модулю m разбиваются на m непересекающихся классов сравнимых между собой чисел (т.е. чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на m):

$$K_0\,,\,K_1\,,\,\ldots\,,\,K_{m-1}\,.$$

Каждое число, входящее в какой-либо из классов, называется *вычетом* этого класса, а сами классы – *классами вычетов по модулю* m. Беря по одному вычету из каждого класса, получим *полную систему вычетов по модулю* m.

Пример. Классами чисел по модулю 4 являются:

$$K_0 = \{\ldots, -4n, \ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots, 4n, \ldots\},$$

$$K_1 = \{\ldots, -4n+1, \ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots, 4n+1, \ldots\},$$

$$K_2 = \{\ldots, -4n+2, \ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots, 4n+2, \ldots\},$$

$$K_3 = \{\ldots, -4n+3, \ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots, 4n+3, \ldots\}.$$

Совокупность $\{8, -11, 2, 23\}$ образует одну из полных систем вычетов по модулю 4. Полной системой наименьших неотрицательных вычетов по модулю 4 является $\{0, 1, 2, 3\}$. Полной системой наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 4 является $\{0, 1, 2, -1\}$, а также $\{0, 1, -2, -1\}$.

Теорема 4. Пусть $a, b \in \boldsymbol{Z}$. Соотношение $a \equiv b \pmod m$ имеет место тогда и только тогда, когда $m \mid (a-b)$.

Доказательство. ⇨ Если $a \equiv b \pmod m$, то $a = mq_1 + r$, $b = mq_2 + r$. Следовательно, $a - b = m \cdot (q_1 - q_2)$. Значит, $m \mid (a-b)$ ■

⇦ Если $m \mid (a-b)$, то $a - b = mx$. Если $b = mq + r$, то $a = m \cdot (q + x) + r$. Следовательно, $a \equiv b \pmod m$ ■

Замечание. Из теоремы следует, что класс чисел по модулю m, содержащий число $a \in \boldsymbol{Z}$, состоит из всех чисел $x \in \boldsymbol{Z}$ вида $x = a + mq$.

Свойства сравнений.

1. Рефлексивность: $a \equiv a \pmod m$.
   Доказательство. Очевидно; следует из определения.
2. Симметричность: если $a \equiv b \pmod m$, то $b \equiv a \pmod m$.
   Доказательство. Очевидно; следует из определения.
3. Транзитивность: если $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$.
   Доказательство. Очевидно; следует из определения.

4. Если $a_1 \equiv b_1 \pmod m$, $a_2 \equiv b_2 \pmod m$, то
   $$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod m.$$
   Доказательство. По теореме 4 $a_1 - b_1 = mx_1$, $a_2 - b_2 = mx_2$. Следовательно, $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 = m \cdot (x_1 + x_2)$, или $(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = m \cdot (x_1 + x_2)$. Таким образом, согласно этой же теореме, $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod m$ ■

5. Если $a + c \equiv b \pmod{m}$, то $a \equiv b - c \pmod{m}$.

Доказательство. По теореме 4 $a + c - b = mx$, или $a - (b - c) = mx$. Таким образом, согласно этой же теореме, $a \equiv b - c \pmod{m}$ ■

6. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a + mk \equiv b \pmod{m}$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

Доказательство. По теореме 4 $a - b = mx$, следовательно, $a - b + mk = m \cdot (x + k)$, или $(a + mk) - b = m \cdot (x + k)$. Таким образом, согласно этой же теореме, $a + mk \equiv b \pmod{m}$ ■

7. Если $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, то

$$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}.$$

Доказательство. По теореме 4 $a_1 = b_1 + mx_1$, $a_2 = b_2 + mx_2$. Следовательно, $a_1a_2 = b_1b_2 + m \cdot (b_1x_2 + b_2x_1 + mx_1x_2)$, или $a_1a_2 - b_1b_2 = mk$. Таким образом, согласно этой же теореме, $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}$ ■

8. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, где $n \in \boldsymbol{N}_0$.

Доказательство. Следует из предыдущего свойства.

9. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $ak \equiv bk \pmod{m}$.

Доказательство. По теореме 4 $a - b = mx$, значит, $ak - bk = m \cdot (xk)$. Таким образом, согласно этой же теореме, $ak \equiv bk \pmod{m}$ ■

10. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $ak \equiv bk \pmod{mk}$, где $k \in \boldsymbol{N}$.

Доказательство. По теореме 4 $a - b = mx$, значит, $ak - bk = (mk) \cdot x$. Таким образом, согласно этой же теореме, $ak \equiv bk \pmod{mk}$ ■

11. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $a = ka'$, $b = kb'$, $m = km'$, то $a' \equiv b' \pmod{m'}$.

Доказательство. Если $a - b = mx$, то $k \cdot (a' - b') = k \cdot (m'x)$, следовательно, $a' - b' = m'x$, или $a' \equiv b' \pmod{m'}$ ■

12. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $m = du$, то $a \equiv b \pmod{d}$.

Доказательство. Если $a - b = mx$, то $a - b = d \cdot (ux)$. Таким образом, $a \equiv b \pmod{d}$ ■

13. Если $au \equiv av \pmod{m}$ и $НОД(a, m) = 1$, то $u \equiv v \pmod{m}$.

Доказательство. По теореме 4 $au - av = mx$, или $a \cdot (u - v) = mx$. Согласно свойству делимости (см. § 1, лемма 3) $m \mid (u - v)$ (в силу $НОД(a, m) = 1$). Таким образом, $u \equiv v \pmod{m}$ ■

Следствие. Рассмотрим некоторый многочлен с целыми коэффициентами:

$$k_0 x^n + k_1 x^{n-1} + \ldots + k_{n-1} x + k_n .$$

Если $a \equiv b \pmod{m}$, то значения, которые принимает этот многочлен при $x = a$ и $x = b$, также сравнимы между собой по модулю m, т.е.

$$k_0 a^n + k_1 a^{n-1} + \ldots + k_{n-1} a + k_n \equiv k_0 b^n + k_1 b^{n-1} + \ldots + k_{n-1} b + k_n \pmod{m} .$$

Рассмотрим простейшее линейное сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$.

Теорема 5. Линейное сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$, где $НОД(a, m) = 1$, разрешимо. Множество удовлетворяющих ему чисел составляет некоторый класс вычетов по модулю m.

Доказательство. Так как $НОД(a, m) = 1$, то числа $a, 2a, 3a, \ldots, ma$ имеют разные остатки от деления на m (т.е. $ia \not\equiv ja \pmod{m}$). Действительно, если бы $ia \equiv ja \pmod{m}$, то по свойству 13 сравнений выполнялось бы $i \equiv j \pmod{m}$, откуда, учитывая $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$, имело бы место равенство $i = j$.

Итак, все числа $a, 2a, 3a, \ldots, ma$ лежат в разных классах вычетов по модулю m. Так как имеется ровно m различных классов вычетов по модулю m, то обязательно одно из чисел $a, 2a, 3a, \ldots, ma$ содержится в классе вычетов, в котором находится число b. Значит, линейное сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$ разрешимо.

Если $ar \equiv b \pmod{m}$, то все числа x из класса вычетов, содержащего r (т.е. числа вида $x = r + my$), удовлетворяют сравнению $ax \equiv b \pmod{m}$. Действительно, $a \cdot (r + my) = ar + m \cdot (ay)$, $ar + m \cdot (ay) \equiv ar \pmod{m}$, отсюда $ar + m \cdot (ay) \equiv b \pmod{m}$. Таким образом, любое решение линейного сравнения $ax \equiv b \pmod{m}$, $НОД(a, m) = 1$, лежит в классе вычетов, содержащем r ■

Упражнения

3.1.* Найдите остаток от деления:

1)* 14^{256} на 17; 2)* 6^{592} на 11;

3) 9^{947} на 13; 4) 15^{1043} на 23.

Ответ: 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 14.

3.2.* Докажите, что:

1) $11^{10}-1$ делится на 100; 2) $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7.

3.3. Найдите остаток от деления:

1) $\left(2003^{2003}+1\right)^{2003}$ на 13; 2) $\left(2^{2003}-1\right)^{2003}$ на 17;

3) $\left(5^{30036}+13^{139}\right)^{654}$ на 9; 4) $\left(29^{3700}+4\right)^{17}$ на 11;

5) $\left(11^{399}-3\right)^{2003}$ на 14; 6) $\left(13^{175}+2\right)^{10000}$ на 16.

Ответ: 1) 7; 2) 3; 3) 1; 4) 3; 5) 10; 6) 1.

3.4.* Найдите:

1) две последние цифры числа 2^{2004};

2) последнюю цифру числа $1998^{2001^{2004}}$.

Ответ: 1) 16; 2) 8.

3.5. Докажите, что числа вида:

1)* $12n+5$; 2) $7n+3$ – не могут быть квадратами целых чисел.

3.6.* Докажите, что если a^2+b^2 делится на 7, то a и b делятся на 7.

3.7.* Докажите, что каковы бы ни были целые числа a, b, c, число $a^2+b^2+c^2+1$ не делится на 8.

3.8.* Докажите, что если $a^2+b^2+c^2$ делится на 9, то хотя бы одно из чисел a^2-b^2, a^2-c^2, b^2-c^2 делится на 9.

3.9.* Докажите, что a не может быть четвертой степенью натурального числа, если $a-5$ делится на 9.

3.10.* Докажите, что число вида $8n+7$ не может быть суммой квадратов трех целых чисел.

3.11. Докажите, что сумма квадратов двух нечетных чисел не является квадратом целого числа.

3.12.* Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не может быть квадратом целого числа.
3.13.* Докажите, что сумма четных степеней трех последовательных четных чисел не может равняться четной степени целого числа.

3.14.* Решите сравнения:

1) $2x+1 \equiv 0 \pmod 7$; 2) $2x-3 \equiv 0 \pmod 7$;

3) $2x+3 \equiv 0 \pmod 6$; 4) $x^2 \equiv -1 \pmod{13}$;

5) $x^2 \equiv -1 \pmod{11}$; 6) $x^2 \equiv 2 \pmod{31}$;

7) $2x^2+3x+1 \equiv 0 \pmod 5$; 8) $2x^2+4x+2 \equiv 0 \pmod 8$.

Ответ: 1) $x \equiv 3 \pmod 7$;2) $x \equiv 5 \pmod 7$; 3) нет решений;
4) $x \equiv 5 \pmod{13}$, $x \equiv 8 \pmod{13}$; 5) нет решений;
6) $x \equiv 8 \pmod{31}$, $x \equiv 23 \pmod{31}$;
7) $x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 4 \pmod 5$;
8) $x \equiv 1 \pmod 8$, $x \equiv 3 \pmod 8$, $x \equiv 5 \pmod 8$, $x \equiv 7 \pmod 8$.

3.15. Решите сравнения:

1) $4x^2+3x \equiv 5 \pmod{11}$; 2) $3x^2+5x \equiv 1 \pmod 7$;

3) $x^3+4x^2 \equiv -1 \pmod 9$; 4) $7x^2-4x^3 \equiv 2 \pmod 6$.

Ответ: 1) $x \equiv 5 \pmod{11}$, $x \equiv 8 \pmod{11}$;
2) $x \equiv 1 \pmod 7$, $x \equiv 2 \pmod 7$;
3) $x \equiv 7 \pmod 9$; 4) $x \equiv 2 \pmod 6$.

3.16. Решите системы сравнений:

1)* $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 5, \\ x \equiv 1 \pmod 8; \end{cases}$ 2)* $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{15}, \\ x \equiv 3 \pmod 8; \end{cases}$ 3)* $\begin{cases} 3x+4 \equiv 0 \pmod{14}, \\ 2x+1 \equiv 3 \pmod 5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x+1 \equiv 0 \pmod 7, \\ x \equiv 3 \pmod 8; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x+2 \equiv 0 \pmod 7, \\ x \equiv 5 \pmod 6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x+3 \equiv 0 \pmod{11}, \\ x \equiv 2 \pmod 5. \end{cases}$

Ответ: 1) $x \equiv 33 \pmod{40}$; 2) $x \equiv 107 \pmod{120}$;
3) $x \equiv 36 \pmod{70}$; 4) $x \equiv 19 \pmod{56}$;
5) $x \equiv 11 \pmod{42}$; 6) $x \equiv 2 \pmod{55}$.

3.17.* Дано натуральное число n. Докажите, что найдется число, записываемое только единицами и нулями, которое делится на n.

3.18.* Докажите, что число $100\ldots001$, в котором число нулей четное, делится на 11.

3.19.* Существует ли такое натуральное n, что число $\underbrace{111...11}_{n\ \text{цифр}}$ делится на 217?

3.20.* Докажите, что при любых целых a и b число $ab\cdot(a^2-b^2)\cdot(4a^2-b^2)$ делится на 15.

3.21 (1-*я Мексиканская математическая олимпиада*).* Докажите, что числа вида $\left(a^3-a\right)\cdot\left(5^{8a+4}+3^{4a+2}\right)$ делятся на 3804 при любом целом $a \geq 0$.

3.22 (Московская олимпиада).* Докажите, что числа вида k^2+k+2 не могут делиться на числа вида $6n+3$.

3.23.* Докажите, что числа вида k^2+k+1 не могут делиться:

1) на 5, на 11 и на 17; 2) на числа вида $6m-1$.

3.24.* Докажите, что ни при каком натуральном n число $1+2+\ldots+n$ не может заканчиваться ни одной из цифр 2, 4, 7, 9.

3.25.* Докажите признак делимости на 9:
«Для того чтобы число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9».

3.26.* Докажите признак делимости на 11:
«Для того чтобы число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делилась на 11».

3.27.* Шестизначное число делится на 7. Докажите, что если его первую цифру перенести на последнее место, то новое число также будет делиться на 7.

Следующие два утверждения принято объединять под одним общим названием – ***«теорема Вильсона»***:

1) Если $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, то число p – простое.
2) Обратно, если число p – простое, то $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

3.28.* Докажите ***теорему Вильсона***.

3.29.* Найдите остаток от деления числа $98! \cdot 1904! + 1$ на 2003.

Ответ: 0.

3.30.* Докажите, что число $97! \cdot 1905! - 1$ делится на 2003.

3.31.* На доске написано число x. За каждый ход его можно заменить либо на число $2x+4$, либо на число $3x+8$, либо на число x^2+5x. Можно ли за несколько таких ходов из числа 3 получить число 2002?

Ответ: нет.

§ 4. Наибольший общий делитель

Напомним определение общего делителя и наибольшего общего делителя.

Определение. *Общим делителем* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{Z}$ называется число $d \in \boldsymbol{Z}$, являющееся делителем каждого из этих чисел. Общий делитель данных чисел называется их *наибольшим общим делителем*, если он делится на всякий общий делитель этих чисел.

Напомним также, что:

- Из определения наибольшего общего делителя вытекает важное свойство: если $d = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то множество всех общих делителей чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из всех делителей числа d.
- Если $d = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то $d = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0)$. Обратно, если $d = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0)$, то $d = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (поэтому при нахождении наибольшего делителя нескольких чисел, не все из которых равны нулю, нули можно не учитывать).
- Число 0 является наибольшим общим делителем чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ (в этом случае нуль является единственным наибольшим общим делителем данных чисел). В дальнейшем изложении будем ограничиваться случаем, когда все числа отличны от нуля.
- Если $d = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то число $(-d)$ также является наибольшим общим делителем чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности рассуждений, будем называть наибольшим общим делителем положительное число в этой паре чисел.
- Если $НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, то числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *взаимно простыми*.

Приступим к выяснению вопроса о существовании наибольшего общего делителя. С этой целью для любых двух чисел $a, b \in \boldsymbol{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, определим последовательность

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n$$

следующим образом.

Полагаем $c_1 = a$, $c_2 = b$. Если $b \mid a$, то последовательность состоит из двух членов $c_1 = a$, $c_2 = b$. Тогда $b = НОД(a, b)$.

Если $b \nmid a$, то c_3 является остатком при делении c_1 на c_2, c_4 – остатком при делении c_2 на c_3 и т.д. Это последовательное деление с остатком, запишем для удобства в виде цепочки равенств:

$$c_1 = c_2 q_2 + c_3,$$
$$c_2 = c_3 q_3 + c_4,$$
$$c_3 = c_4 q_4 + c_5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{n-2} = c_{n-1} q_{n-1} + c_n,$$
$$c_{n-1} = c_n q_n.$$

В результате деления с остатком получим: $|c_2| > c_3 > c_4 > \ldots$, причем эти остатки являются неотрицательными целыми числами. Поэтому среди получающихся остатков должен встретиться остаток, равный нулю.

В качестве c_n берется последний, отличный от нуля остаток, полученный в результате указанного процесса деления. В этом случае c_{n-1} делится на c_n.

Построенная последовательность $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n$ называется ***последовательностью Евклида*** для чисел a и b. Способ построения такой последовательности путем последовательного деления с остатком называется ***алгоритмом Евклида***.

Пример. Постройте последовательность Евклида для чисел (-78) и 24.
Решение. Выполним последовательное деление с остатком:

$$-78 = 24\cdot(-4) + 18,$$
$$24 = 18\cdot 1 + 6,$$
$$18 = 6\cdot 3.$$

Следовательно, (-78), 24, 18, 6 – искомая последовательность.

Теорема 6. В последовательности Евклида $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n$ $(n \geq 3)$, построенной для целых чисел a и b $(a \neq 0, b \neq 0)$, последний член является наибольшим общим делителем, т.е. $c_n = НОД(a, b)$.

Доказательство. Числа $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n$ связаны соотношениями деления с остатком, рассмотренными выше. Поднимаясь вверх по цепочке этих равенств, можно заметить: из соотношения $c_{n-1} = c_n q_n$ следует, что $c_n \mid c_{n-1}$; из соотношения $c_{n-2} = c_{n-1} q_{n-1} + c_n$ следует, что $c_n \mid c_{n-2}$; из соотношения $c_{n-3} = c_{n-2} q_{n-2} + c_{n-1}$ следует, что $c_n \mid c_{n-3}$. И так далее. Эти рассуждения через конечное число шагов приведут к тому, что $c_n \mid c_2$, $c_n \mid c_1$, где $c_1 = a$, $c_2 = b$. Таким образом, c_n – общий делитель чисел a и b.

Пусть теперь x – любой другой общий делитель чисел a и b. Покажем, что $x \mid c_n$. Действительно, спускаясь вниз по цепочке деления с остатком в алгоритме Евклида, можно заметить следующее. Из соотношения $c_1 = c_2 q_2 + c_3$, которое равносильно $c_3 = c_1 - c_2 q_2$, следует (учитывая $x \mid c_1$ и $x \mid c_2$), что $x \mid c_3$. Из соотношения $c_2 = c_3 q_3 + c_4$, которое равносильно $c_4 = c_2 - c_3 q_3$, следует (учитывая $x \mid c_3$ и $x \mid c_2$), что $x \mid c_4$. И так далее. Эти рассуждения через конечное число шагов приведут к тому, что из соотношения $c_{n-2} = c_{n-1} q_{n-1} + c_n$, которое равносильно $c_n = c_{n-2} - c_{n-1} q_{n-1}$, следует (учитывая $x \mid c_{n-2}$, $x \mid c_{n-1}$), что $x \mid c_n$. Таким образом, $c_n = НОД(a, b)$ ■

Пример. Найдите $НОД(42598, 2014)$.

Решение. Строим последовательность Евклида для данных чисел. Последовательные деления с остатком удобно проводить по следующей схеме:

```
_42598 |2014
 4028    21
 _2318
  2014
_2014 |304
 1824   6
_304 |190
 190   1
_190 |114
 114   1
_114 |76
  76   1
_76 |38
 76   2
  0
```

Получили: $38 = НОД(42598, 2014)$. **_Ответ:_** 38.

Следствие. Для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{Z}$ существует их наибольший общий делитель.

Доказательство. Индукция по n. При $n = 1$ утверждение очевидно: $a_1 = НОД(a_1)$. При $n = 2$ существование наибольшего общего делителя уже доказано построением последовательности Евклида.

Пусть $n > 2$. Покажем, что если $d' = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, $d = НОД(d', a_n)$, то $d = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$.

Действительно, согласно лемме 1: если $d \mid d'$ и $d' \mid a_1$, $d' \mid a_2$, ..., $d' \mid a_{n-1}$, то (учитывая $d \mid a_n$) d есть общий делитель $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Если теперь x – любой другой общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то, являясь общим делителем $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, число x оказывается делителем d'. Так как x – общий делитель чисел d' и a_n, то $x \mid d$ ■

Замечание. В доказательстве следствия указан способ нахождения наибольшего общего делителя нескольких чисел:

1) находится наибольший общий делитель двух любых чисел;
2) для полученного наибольшего общего делителя и третьего числа вновь находится наибольший общий делитель и так далее;
3) последнее полученное таким способом число и будет наибольшим общим делителем для всех данных чисел.

Пример. Найдите $НОД(91476, 3960, 3360)$.

Решение. Найдем вначале $НОД(91476, 3960)$:

$$\begin{array}{r|l} -91476 & \underline{3960} \\ \underline{7920} & 23 \\ -12276 & \\ \underline{11880} & \\ -3960 & \underline{396} \\ \underline{3960} & 10 \\ 0 & \end{array}$$

Следовательно, $НОД(91476, 3960) = 396$.

Найдем теперь $НОД(396, 3360)$:

$$\begin{array}{r|l} -3360 & \underline{396} \\ \underline{3168} & 8 \\ -396 & \underline{192} \\ \underline{384} & 2 \\ -192 & \underline{12} \\ \underline{12} & 16 \\ -72 & \\ \underline{72} & \\ 0 & \end{array}$$

Следовательно, $НОД(396, 3360) = 12$.

Ответ: $НОД(91476, 3960, 3360) = 12$.

Теорема 7. Пусть $d = НОД(a, b)$. Тогда существуют числа $u, v \in \boldsymbol{Z}$ такие, что $d = au + bv$.

Доказательство. Если одно из чисел a, b делится на другое (например, $b \mid a$), то $d = НОД(a, b) = b$. Следовательно, $d = a \cdot 0 + b \cdot 1$ и утверждение теоремы выполнено: $u = 0$, $v = 1$.

Пусть ни одно из чисел a и b не делится на другое. Тогда можно построить последовательность Евклида $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$ $(c_1 = a, c_2 = b)$, где $n > 2$:

$$c_1 = c_2 q_2 + c_3,$$
$$c_2 = c_3 q_3 + c_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{n-3} = c_{n-2} q_{n-2} + c_{n-1},$$

$$c_{n-2} = c_{n-1}q_{n-1} + c_n\,,$$
$$c_{n-1} = c_n q_n\,.$$

Из предпоследнего равенства получаем: $c_n = c_{n-2} - c_{n-1}q_{n-1}$. Далее, поднимаясь вверх по цепочке равенств, подставим $c_{n-1} = c_{n-3} - c_{n-2}q_{n-2}$ в выражение для c_n:
$$c_n = c_{n-2} - (c_{n-3} - c_{n-2}q_{n-2})\cdot q_{n-1} = c_{n-3}\cdot(-q_{n-1}) + c_{n-2}\cdot(1 + q_{n-1}q_{n-2})\,.$$

Вновь, поднимаясь вверх по цепочке равенств, подставим $c_{n-2} = c_{n-4} - c_{n-3}q_{n-3}$ в выражение для c_n:
$$c_n = c_{n-3}\cdot(-q_{n-1}) + (c_{n-4} - c_{n-3}q_{n-3})\cdot(1 + q_{n-1}q_{n-2})\,,$$
$$c_n = c_{n-4}\cdot(1 + q_{n-1}q_{n-2}) + c_{n-3}\cdot(-q_{n-1} - q_{n-3} - q_{n-1}q_{n-2}q_{n-3})\,.$$
И так далее, пока за конечное число шагов не дойдем до $c_1 = a$, $c_2 = b$. В итоге получим требуемое равенство: $d = au + bv$ ■

Пример. Найдите $d = НОД(a\,, b)$ и представьте его в виде $d = au + bv$, если $a = 174$, $b = -26$.

Решение. Для нахождения наибольшего общего делителя воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$174 = (-26)\cdot(-6) + 18,$$
$$-26 = 18\cdot(-2) + 10,$$
$$18 = 10\cdot 1 + 8,$$
$$10 = 8\cdot 1 + 2,$$
$$8 = 2\cdot 4.$$

Итак, $НОД(174\,, -26) = 2$. Для получения представления $d = au + bv$ пройдем по этой цепочке снизу вверх, начиная с предпоследнего равенства:

$$2 = 10 - 8\cdot 1 = 10 - (18 - 10\cdot 1) = -18 + 10\cdot 2 = -18 + 2\cdot(-26 - 18\cdot(-2)) =$$
$$= (-26)\cdot 2 + 18\cdot 3 = (-26)\cdot 2 + 3\cdot(174 - (-26)\cdot(-6)) = 174\cdot 3 + (-26)\cdot 20.$$

Ответ: $НОД(174\,, -26) = 2$; $2 = 174\cdot 3 + (-26)\cdot 20.$

Следствие. Пусть $d = НОД(a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n)$. Тогда существуют числа $u_1\,, u_2\,, \ldots, u_n \in \boldsymbol{Z}$ такие, что $d = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$.

Доказательство. Индукция по n.

При $n = 1$ утверждение очевидно: $d = a_1 \cdot 1$.

При $n = 2$ утверждение доказано выше.

Пусть $n > 2$ и утверждение верно для любых $n - 1$ целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Если $d = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то $d = НОД(d', a_n)$, где $d' = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Тогда $d' = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_{n-1}u_{n-1}$, $d = d'v + a_nu_n$. Поэтому

$$d = a_1 \cdot (u_1v) + a_2 \cdot (u_2v) + \ldots + a_{n-1} \cdot (u_{n-1}v) + a_nu_n \quad \blacksquare$$

Пример. Найдите $d = НОД(a_1, a_2, a_3)$ и представьте его в виде $d = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$, если $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 15$.

Решение. Находим $НОД(10, 12)$ и его выражение через 10 и 12:

$$12 = 10\cdot 1 + 2, \quad 10 = 2\cdot 5; \quad 2 = 12 - 10.$$

Находим $НОД(2, 15)$ и его выражение через 2 и 15:

$$15 = 2\cdot 7 + 1; \quad 1 = 15 - 2\cdot 7.$$

Окончательно получаем:

$$1 = 15 - (12 - 10)\cdot 7 = 10\cdot 7 + 12\cdot(-7) + 15\cdot 1.$$

Ответ: $НОД(10, 12, 15) = 1$; $1 = 10\cdot 7 + 12\cdot(-7) + 15\cdot 1$.

Замечание. Для взаимной простоты данных чисел достаточно, чтобы по крайней мере два из них оказались взаимно простыми. Обратное не верно, что подтверждает последний пример: числа 10, 12, 15 взаимно просты, но никакие два из них не являются взаимно простыми.

Замечание. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{Z}$ взаимно просты тогда и только тогда, когда $1 = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$ для некоторых чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \boldsymbol{Z}$.

Действительно, если единица представлена в указанном виде и x – общий делитель данных чисел, то $x \mid 1$, т.е. $x = \pm 1$. Справедливость обратного утверждения вытекает из следствия к теореме 7.

Пример. При любом $a \in \boldsymbol{N}$ числа $a + 4$, $2a + 5$, $3a + 10$ взаимно просты, т.к. $1 = (a + 4)\cdot(-1) + (2a + 5)\cdot(-1) + (3a + 10)\cdot 1$.

Упражнения

4.1. Найдите с помощью алгоритма Евклида наибольший общий делитель чисел:

1) 645 и 381; 2) 846 и 246; 3) 15283 и 10013;
4) 6188 и 4709; 5) 4005 и 2581.

Ответ: 1) 3; 2) 6; 3) 527; 4) 17; 5) 89.

4.2.* Найдите $d = НОД(a, b)$ и представьте его в виде $d = au + bv$, если:

1) $a = 321$, $b = 843$; 2) $a = 852$, $b = 822$;
3) $a = 23521$, $b = 75217$; 4) $a = 867$, $b = 391$;
5) $a = 945$, $b = 307$.

4.3.* Сократите дробь:

1) $\dfrac{21120}{30720}$; 2) $\dfrac{9061}{10127}$; 3) $\dfrac{377}{261}$; 4) $\dfrac{4853}{5697}$.

4.4.* Докажите, что:

1) $НОД(a, b) = НОД(a, a+b)$;
2) $НОД(a, b) = НОД(a, a-b)$.

4.5.* Докажите, что если целые числа a и b взаимно просты, то их сумма $a+b$ и произведение ab также являются взаимно простыми числами.

4.6.* Докажите, что если числа a и b являются взаимно простыми, то $НОД(a+b, a-b)$ равен либо 1, либо 2. Приведите пример таких взаимно простых чисел a и b, что $НОД(a+b, a-b) = 2$.

4.7.* Докажите, что если числа a и b являются взаимно простыми, то $НОД(a+b, a^2 - ab + b^2)$ равен либо 1, либо 3. Приведите пример таких взаимно простых чисел a и b, что $НОД(a+b, a^2 - ab + b^2) = 3$.

4.8.* Докажите, что

$$НОД(a, b) = НОД(5a + 3b, 13a + 8b).$$

4.9. Докажите, что для всякого целого n числа $n+3$ и $3n+8$ взаимно просты.

4.10. Числа a и b взаимно просты. Докажите, что найдется такое целое n, что $an + 2003$ делится на b.

4.11. Докажите, что если $НОД(a, b) = 1$ и a_1, b_1 – делители чисел a и b соответственно, то $НОД(a_1, b_1) = 1$.

4.12.* Докажите, что если числа a и b взаимно просты, то

$$НОД(ac, b) = НОД(c, b).$$

4.13. Докажите, что $НОД(ac, bc) = c \cdot НОД(a, b)$.

4.14. Докажите, что для любых целых чисел a, b и c

$$НОД(a + bc, a + b \cdot (c - 1)) = НОД(a, b).$$

4.15.* Докажите, что если числа a и b взаимно просты, то $НОД(11a + 2b, 18a + 5b)$ равен либо 1, либо 19.

4.16. Числа m и n взаимно просты. Какие значения может принимать

1) $НОД(5m + n, 7m + 3n)$; 2) $НОД(m + n, m^2 + n^2)$?

Ответ: 1)1, 2, 4 или 8; 2) 1 или 2.

4.17. Найдите наибольший общий делитель чисел:

1) $5n^2 + 2$ и $n - 3$; 2)* $3n^2 - 5$ и $4n - 1$;

3) $4n^2 - 1$ и $5n + 1$; 4) $8n^2 - 7$ и $3n - 1$.

Ответ: 1) 1 или 47; 2) 1, 7, 11 или 77; 3) 1, 3, 7 или 21; 4) 1, 5, 11 или 55.

4.18.* Докажите, что при любом $n \in \boldsymbol{N}$ числа $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ и $2n + 1$ взаимно просты.

4.19.* Предположим, что $НОД(a, b) = НОД(c, d) = 1$ и сумма $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ является целым числом. Докажите, что $b = \pm d$.

4.20.* Используя результат задачи 4.19, докажите, что для всякого натурального $n > 1$ сумма $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ не является целым числом.

4.21.* Известно, что дробь a/b – несократима. Докажите, что дробь $\dfrac{2a+b}{5a+3b}$ также несократима.

4.22.* Докажите, что дробь является несократимой для всех $n \in \boldsymbol{N}$:

$$1)\ \frac{2n^2-1}{2n+1}; \qquad 2)\ \frac{n^2+n-1}{n^2+2n}.$$

4.23. Докажите, что следующие дроби несократимы ни при каком n:

$$1)\ \frac{2n^2-1}{n+1}; \qquad 2)\ \frac{n^2-n+1}{n^2+1}; \qquad 3)\ \frac{14n+3}{21n+4}.$$

4.24.* Найдите наибольший общий делитель:

1) двух последовательных нечетных чисел;
2) двух последовательных четных чисел.

Ответ: 1) 1; 2) 2.

4.25. При каких n сократимы дроби:

$$1)\ \frac{n^2+2n+4}{n^2+n+3}; \qquad 2)\ \frac{n^3-n^2-3n}{n^2-n+3}; \qquad 3)\ \frac{22n+3}{26n+4}?$$

Ответ: 1) $n=3k+2$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $n=3k$, $n=3k+1$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $n=5k+1$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4.26. Найдите все числа, на которые может быть сократима дробь $\dfrac{5n+6}{8n+7}$ при целых значениях n.

Ответ: на 13.

4.27. При каких натуральных n дробь $\dfrac{2n+1}{n^2-1}$ несократима?

Ответ: $n=3k$, $n=3k+2$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4.28.* Найдите все такие натуральные числа a и b, где $a \le b$, что $a+b=432$ и $НОД(a,b)=36$.

Ответ: $a=36$, $b=396$ или $a=180$, $b=252$.

4.29. Найдите все такие натуральные числа a и b, где $a \le b$, что $ab = 864$ и $НОД(a, b) = 6$.

Ответ: $a = 6$, $b = 144$ или $a = 18$, $b = 48$.

4.30. Нечетные числа a и b таковы, что $a - b = 64$. Найдите $НОД(a, b)$.

Ответ: 1.

4.31. Пусть a и n – натуральные числа, причем a четно. Докажите, что $a + 1$ и $a^{2n} + 1$ взаимно просты.

4.32.* Найдите $НОД(2^n - 1, 2^m - 1)$.

Ответ: $2^d - 1$, где $d = НОД(n, m)$.

4.33. Последовательность $\{x_n\}$ задана равенствами $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$. Докажите, что любые два члена этой последовательности взаимно просты.

4.34.* Играют двое. В начале игры на доске записаны два натуральных числа. Играющие по очереди записывают новые натуральные числа, являющиеся разностью любых двух из уже написанных чисел. Игра прекращается, если такого числа не существует. Покажите, что игра завершится в любом случае. Чему равно наименьшее записанное после окончания игры число?

Ответ: $НОД(a, b)$.

4.35. Докажите, что из пяти последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно, взаимно простое со всеми остальными.

4.36. Найдите натуральные числа n, для которых $(НОД(n, 4))^2 = n$.

Ответ: $n = 1$, $n = 16$.

§ 5. Наименьшее общее кратное

Определение. Целое число, которое делится на каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{Z}$, называется *общим кратным* этих чисел. Общее кратное этих чисел называется *наименьшим общим кратным*, если оно является делителем всякого общего кратного данных чисел.

Для обозначения наименьшего общего кратного будем использовать запись:

$$h = НОК(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Замечание. Число 0 является наименьшим общим кратным чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тогда и только тогда, когда одно из этих чисел равно 0.

Учитывая последнее замечание, будем считать в дальнейшем, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (для которых рассматривается вопрос о существовании наименьшего общего кратного и его свойствах) нет ни одного, равного 0.

Замечание. Очевидно, что если $h = НОК(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то число $(-h)$ также является наименьшим общим кратным чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности рассуждений, будем называть наименьшим общим кратным положительное число в этой паре чисел.

Теорема 8. Если $d = НОД(a, b)$, $d \neq 0$, то

$$h = НОК(a, b) = \frac{a \cdot b}{d}.$$

Доказательство. Данное число h является общим кратным для a и b, т.к. $h = a \cdot \dfrac{b}{d}$ и $h = b \cdot \dfrac{a}{d}$.

Пусть x – любое другое общее кратное для a и b, т.е. $x = au$, $x = bv$ $(u, v \in \boldsymbol{Z})$. Имея $au = bv$ и сократив на d, получим $\frac{a}{d} \cdot u = \frac{b}{d} \cdot v$. Числа $\frac{a}{d}$ и $\frac{b}{d}$ взаимно просты. Поэтому $\left.\frac{b}{d}\,\right|\, u$, т.е. $u = \frac{b}{d} \cdot t$, $t \in \boldsymbol{Z}$. Получаем: $x = au = a \cdot \frac{b}{d} \cdot t = \frac{ab}{d} \cdot t$. Таким образом, $\left.\frac{ab}{d}\,\right|\, x$, а значит, $h \mid x$ ■

Следствие. Для любых ненулевых целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует их наименьшее общее кратное.

Доказательство. Индукция по n.

При $n = 1$ утверждение очевидно: $a_1 = НОК(a_1)$.

При $n = 2$ существование наименьшего общего кратного уже доказано в предыдущей теореме 8.

Пусть $n > 2$. Покажем, что если $h' = НОК(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, $h = НОК(h', a_n)$, то $h = НОК(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$. Действительно, благодаря $a_1 \mid h'$, $a_2 \mid h'$, … , $a_{n-1} \mid h'$ и $h' \mid h$, то h есть общее кратное $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Если теперь x – любое другое общее кратное чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то, являясь общим кратным $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, число x будет делиться на h'. Так как x – общее кратное чисел h' и a_n, то $h \mid x$ ■

Замечание. В доказательстве следствия указан способ нахождения наименьшего общего кратного нескольких чисел:

1) находится наименьшее общее кратное двух любых чисел;
2) для полученного наименьшего общего кратного и третьего числа вновь находится наименьшее общее кратное и так далее;
3) последнее полученное таким способом число и будет наименьшим общим кратным для всех данных чисел.

Пример. Найдите $НОК(462, 252, 91)$.

Решение. Найдем вначале $НОК(462, 252)$, для этого найдем $НОД(462, 252)$:

$$462 = 252 \cdot 1 + 210,$$
$$252 = 210 \cdot 1 + 42,$$
$$210 = 42 \cdot 5.$$

Следовательно, $НОД(462, 252) = 42$, а значит,

$$НОК(462, 252) = \frac{462 \cdot 252}{42} = 2772.$$

Найдем теперь $НОК(2772, 91)$:

$$2772 = 91 \cdot 30 + 42,$$
$$91 = 42 \cdot 2 + 7,$$
$$42 = 7 \cdot 6.$$

Следовательно, $НОД(2772, 91) = 7$, а значит,

$$НОК(2772, 91) = \frac{2772 \cdot 91}{7} = 36036.$$

Итак, $НОК(462, 252, 91) = 36036$.

Ответ: $НОК(462, 252, 91) = 36036$.

Упражнения

5.1. Найдите наименьшее общее кратное чисел:

1) 645 и 381; 2) 846 и 246; 3) 5338 и 11618.

Ответ: 1) 81915; 2) 34686; 3) 197506.

5.2.* Приведите к общему знаменателю дроби

$$\frac{111}{21120} \text{ и } \frac{1237}{30720}.$$

Ответ: $\frac{1776}{337920}$ и $\frac{13607}{337920}$.

5.3.* Сложите дроби $\frac{7}{192}$ и $\frac{187}{1620}$.

Ответ: $\frac{3937}{25920}$.

5.4.* Найдите наименьшее натуральное число, бóльшее двух и дающее при делении на $2, 3, 4, 5, 6$ остаток, равный 1.

Ответ: 61.

5.5. Для каких двух различных натуральных чисел в пределах от 1 до 1000 их наименьшее общее кратное является наибольшим из всех возможных?

Ответ: 999 и 1000.

5.6. Натуральное число при делении на $2, 3, 4, 5, 6$ и 7 дает в остатке соответственно $1, 2, 3, 4, 5$ и 6. Найдите:

1) наименьшее такое число;
2) общий вид таких чисел.

Ответ: 1) 419; 2) $420n-1$ ($n \in \boldsymbol{N}$).

5.7. Натуральное число при делении на 4, 5 и 6 дает в остатке соответственно 3, 4 и 5, а на 7 делится без остатка. Найдите:

3) наименьшее такое число;
4) общий вид таких чисел.

Ответ: 1) 119 ; 2) $420n+119$ ($n \in \boldsymbol{N}_0$).

5.8. Найдите наименьшее общее кратное натуральных чисел n и $n+3$.

Ответ: $n(n+3)$, если n не делится на 3;

$\frac{1}{3}n(n+3)$, если n делится на 3.

5.9.* Чему может быть равно наименьшее общее кратное трех чисел n, $n+1$, $n+2$ (где $n \in \boldsymbol{N}$)?

5.10. Чему может быть равно наименьшее общее кратное четырех чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ (где $n \in \boldsymbol{N}$)?

Ответ: $0.5n(n+1)(n+2)(n+3)$, если n не делится на 3;

$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)$, если n делится на 3.

5.11. Среди первых ста натуральных чисел найдите три различных числа, наименьшее общее кратное которых – наибольшее из всех возможных?

Ответ: 97, 99 и 100.

5.12. Три теплохода заходят в порт после каждого рейса. Первый теплоход совершает рейс за 4 дня, второй – за 6, третий – за 9. однажды они встретились в порту все вместе. Через какое наименьшее число дней они снова встретятся в порту все вместе?

Ответ: через 36 дней.

5.13. На гранях кубиков нужно написать буквы русского алфавита, по одной на каждой грани. Какое наименьшее число кубиков нужно взять для того, чтобы все 33 буквы алфавита были написаны одинаковое количество раз и все грани кубиков были заполнены?

Ответ: 11.

5.14. Отец и сын шли по занесенной снегом дороге друг за другом. Длина шага отца – 80 см, сына – 60 см. Их шаги совпали 601 раз, в том числе в самом начале и в конце пути. Какое расстояние они прошли?

Ответ: 1 км 440 м.

5.15. Два школьника вышли одновременно из пункта A в пункт B и отправились друг за другом по занесенной снегом тропинке. Шаг одного из них равен 75 см, другого – 65 см. В первый раз их шаги совпали через 18 секунд после начала движения, а после 10 минут движения их шаги совпали впервые в пункте B. Найдите расстояние AB.

Ответ: $331{,}5$ м.

5.16.* Докажите, что наименьшее общее кратное натуральных чисел $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$ совпадает с наименьшим общим кратным чисел $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

5.17.* Найдите натуральные числа a и b, если известно, что они не делятся друг на друга и $НОД(a, b) = 6$, $НОК(a, b) = 90$.

Ответ: 18 и 30 или 30 и 18.

5.18. Найдите все такие натуральные числа a и b, где $a \le b$, что $НОК(a, b) = 840$ и $НОД(a, b) = 15$.

Ответ: $a = 15$, $b = 840$ или $a = 105$, $b = 120$.

5.19. Найдите два натуральных числа, зная, что их разность равна 66, а наименьшее общее кратное равно 360.

Ответ: 90 и 24.

§ 6. Каноническое разложение натуральных чисел

Канонические разложения натуральных чисел удобно использовать для выяснения соотношений делимости. Добавляя при необходимости сомножители с нулевыми показателями степени в канонические разложения, всегда можно конечное число любых натуральных чисел представить в виде произведения одних и тех же различных простых чисел с целыми неотрицательными показателями степени.

Пример. Представьте в виде произведения одних и тех же различных простых чисел с целыми неотрицательными показателями степени следующие числа: $a = 2^5 \cdot 5 \cdot 13^3$, $b = 3^2 \cdot 7^4$, $c = 5^3 \cdot 17^2$.

Решение.

$$a = 2^5 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 13^3 \cdot 17^0,$$
$$b = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^4 \cdot 13^0 \cdot 17^0,$$
$$c = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^3 \cdot 7^0 \cdot 13^0 \cdot 17^2.$$

Теорема 9. Пусть даны натуральные числа:

$$m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}, \ n = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{l_s},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – различные простые числа, а показатели степени k_i и l_i – целые неотрицательные. Для того, чтобы число m делилось на число n, необходимо и достаточно, чтобы $k_i \geq l_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Если $m = nx$, где $x \in \boldsymbol{N}$, то всякий простой делитель числа x является одним из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Поэтому x может быть представлено в виде $x = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{t_s}$, где $t_i \geq 0$.

Следовательно, $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s} = p_1^{l_1+t_1} \cdot p_2^{l_2+t_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{l_s+t_s}$.

Благодаря единственности разложения натурального числа на простые множители имеем $k_i = l_i + t_i$, а значит, $k_i \geq l_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$.

⇦ Если $k_i \geq l_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, s$, то для натурального числа

$$x = p_1^{k_1 - l_1} \cdot p_2^{k_2 - l_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s - l_s},$$

очевидно, имеет место равенство $m = nx$ ■

Следствие 1. Пусть натуральное число m представлено в каноническом виде:

$$m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}.$$

Тогда все натуральные делители m представляют собой всевозможные числа вида:

$$p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{l_s},$$

где $0 \leq l_i \leq k_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, s$. При этом всякий натуральный делитель числа m однозначно задается выражением указанного вида.

Пример. Число $82280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 17$ делится на число $170 = 2 \cdot 5 \cdot 17$. Частное от деления 82280 на 170 равно $2^2 \cdot 11^2 = 484$.

Условие делимости, доказанное в предыдущей теореме 9, дает новый способ нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного нескольких чисел. При этом достаточно рассматривать лишь натуральные числа.

Следствие 2. Пусть натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_r$ представлены в каноническом виде:

$$m_1 = p_1^{k_{11}} \cdot p_2^{k_{12}} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_{1s}},$$

$$m_2 = p_1^{k_{21}} \cdot p_2^{k_{22}} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_{2s}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_r = p_1^{k_{r1}} \cdot p_2^{k_{r2}} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_{rs}},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – различные простые числа, а показатели степени – целые неотрицательные. Тогда:

1) $НОД(m_1, m_2, \dots, m_r) = p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{u_s}$,

где $u_i = \min\{k_{1i}, k_{2i}, \ldots, k_{ri}\}$ для $i = 1, 2, \ldots, s$.

2) $НОК(m_1, m_2, \dots, m_r) = p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{v_s}$,

где $v_i = \max\{k_{1i}, k_{2i}, \ldots, k_{ri}\}$ для $i = 1, 2, \ldots, s$.

В частности, числа $m_1, m_2, \dots, m_r$ взаимно просты тогда и только тогда, когда при любом $i = 1, 2, \ldots, s$ одно из чисел $k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{ri}$ равно нулю, т.е. когда у данных чисел $m_1, m_2, \dots, m_r$ нет общих простых делителей.

Пример. Найдите $НОД(91476, 3960, 3360)$, используя канонические разложения данных чисел.

Решение. Находим канонические разложения:

91476	2	3960	2	3360	2
45738	2	1980	2	1680	2
22869	3	990	2	840	2
7623	3	495	3	420	2
2541	3	165	3	210	2
847	7	55	5	105	3
121	11	11	11	35	5
11	11	1		7	7
1				1	

$91476 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11^2$, $3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, $3360 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Следовательно,

$НОД(91476, 3960, 3360) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 = 12$. ***Ответ:*** 12.

Пример. Найдите $НОК(462, 252, 91)$, используя канонические разложения данных чисел.

Решение. Находим канонические разложения:

462	2	252	2	91	7
231	3	126	2	13	13
77	7	63	3	1	
11	11	21	3		
1		7	7		
		1			

$462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $91 = 7 \cdot 13$.

Следовательно,

$$НОК(462, 252, 91) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 = 36036.$$

Ответ: 36036.

Покажем теперь, что для любых натуральных чисел $m_1, m_2, \ldots, m_r$ $(r \ge 2)$ имеет место делимость произведения $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r$ на произведение

$$НОД(m_1, m_2, \ldots, m_r) \cdot НОК(m_1, m_2, \ldots, m_r),$$

и поэтому

$$НОД(m_1, m_2, \ldots, m_r) \cdot НОК(m_1, m_2, \ldots, m_r) \le m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r.$$

Действительно, представим числа $m_1, m_2, \ldots, m_r$ в каноническом виде:

$$m_1 = p_1^{k_{11}} \cdot p_2^{k_{12}} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_{1s}},$$

$$m_2 = p_1^{k_{21}} \cdot p_2^{k_{22}} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_{2s}},$$

…………………………………...

$$m_r = p_1^{k_{r1}} \cdot p_2^{k_{r2}} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_{rs}},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – различные простые числа, а показатели степени – целые неотрицательные. Справедливость данного утверждения следует из того, что сумма наибольшего и наименьшего из показателей степеней каждого простого множителя в разложениях данных чисел не превосходит суммы всех показателей степеней этого простого множителя.

Заметим, что при $r = 2$ получается равенство этих чисел, т.е. другим способом доказана справедливость известного соотношения:

$$НОД(m_1, m_2) \cdot НОК(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2.$$

Легко видеть, что при $r > 2$ можно получить строгое неравенство. Например,

$$НОД(2, 3, 6) \cdot НОК(2, 3, 6) = 1 \cdot 6 = 6 < 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36.$$

Тем самым показано, что результат

$$НОД(m_1, m_2) \cdot НОК(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2$$

не может быть обобщен на бóльшее, чем два, количество чисел.

Рассмотрим теперь некоторые другие приложения основной теоремы арифметики. Для любого натурального n обозначим через $\tau(n)$ количество всех натуральных делителей n, а через $\sigma(n)$ – их сумму. Таким образом, $\tau(n)=\sum\limits_{d|n} 1$, $\sigma(n)=\sum\limits_{d|n} d$.

Теорема 10. Пусть число n задано в канонической форме: $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$. Тогда

$$\tau(n)=\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1),\quad \sigma(n)=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}.$$

Доказательство. Каждый натуральный делитель n единственным образом представляется в виде $p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$, где $\beta_i\le\alpha_i$ для всех $i=1,2,\ldots,k$. Поэтому число натуральных делителей n равно количеству всевозможных наборов $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)$. Поскольку каждое β_i может принимать α_i+1 различных значений от 0 до α_i, то число таких наборов равно

$$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1).$$

Таким образом, формула для $\tau(n)$ доказана.

Для доказательства второй формулы заметим, что $\dfrac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$ можно записать как сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем p_i:

$$\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}=1+p_i+\ldots+p_i^{\alpha_i}=\sum_{\beta_i=0}^{\alpha_i}p_i^{\beta_i}.$$

Следовательно, раскрывая скобки, получим

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}=\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}p_1^{\beta_1}\cdot\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2}p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k}p_k^{\beta_k}=\sum_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k}p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}.$$

Последняя сумма в этой формуле есть сумма всех натуральных делителей n, т.е. $\sigma(n)$ ■

Пример. Найдите число и сумму натуральных делителей 180.

Решение. Каноническое разложение имеет вид $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Следовательно,

$$\tau(180) = (2+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 18,$$

$$\sigma(180) = \frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{3^3-1}{3-1}\cdot\frac{5^2-1}{5-1} = 546.$$

Пример. Найдите число вида $2^l 3^m$, если известно, что сумма всех его натуральных делителей равна 403.

Решение. Очевидно, что показатели l и m не могут быть одновременно равными 0. Если $l=0$, то каноническая запись числа $2^l 3^m$ имеет вид 3^m и, применяя формулу суммы всех натуральных делителей, получаем равенство $3^{m+1}-1 = 2\cdot 403$. Отсюда $3^{m+1} = 807$, или $3^{m+1} = 3\cdot 269$. Последнее уравнение не имеет решений при целых m, т.к. число 269 простое. Если $m=0$, то каноническая запись числа $2^l 3^m$ имеет вид 2^l и потому $2^{l+1}-1 = 403$, что также невозможно.

Таким образом, $l>0$, $m>0$ и $2^l 3^m$ – каноническая запись исходного числа. По формуле суммы всех натуральных делителей получаем равенство $(2^{l+1}-1)\cdot(3^{m+1}-1) = 2\cdot 403$, или $(2^{l+1}-1)\cdot(3^{m+1}-1) = 2\cdot 13\cdot 31$ (где, отметим, 2, 13 и 31 – простые числа). Так как $2^{l+1}-1>1$ и $3^{m+1}-1>1$, то разложение на простые множители $2\cdot 13\cdot 31$ произведения этих чисел должно составляться из соответствующих разложений сомножителей. Поскольку число $2^{l+1}-1$ нечетно и равенства $2^{l+1}-1=13$ и $2^{l+1}-1=13\cdot 31$ невозможны при целых значениях l, имеем $2^{l+1}-1=31$ и $3^{m+1}-1=26$. Отсюда $l=4$ и $m=2$, а значит, искомое число есть $2^4\cdot 3^2 = 144$.

Ответ: $2^4\cdot 3^2 = 144$.

При рассмотрении числовых функций важным является следующее свойство.

Определение. Числовая функция $f(n)$ называется ***мультипликативной***, если для любых взаимно простых чисел a и b выполняется равенство

$$f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b).$$

Пример. Докажем, что функции $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ являются мультипликативными.

Решение. Для любых взаимно простых натуральных чисел a и b их канонические разложения имеют вид

$$a=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s},\ b=q_1^{l_1}\cdot q_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot q_r^{l_r},$$

где ни одно из простых чисел p_i не совпадает ни с одним из простых чисел q_j. В этом случае каноническое разложение произведения ab имеет вид

$$ab=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}\cdot q_1^{l_1}\cdot q_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot q_r^{l_r}.$$

Согласно теореме 10 получаем:

$$\tau(ab)=(k_1+1)\cdot\ldots\cdot(k_s+1)\cdot(l_1+1)\cdot\ldots(l_r+1)=\tau(a)\cdot\tau(b),$$

$$\sigma(ab)=\frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_s^{k_s+1}-1}{p_s-1}\cdot\frac{q_1^{l_1+1}-1}{q_1-1}\cdot\ldots\cdot\frac{q_r^{l_r+1}-1}{q_r-1}=\sigma(a)\cdot\sigma(b).$$

С суммой делителей натурального числа связано одно интересное понятие.

Определение. Натуральные числа a, для которых $\sigma(a)=2a$, называются ***совершенными***.

Иначе говоря, число a совершенно, если сумма его собственных (т.е. не равных a) натуральных делителей равна a.

Понятие совершенного числа появилось в математике Древней Греции. Древние греки знали четыре совершенных числа: 6, 28, 496 и 8128. В действительности, четные совершенные числа можно описать следующим образом.

Теорема 11 ***(Евклид – Эйлер (1707–1783)).*** Натуральное четное число a является совершенным тогда и только тогда, когда оно имеет вид $a = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ для некоторого натурального числа $k \geq 2$ такого, что число $2^k - 1$ является простым.

Доказательство. ⇦ Пусть число a имеет вид $a = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$, где $k \geq 2$ и $2^k - 1$ – простое число. Так как числа 2^{k-1} и $2^k - 1$ взаимно просты (Докажите самостоятельно!), то $\sigma(a) = \sigma(2^{k-1}) \cdot \sigma(2^k - 1)$. По формуле суммы натуральных делителей $\sigma(2^{k-1}) = 2^k - 1$, а так как число $2^k - 1$ простое, то $\sigma(2^k - 1) = 1 + (2^k - 1) = 2^k$. Таким образом, $\sigma(a) = (2^k - 1) \cdot 2^k = 2a$, т.е. число a является совершенным ■

⇨ Предположим, что натуральное четное число a является совершенным, т.е. $\sigma(a) = 2a$. Пусть n – наибольшее целое число такое, что $2^n \mid a$. Тогда $a = 2^n \cdot b$ для некоторого нечетного числа b. Заметим, что поскольку число a является четным, $n \geq 1$, и потому, полагая $k = n + 1$, получаем представление числа a в виде $a = 2^{k-1} \cdot b$, где $k \geq 2$. Поскольку число b нечетно, имеем $НОД(2^{k-1}, b) = 1$, откуда, ввиду мультипликативности функции $\sigma(x)$, получаем $\sigma(a) = \sigma(2^{k-1}) \cdot \sigma(b)$. Так как $\sigma(a) = 2a = 2^k \cdot b$ и $\sigma(2^{k-1}) = 2^k - 1$, это равенство принимает вид $2^k \cdot b = (2^k - 1) \cdot \sigma(b)$. Отсюда, в частности, следует, что $2^k \cdot b$ делится на $2^k - 1$, и, т.к. числа $2^k \cdot b$ и $2^k - 1$ взаимно просты, число b делится на $2^k - 1$. Поэтому для некоторого натурального числа c имеет место равенство $b = (2^k - 1) \cdot c$. Подставляя вместо b это его выражение в равенство $2^k \cdot b = (2^k - 1) \cdot \sigma(b)$, после очевидного сокращения получаем $\sigma(b) = 2^k \cdot c$, откуда $\sigma(b) = (2^k - 1) \cdot c + c = b + c$.

Покажем, что $c = 1$. Действительно, если бы выполнялось неравенство $c > 1$, то, ввиду очевидного неравенства $c < b$, числа b, c и 1 были бы попарно различными делителями числа b, и потому должно было бы иметь место неравенство $\sigma(b) \geq b + c + 1$, противоречащее равенству $\sigma(b) = b + c$.

Итак, мы показали, что $b = 2^k - 1$ и $\sigma(b) = 2^k$. Отсюда следует, что число b является простым. Действительно, в противном случае должно существовать такое натуральное число d, что числа b, d и 1 являются попарно различными делителями числа b, откуда $\sigma(b) \geq b + d + 1 = 2^k + d > 2^k = \sigma(b)$, что невозможно.

Таким образом, $a = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$, где $k \geq 2$ и $2^k - 1$ – простое число ■

Евклид в своих «Началах» доказал, что любое число указанного в формулировке теоремы 11 вида является совершенным, а Эйлер, спустя 2000 лет показал, что других четных совершенных чисел нет. Следует отметить, что до сих пор неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа. Неизвестно также, является ли множество всех четных совершенных чисел конечным или бесконечным. Ответ на этот вопрос явился бы, разумеется, и ответом на вопрос, является ли конечным или бесконечным множество простых чисел вида $2^k - 1$, и наоборот.

Нетрудно видеть, что если число $2^k - 1$ является простым, то простым должно быть и число k. Действительно, если число k составное и $k = mn$, где $m > 1$ и $n > 1$ – некоторые целые числа, то равенство

$$2^k - 1 = (2^m)^n - 1 = (2^m - 1) \cdot (2^{m \cdot (n-1)} + 2^{m \cdot (n-2)} + \ldots + 2^m + 1)$$

показывает, что и число $2^k - 1$ будет составным. Тем не менее обратное не имеет места. Хотя при $k = 2, 3, 5, 7$ число $2^k - 1$ является простым (и дает четные совершенные числа, перечисленные выше), уже при $k = 11$ число $2^k - 1$ является составным.

Простые числа вида $2^k - 1$ называются *простыми числами Мерсенна(1588-1648)* по имени французского математика Мерсенна, жившего в одно время с *Ферма (1601–1665)* и интересовавшегося этими числами. Долгое время наибольшим известным простым числом Мерсенна являлось число $2^{31}-1$, его простота была установлена Эйлером. В настоящее время список известных простых чисел Мерсенна значительно расширен благодаря возросшим возможностям вычислительной техники. Вопрос о конечности или бесконечности множества таких чисел остается открытым.

В заключение следует упомянуть и о *простых числах Ферма*. Это числа вида 2^k+1. Легко заметить, что если такое число является простым, то k должно быть степенью числа 2. Действительно, если у числа k есть нечетный делитель, бóльший единицы, т.е. для некоторых натуральных чисел m и t имеет место равенство $k=(2m+1)\cdot t$, то ввиду равенства

$$2^k+1=(2^t)^{2m+1}+1=(2^t+1)\cdot(2^{t(2m)}-2^{t(2m-1)}+2^{t(2m-2)}-\ldots+2^{2t}-2^t+1)$$

число 2^t+1 является делителем числа 2^k+1. К тому же из очевидного неравенства $1\le t<k$ следует неравенство $1<2^t+1<2^k+1$, а значит, число 2^k+1 не является простым. Ферма предполагал, что это почти очевидное необходимое условие является и достаточным, т.е. все числа вида $2^{2^n}+1$, где $n\ge 0$, являются простыми. При $n=0,1,2,3,4$ действительно получаются простые числа $3,5,17,257,65537$ соответственно. Однако, как показал Эйлер, при $n=5$ получается составное число. Таким образом, предположение Ферма оказалось ошибочным.

Упражнения

6.1.* Запишите в каноническом виде разложение числа a на простые множители, если:

1) $a = 1000000$; 2) $a = 28350$; 3) $a = 1858560$.

6.2.* Найдите каноническое разложение числа a на простые множители, если:

1) $a = 92\,772\,757$; 2) $a = 82\,798\,848$; 3) $a = 64\,984\,829$;

4) $a = 97\,363\,981$; 5) $a = 29\,520\,491$.

6.3.* Найдите в каноническом виде наибольший общий делитель d и наименьшее общее кратное h чисел a и b, если:

1) $a = 72$, $b = 135$;

2) $a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 13^3 \cdot 101$, $b = 3^5 \cdot 13 \cdot 101^2 \cdot 113$;

3) $a = 7 \cdot 11^3 \cdot 19^2 \cdot 29^4$, $b = 2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^3 \cdot 23$.

6.4. Используя основную теорему арифметики, докажите, что

$$НОД(ac, bc) = c \cdot НОД(a, b).$$

6.5.* Найдите такие цифры a и b, что число $\overline{ab} + \overline{ba}$ является полным квадратом некоторого натурального числа.

Ответ: $(2;9)$, $(3;8)$, $(4;7)$, $(5;6)$, $(6;5)$, $(7;4)$, $(8;3)$, $(9;2)$.

6.6.* Решите в целых числах уравнение $x^3 - y^3 = 91$.

Ответ: $(6;5)$, $(-5;-6)$, $(4;-3)$, $(3;-4)$.

6.7. Найдите все пары натуральных взаимно простых чисел, ме́ньших 225, наименьшее общее кратное которых равно 225.

Ответ: 9 и 25.

6.8. Произведение двух натуральных чисел равно 600. Какое максимальное значение может принимать их наибольший общий делитель?

Ответ: 10.

6.9. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 720, \\ НОД(x, y) = 4. \end{cases}$$

Ответ: $(180;4)$, $(4;180)$, $(36;20)$, $(20;36)$.

6.10. Найдите натуральные числа a и b, если $a \le b$ и $НОД(a,b)=15$, $НОК(a,b)=420$.

Ответ: 15 и 420; 60 и 105.

6.11. Найдите все пары натуральных чисел, если их сумма равна 60, а наименьшее общее кратное равно 72.

Ответ: 24 и 36.

6.12. Найдите все пары натуральных чисел, отношение которых равно $5/7$, а наименьшее общее кратное равно 140.

Ответ: 20 и 28.

6.13. Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых равно 40, а наименьшее общее кратное равно 20.

Ответ: 2 и 20 или 4 и 10.

6.14.* Найдите все пары натуральных чисел, разность которых равна 60, а наименьшее общее кратное равно 288.

Ответ: 96 и 36.

6.15. Найдите все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 24, а наименьшее общее кратное равно 360.

Ответ: 24 и 360 или 72 и 120.

6.16. Найдите все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 54, а наименьшее общее кратное равно 324.

Ответ: 54 и 324 или 108 и 162.

6.17. Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $21/25$ и $14/15$ получаются натуральные числа.

Ответ: $42/5$.

6.18. Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $35/66$, $28/165$ и $25/231$ получаются натуральные числа.

Ответ: $700/33$.

6.19. Найдите наибольшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $154/195$, $385/156$ и $231/130$ получаются натуральные числа.

Ответ: $77/780$.

6.20. Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых равно 108, а отношение их наименьшего общего кратного к наибольшему общему делителю равно 12.

Ответ: 3 и 36 или 9 и 12.

6.21. Сколькими нулями оканчивается десятичная запись числа $100!$?

Ответ: 24 нуля.

6.22.* Докажите, что кратность вхождения простого числа p в каноническое разложение $n!$ равна

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

(здесь [ ] обозначает целую часть числа).

6.23. Найдите каноническое разложение $97!$.

Ответ: $97!=2^{94}\cdot 3^{46}\cdot 5^{22}\cdot 7^{14}\cdot 11^{8}\cdot 13^{7}\cdot 17^{5}\cdot 19^{5}\cdot 23^{4}\cdot 29^{3}\times$

$\times 31^{3}\cdot 37^{2}\cdot 41^{2}\cdot 43^{2}\cdot 47^{2}\cdot 53\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 73\cdot 79\cdot 83\cdot 89\cdot 97$

6.25. Докажите, что если a^n делится на b^n, то a делится на b.

6.26.* Пусть a, b и c – натуральные числа, причем $НОД(a,b)=1$. Докажите, что если $ab=c^n$, то найдутся такие натуральные x и y, что $a=x^n$, $b=y^n$.

6.27. Пусть a и b – натуральные числа. Докажите, что если $a^m=b^n$, где $НОД(m,n)=1$, то найдется такое натуральное число c, что $a=c^n$, $b=c^m$.

6.28. Докажите, что для любых трех натуральных чисел a, b, c справедливы равенства:

1) $НОД(a,b,c)\cdot НОК(ab,ac,bc)=abc$;

2) $НОД(ab,ac,bc)\cdot НОК(a,b,c)=abc$.

6.29.* Докажите, что если натуральные числа a и b взаимно просты, причем число a имеет m натуральных делителей, а число b имеет n натуральных делителей, то число ab имеет mn натуральных делителей.

6.30. Вычислите:

1) $\tau(5600)$, $\sigma(5600)$; 2) $\tau(15\,435)$, $\sigma(15\,435)$;

3) $\tau(1\,000\,000)$, $\sigma(1\,000\,000)$; 4) $\tau(3\,697\,001)$, $\sigma(3\,697\,001)$.

Ответ: 1) $\tau(5600) = 36$; $\sigma(5600) = 15\,624$

2) $\tau(15\,435) = 24$, $\sigma(15\,435) = 31\,200$;

3) $\tau(1\,000\,000) = 49$, $\sigma(1\,000\,000) = 2\,480\,437$;

4) $\tau(3\,697\,001) = 24$, $\sigma(3\,697\,001) = 4\,952\,160$.

6.31.* В каком случае натуральное число имеет нечетное число натуральных делителей?

Ответ: число должно являться полным квадратом.

6.32.* Пусть n имеет вид $n = qp$, где q и p – простые числа. Найдите n, если $\sigma(n) = 48$.

Ответ: 33; 35.

6.33. Найдите n, если известно, что 3 и 5 являются его единственными простыми делителями и $\tau(n) = 6$.

Ответ: 45 или 75.

6.34. Найдите n, если известно, что $n = p^2 q^2$, где p и q – простые числа, и $\sigma(n) = 403$.

Ответ: 225.

6.35. Докажите, что если $n = p^k$ – степень простого числа p, то $\sigma(n) < 2n$.

6.36. Докажите формулу $\dfrac{\sigma(n)}{n} = \sum\limits_{d|n} \dfrac{1}{d}$, т.е. что величина $\dfrac{\sigma(n)}{n}$ равна сумме чисел, обратных делителям n.

6.37.* Докажите, что величина $\dfrac{\sigma(n)}{n}$ может принимать сколь угодно большие значения.

§ 7. Диофантовы уравнения

Определение. *Диофантовым уравнением* называется любое уравнение вида $P(x, y, ...) = 0$, где $P(x, y, ...)$ – многочлен от нескольких переменных с целыми коэффициентами, для которого требуется найти решения, выражающиеся в целых числах.

Теория диофантовых уравнений составляет раздел математики, интенсивно изучающийся с древнейших времен до настоящего времени.

Диофантовы уравнения могут не иметь решений, могут иметь конечное или бесконечное число решений.

7.1. Диофантовы уравнения первой степени

Наиболее простыми из диофантовых уравнений являются *диофантовы уравнения первой степени* (или *линейные диофантовы уравнения*):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

где $a_i, b \in \boldsymbol{Z}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и хотя бы одно $a_i \neq 0$.

При этом под решением в целых числах данного уравнения понимают любую последовательность $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \boldsymbol{Z}$, для которой

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = b.$$

Замечание. Линейные диофантовы уравнения иногда называют *неопределенными*, т.к. неизвестные находятся из этих уравнений неоднозначно.

Для выяснения вопроса о разрешимости в целых числах диофантовых уравнений первой степени могут быть использованы полученные сведения о наибольшем общем делителе.

Теорема 12. Уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда $d \mid b$, где $d = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Доказательство. ⇨ Если данное уравнение разрешимо в целых числах, т.е. существуют такие $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \boldsymbol{Z}$, что

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = b,$$

то из делимости каждого a_i на d получается делимость b на d.

⇦ Пусть $b = dc$ $(c \in \boldsymbol{Z})$. Так как $d = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то $d = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$ для некоторых $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \boldsymbol{Z}$ (см. § 4, следствие к теореме 7). Поэтому

$$b = dc = a_1 \cdot (u_1c) + a_2 \cdot (u_2c) + \ldots + a_n \cdot (u_nc).$$

Полагая $v_i = u_ic$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получим разрешимость в целых числах диофантова уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ ■

Замечание. Если диофантово уравнение первой степени разрешимо в $\boldsymbol{Z}$, то, найдя $d = НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, всегда можно найти хотя бы одно решение данного уравнения в целых числах.

Пример. Найдите частное решение уравнения $147x - 25y = 14$.

Решение. Числа 147 и -25 взаимно просты, следовательно, уравнение разрешимо в $\boldsymbol{Z}$. Найдем одно частное решение:

$$147 = (-25)\cdot(-5) + 22,$$
$$-25 = 22\cdot(-2) + 19,$$
$$22 = 19\cdot 1 + 3,$$
$$19 = 3\cdot 6 + 1.$$
$$1 = 19 - 3\cdot 6 = 19 - 6\cdot(22 - 19) = 7\cdot 19 - 6\cdot 22 =$$
$$= 7\cdot(-25 - 22\cdot(-2)) - 6\cdot 22 = 7\cdot(-25) + 8\cdot 22 =$$
$$= 7\cdot(-25) + 8\cdot(147 + 5\cdot(-25)) = 8\cdot 147 + 47\cdot(-25).$$

Итак, $1 = 147\cdot 8 + (-25)\cdot 47$. Следовательно,

$$14 = 147\cdot 112 - 25\cdot 658.$$

Ответ: пара чисел $(112; 658)$ образует частное решение уравнения $147x - 25y = 14$.

Замечание. Для нахождения частного решения диофантова уравнения зачастую проще бывает использовать метод подбора.

Пример. Найдите частное решение уравнения $7x+5y=3$.

Решение. Числа 7 и 5 взаимно просты, следовательно, уравнение разрешимо в $\boldsymbol{Z}$. Подбором найдем одно частное решение: $(-1;2)$.

Ответ: $(-1;2)$.

Теорема 13. Если уравнение $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b \quad (n\geq 2)$ разрешимо в $\boldsymbol{Z}$, то оно имеет бесконечно много решений в $\boldsymbol{Z}$.

Доказательство. Если последовательность $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \boldsymbol{Z}$ образует решение данного уравнения, то для любого $t\in\boldsymbol{Z}$ последовательность $v_1+a_2t, v_2-a_1t, v_3, \ldots, v_n$ также является решением, поскольку

$$a_1(v_1+a_2t)+a_2(v_2-a_1t)+a_3v_3+\ldots+a_nv_n=$$
$$=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\ldots+a_nv_n=b \quad \blacksquare$$

Замечание. Пусть уравнение $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$ разрешимо в $\boldsymbol{Z}$, что означает делимость b на $d=НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Пусть $a_i'=\dfrac{a_i}{d}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и $b'=\dfrac{b}{d}$. Если разделить обе части исходного уравнения на d, то получим диофантово уравнение

$$a_1'x_1+a_2'x_2+\ldots+a_n'x_n=b',$$

которое равносильно исходному.

Коэффициенты $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ взаимно просты. Поэтому при отыскании решений разрешимого в целых числах диофантова уравнения первой степени можно данное уравнение заменить равносильным ему уравнением, у которого коэффициенты при неизвестных взаимно просты.

Равносильное уравнение, согласно теореме 12, разрешимо в $\boldsymbol{Z}$, т.к. $d'=1$ и $d'\,|\,b'$.

Теорема 14. Пусть уравнение $ax+by=c$ разрешимо в $\boldsymbol{Z}$ и пара $(u_0\,;v_0)$ является частным решением этого уравнения, $d=НОД(a\,,b)$. Тогда множеством всех решений в $\boldsymbol{Z}$ данного уравнения является множество пар $(u\,;v)$, где

$$\begin{cases} u=u_0-\dfrac{b}{d}\cdot t, \\ v=v_0+\dfrac{a}{d}\cdot t, \end{cases} \quad \text{где } t\in\boldsymbol{Z}.$$

Доказательство. Покажем, что указанные пары являются решениями уравнения $ax+by=c$:

$$a\cdot\left(u_0-\frac{b}{d}\cdot t\right)+b\cdot\left(v_0+\frac{a}{d}\cdot t\right)=au_0+bv_0=c.$$

Покажем теперь, что указанные пары образуют *все (!!)* решения уравнения $ax+by=c$. Действительно, пусть пара $(u\,;v)$ целых чисел является решением, т.е. $au+bv=c$. По условию $au_0+bv_0=c$. Вычитая почленно левые и правые части этих равенств и деля на d, получим

$$\frac{a}{d}\cdot(u_0-u)+\frac{b}{d}\cdot(v_0-v)=0.$$

Отсюда $\dfrac{a}{d}\cdot(u_0-u)=\dfrac{b}{d}\cdot(v-v_0)$. Числа $\dfrac{a}{d}$ и $\dfrac{b}{d}$ взаимно просты, поэтому $\dfrac{a}{d}\,\Big|\,(v-v_0)$, $\dfrac{b}{d}\,\Big|\,(u_0-u)$ (см. § 1, лемма 3). Из $\dfrac{a}{d}\,\Big|\,(v-v_0)$ получаем $v-v_0=\dfrac{a}{d}\cdot t$, $t\in\boldsymbol{Z}$, т.е. $v=v_0+\dfrac{a}{d}\cdot t$. Подставим выражение для v в равенство $\frac{a}{d}\cdot(u_0-u)=\frac{b}{d}\cdot(v-v_0)$, получим $\frac{a}{d}\cdot(u_0-u)=\frac{b}{d}\cdot\frac{a}{d}\cdot t$. Сокращая на $\frac{a}{d}$, получим $u_0-u=\frac{b}{d}\cdot t$, или $u=u_0-\frac{b}{d}\cdot t$ ■

Пример. Решите в целых числах уравнение $147x-25y=14$.

Решение. Частное решение данного уравнения $(u_0\,;v_0)=(112;658)$ уже было найдено в одном из предыдущих примеров. Следовательно, общее решение:

$$\begin{cases} x=112+25t, \\ y=658+147t, \end{cases} \quad \text{где } t\in\boldsymbol{Z}.$$

Замечание. Так как $112=25\cdot4+12$ и $658=147\cdot4+70$, то общее решение уравнения $147x-25y=14$ может быть записано проще:

$$\begin{cases} x=12+25t, \\ y=70+147t, \end{cases} \quad \text{где } t\in\boldsymbol{Z}.$$

7.2. Нелинейные диофантовы уравнения

Наряду с неопределенными уравнениями первой степени большой интерес представляет исследование разрешимости в целых числах *нелинейных диофантовых уравнений*.

В этом параграфе достаточно подробно рассматриваются два вида нелинейных уравнений: *уравнение Пифагора (6 в. до н.э.)* и *уравнение Пелля (1610–1685)*.

Уравнение Пифагора

Определение. Уравнение вида $x^2+y^2=z^2$, где x, y, $z\in\boldsymbol{Z}$, называется *уравнением Пифагора*.

Каждая тройка целых чисел $(x\,;\,y\,;\,z)$, удовлетворяющая этому уравнению, носит название *пифагоровой тройки*.

Замечание. Проблема разыскания всех натуральных решений данного уравнения с геометрической точки зрения равносильна проблеме разыскания всех прямоугольных треугольников, стороны которых выражаются целыми числами.

Все пифагоровы тройки могут быть найдены следующим образом. Пусть целые числа $(x\,;\,y\,;\,z)$ образуют пифагорову тройку, т.е. связаны соотношением $x^2 + y^2 = z^2$. Если одно из чисел x, y, z равно 0, то пифагорова тройка имеет вид $(\pm a\,;\,0\,;\,\pm a)$, $(\pm a\,;\,0\,;\,\mp a)$ или $(0\,;\,\pm a\,;\,\pm a)$, $(0\,;\,\pm a\,;\,\mp a)$, где $a \in \boldsymbol{Z}$. Далее будем считать, что $x\,,\,y\,,\,z \neq 0$. Изменение знака у одного или нескольких из чисел x, y, z не нарушает равенства $x^2 + y^2 = z^2$, поэтому можно ограничиться рассмотрением случаев, когда $x\,,\,y\,,\,z > 0$, т.е. *описывать пифагоровы тройки натуральных чисел*.

Пусть d – наибольший общий делитель чисел x, y, z. Тогда равенство $x^2 + y^2 = z^2$ можно сократить на d^2, получим уравнение $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$, где $x = x_1 d$, $y = y_1 d$, $z = z_1 d$ и числа $x_1\,,\,y_1\,,\,z_1$ взаимно просты в совокупности. Таким образом, если известны все пифагоровы тройки $(x\,;\,y\,;\,z)$ взаимно простых натуральных чисел, то, умножая их на произвольные натуральные числа λ, можно получить *все* пифагоровы тройки $(\lambda x\,;\,\lambda y\,;\,\lambda z)$ из натуральных чисел.

Следовательно, можно считать, что $x\,,\,y\,,\,z \in \boldsymbol{N}$, $x^2 + y^2 = z^2$ и $НОД(x, y, z) = 1$. Положим $\frac{x}{z} = x'$, $\frac{y}{z} = y'$. Тогда $(x')^2 + (y')^2 = 1$. Отсюда $(y')^2 = (1 - x')\cdot(1 + x')$, или $\frac{y'}{1 + x'} = \frac{1 - x'}{y'}$.

Общее значение двух отношений в полученной пропорции обозначим через $t = \frac{u}{v}$, где $u, v \in \boldsymbol{Z}$. Дробь $\frac{u}{v}$ будем считать несократимой. Тогда:

$$\begin{cases} y' = t \cdot (1 + x'), \\ 1 - x' = t y'; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t x' - y' = -t, \\ x' + t y' = 1. \end{cases}$$

Из полученной системы уравнений можно выразить неизвестные x' и y':

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \\ y' = \dfrac{2t}{1 + t^2}. \end{cases}$$

Подставляя $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ вместо x' и y', $\frac{u}{v}$ вместо t, будем иметь:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{v^2 - u^2}{u^2 + v^2}, \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{2uv}{u^2 + v^2}. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что

$$x \cdot (u^2 + v^2) = z \cdot (v^2 - u^2),\ y \cdot (u^2 + v^2) = z \cdot 2uv.$$

Так как дробь $\frac{u}{v}$ несократима, то $НОД(u, v) = 1$. Напомним, что по предположению числа x, y, z взаимно просты в совокупности. Но из равенства $x^2 + y^2 = z^2$ следует, что числа x, y, z взаимно просты и попарно, т.е. $НОД(x, y) = НОД(y, z) = НОД(x, z) = 1$. Действительно, если, например, x и z делятся на простое число p, то $y^2 = z^2 - x^2 \,\vdots\, p$, а значит, $y \,\vdots\, p$. Тогда $x, y, z \,\vdots\, p$, а потому $НОД(x, y, z) \neq 1$. Это противоречит условию.

Далее рассмотрим отдельно два случая.

1-*й случай*: числа u и v разной четности. Докажем, что тогда числа u^2+v^2 и $2uv$ взаимно просты. Действительно, если $u^2+v^2, 2uv \vdots p$, где p – простое число, то $p \neq 2$ (так как u^2+v^2 нечетно).Следовательно, $u \vdots p$ или $v \vdots p$. Если $u \vdots p$, то $v^2 \vdots p$, а значит, $v \vdots p$, что влечет $НОД(u, v) \neq 1$ – противоречие. При $v \vdots p$ также получаем противоречие. Так как $y \cdot (u^2+v^2) = z \cdot 2uv$ и $НОД(u^2+v^2, 2uv) = 1$, то $y \vdots 2uv$. Значит, $y = 2uv \cdot r$ при некотором $r \in \boldsymbol{Z}$. Отсюда $z = (u^2+v^2) \cdot r$. Так как $НОД(y, z) = 1$, то $r = 1$. Следовательно, $y = 2uv$, $z = u^2+v^2$. Отсюда $x = \dfrac{z \cdot (v^2-u^2)}{u^2+v^2} = v^2-u^2$. Получаются формулы $x = v^2-u^2$, $y = 2uv$, $z = u^2+v^2$, где u и v – натуральные числа разной четности и $v > u$.

2-*й случай*: числа u и v нечетные. Тогда u^2+v^2 делится на 2, но не делится на 4. Следовательно, $\dfrac{u^2+v^2}{2}$ – нечетное целое число. Имеем:

$$x \cdot \frac{u^2+v^2}{2} = z \cdot \frac{v^2-u^2}{2}, \; y \cdot \frac{u^2+v^2}{2} = z \cdot uv.$$

Докажем, что числа $\dfrac{u^2+v^2}{2}$ и uv взаимно просты. Действительно, если $\dfrac{u^2+v^2}{2}, uv \vdots p$ для некоторого простого p, то либо $u \vdots p$ (что влечет $v \vdots p$), либо $v \vdots p$ (что влечет $u \vdots p$). В любом случае $НОД(u, v) \neq 1$, что противоречит предположению. Таким образом,

$x=\dfrac{v^2-u^2}{2}$, $y=uv$, $z=\dfrac{u^2+v^2}{2}$. Так как числа u и v нечетные, то $\dfrac{u+v}{2}\in\boldsymbol{Z}$ и $\dfrac{v-u}{2}\in\boldsymbol{Z}$. Положим $m=\dfrac{u+v}{2}$, $n=\dfrac{v-u}{2}$. Тогда

$$x=\frac{v^2-u^2}{2}=2\cdot\frac{v+u}{2}\cdot\frac{v-u}{2}=2mn,$$

$$y=uv=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2-\left(\frac{v-u}{2}\right)^2=m^2-n^2,$$

$$z=\frac{u^2+v^2}{2}=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{v-u}{2}\right)^2=m^2+n^2.$$

Объединяя оба случая, получим:

$$\begin{cases}x=v^2-u^2,\\ y=2uv,\\ z=u^2+v^2,\end{cases}\qquad \text{или} \qquad \begin{cases}x=2mn,\\ y=m^2-n^2,\\ z=m^2+n^2,\end{cases}$$

где m, n – нечетные числа, а u, v – разной четности. Все пифагоровы тройки могут быть получены из этих умножением на натуральное число: $(\lambda x;\lambda y;\lambda z)$ $(\lambda\in\boldsymbol{N})$.

Примеры. Некоторые пифагоровы тройки:

1) $v=2$, $u=1$: $(3;4;5)$;
2) $v=3$, $u=2$: $(5;12;13)$;
3) $v=4$, $u=3$: $(7;24;25)$;
4) $v=10$, $u=7$: $(51;140;149)$;
5) $m=7$, $n=3$: $(42;40;58)$.

В связи с рассмотрением пифагоровых чисел естественно возникает вопрос о возможности следующего обобщения задачи: можно ли найти такие целые положительные числа x, y, z, которые удовлетворяли бы уравнению

$$x^n + y^n = z^n,$$

где показатель n – целое число, бо́льшее 2?

Французский математик и юрист *Пьер Ферма (1601–1665)*, получивший ряд крупных результатов в области теории чисел, высказал следующее утверждение, которое называют ***«проблемой Ферма»*** или ***«великой теоремой Ферма»***: *всякое уравнение*

$$x^n + y^n = z^n$$

при $n > 2$ *не имеет решений в области натуральных чисел.*

Свое утверждение Ферма написал на полях книги – сочинения *Диофанта (3 в. н.э.)* – со следующим комментарием: «Я открыл этому поистине чудесное доказательство, которое из-за недостатка места не может поместиться на этих полях». В настоящее время все специалисты твердо уверены в том, что Ферма не обладал доказательством этой теоремы и, сверх того, что элементарными методами ее нельзя доказать.

Более трехсот лет проблема Ферма привлекала к себе внимание как крупных специалистов, так и (в связи с исключительной простотой своей постановки) многочисленных любителей математики. Она служила беспрецедентным стимулом для развития математики. При попытках ее доказать были разработаны мощные средства, приведшие к созданию обширного раздела математики – теории алгебраических чисел. С помощью сложнейшей теоретико-числовой техники теорема Ферма была проверена для всех $n \le 4\,000\,000$, но до конца 1994 года в общем случае оставалась недоказанной. Получить ее полное доказательство удалось лишь с помощью теории эллиптических кривых.

23 июня 1993 года математик из Принстона ***Эндрю Уайлс***, выступая на конференции по теории чисел в Кембридже (Великобритания), сделал сообщение, из которого следовало, что им получено доказательство великой теоремы Ферма.

Дальнейшие события развивались драматически. В начале декабря 1993 года, за несколько дней до того, как рукопись работы Уайлса должна была пойти в печать, в его доказательстве были обнаружены пробелы. Исправление их заняло свыше года. И только летом 1995 года текст с доказательством, написанный Уайлсом в сотрудничестве с *Тейлором*, вышел в свет.

Уравнение Пелля

Определение. Уравнение вида $x^2 - Ay^2 = 1$, где $A \in \boldsymbol{N},\ A \neq u^2$, называется *уравнением Пелля*.

Рассмотрим вопрос о разрешимости в целых числах данного уравнения.

В силу симметричности задачи ограничимся случаем, когда $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Заметим, что существует очевидное решение $(x_0\,;\,y_0) = (1;\,0)$. Кроме того, легко увидеть, что если $(x\,;\,y)$ и $(x_1\,;\,y_1)$ – два неотрицательных решения уравнения, причем $x > x_1$, то тогда и $y > y_1$.

Замечание. Под неотрицательным (положительным) решением уравнения Пелля будем понимать такую упорядоченную пару $(x_0\,;\,y_0)$, что $x_0 \geq 0$ и $y_0 \geq 0$ $(x_0 > 0$ и $y_0 > 0)$.

Пусть $(x_1\,;\,y_1)$ – наименьшее положительное решение уравнения $x^2 - Ay^2 = 1$.

Замечание. Доказательство существования такого наименьшего положительного решения здесь не приводится, т.к. оно опирается на теорию цепных дробей и очень громоздко.

Совершим ряд преобразований.

$$x_1^2 - Ay_1^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)\cdot\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right) = 1, \text{ отсюда}$$

$$\left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)^2\cdot\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^2 = 1, \text{ или}$$

$$\left((x_1^2 + Ay_1^2) - 2x_1y_1\sqrt{A}\right)\cdot\left((x_1^2 + Ay_1^2) + 2x_1y_1\sqrt{A}\right) = 1.$$

Обозначив $x_1^2 + Ay_1^2 = x_2$, $2x_1y_1 = y_2$, получим $\left(x_2 - y_2\sqrt{A}\right)\cdot\left(x_2 + y_2\sqrt{A}\right) = 1$. Таким образом, после возведения в квадрат, пара $(x_2\,;\,y_2)$ оказалась положительным решением уравнения $x^2 - Ay^2 = 1$. Аналогичные выводы можно сделать, возводя $\left(x_1 - y_1\sqrt{A}\right)\cdot\left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right) = 1$ в куб (тогда пара $(x_3\,;\,y_3)$ будет положительным решением), в четвертую и т.д. степени.

Итак, если $(x_1\,;\,y_1)$ – наименьшее положительное решение уравнения $x^2 - Ay^2 = 1$ и $x_n + y_n\sqrt{A} = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n$, то $(x_n\,;\,y_n)$ также является положительным решением данного уравнения.

Теорема 15. Других положительных решений нет.

Доказательство. Заметим, что для последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (как и для последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$) решений уравнения $x^2 - Ay^2 = 1$, получаемых по формуле $x_n + y_n\sqrt{A} = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n$, где $n \in \boldsymbol{N}$ и $(x_1\,;\,y_1)$ – наименьшее положительное решение данного уравнения, выполняется условие монотонного возрастания при $n \to \infty$.

Пусть $(u\,;\,v)$ – произвольное решение уравнения $x^2 - Ay^2 = 1$, тогда $x_n \le u < x_{n+1}$, $y_n \le v < y_{n+1}$. Предположим, что $x_n < u < x_{n+1}$, $y_n < v < y_{n+1}$, и придем к противоречию.

Действительно, тогда $x_n + y_n\sqrt{A} < u + v\sqrt{A} < x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{A}$. Разделим это двойное неравенство на $x_n + y_n\sqrt{A}$ (или, что то же самое, умножим это неравенство на $x_n - y_n\sqrt{A}$), получим

$$1 < (x_n - y_n\sqrt{A})\cdot(u + v\sqrt{A}) < x_1 + y_1\sqrt{A} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 1 < (ux_n - Avy_n) + (vx_n - uy_n)\sqrt{A} < x_1 + y_1\sqrt{A}\,.$$

Заметим, что пара $(ux_n - Avy_n\,;\, vx_n - uy_n)$ является решением уравнения $x^2 - Ay^2 = 1$ (Убедитесь в этом самостоятельно!). Если теперь мы покажем, что $\begin{cases} ux_n - Avy_n > 0, \\ vx_n - uy_n > 0; \end{cases}$, то получим противоречие с тем, что $(x_1\,;\, y_1)$ – наименьшее положительное решение данного уравнения.

Действительно, $ux_n - Avy_n = \sqrt{1+Av^2} \cdot \sqrt{1+Ay_n^2} - Avy_n$ (так как из $u^2 - Av^2 = 1$, $x_n^2 - Ay_n^2 = 1$ следует $u = \sqrt{1+Av^2}$, $x_n = \sqrt{1+Ay_n^2}$), но $\sqrt{1+Av^2} > \sqrt{Av^2}$, $\sqrt{1+Ay_n^2} > \sqrt{Ay_n^2}$.

Поэтому $ux_n - Avy_n > 0$.

Далее,

$$vx_n - uy_n = \sqrt{\frac{u^2-1}{A}} \cdot x_n - u \cdot \sqrt{\frac{x_n^2-1}{A}},$$

т.к. из $u^2 - Av^2 = 1$, $x_n^2 - Ay_n^2 = 1$ следует

$$v = \sqrt{\frac{u^2-1}{A}}, \ y_n = \sqrt{\frac{x_n^2-1}{A}}.$$

Для доказательства $\sqrt{\frac{u^2-1}{A}} \cdot x_n - u \cdot \sqrt{\frac{x_n^2-1}{A}} > 0$, надо показать, что $(u^2-1) \cdot x_n^2 > u^2 \cdot (x_n^2 - 1)$.

Последнее неравенство равносильно $x_n < u$, а это и было предположено.

Таким образом, $vx_n - uy_n > 0$. Противоречие.

Итак, $u = x_n$, $v = y_n$ ■

Упражнения

7.1.* Найдите решения в целых числах уравнений:

1) $3x+6y=22$; 2) $6x+9y=2$; 3) $5x+9y=2$;

4) $7x+11y=13$; 5) $3x-4y=29$; 6) $11x+12y=58$;

7) $153x-34y=51$.

7.2. Решите в натуральных числах уравнение $11x+8y=104$.

Ответ: $(8;\,2)$.

7.3.* Найдите все натуральные числа a и b, удовлетворяющие уравнению $200a+3b=2003$.

Ответ: $(10;1)$, $(7;201)$, $(4;401)$, $(1;601)$.

7.4.* Выясните, сколькими способами можно разменять 20 копеек монетами по 2 и 3 копейки.

Ответ: $(10;0)$, $(7;2)$, $(4;4)$, $(1;6)$.

7.5.* В библиотеке не более 5000 книг. Если их связывать в пачки по 5, по 6 или по 7 книг, то каждый раз остается одна лишняя книга. А если их связывать в пачки по 11 книг, то лишних книг не остается. Сколько книг в библиотеке?

Ответ: 2101 или 4411 книг.

7.6. Для перевозки 291участника олимпиады выделены автобусы вместимостью по 12 и 15 мест. Сколькими способами можно рассадить участников так, чтобы все места были заняты? Какого наименьшего количества автобусов будет достаточно?

Ответ: 5 способов, 20 автобусов (3 – по 12 мест, 17 – по 15 мест).

7.7.* Решите в целых числах системы:

1) $\begin{cases} 3x+3y+5z=1, \\ 4x+5y-2z=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2y-z=1, \\ 4x+5y-2z=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3y+5z=8, \\ 5x-6y+8z=9. \end{cases}$

Ответ: 1) $\begin{cases} x=-85-31t, \\ y=72+26t, \\ z=8+3t, \end{cases}$ где $t\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\begin{cases} x=t, \\ y=2+2t, \\ z=3+7t, \end{cases}$ где $t\in\boldsymbol{Z}$;

3) система не имеет решений.

7.8.* Докажите, что система сравнений $\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{b_1}, \\ x \equiv a_2 \pmod{b_2}; \end{cases}$ имеет решения, если $НОД(b_1, b_2) = 1$. Верно ли обратное утверждение?

7.9 (*Китайская теорема об остатках*).* Докажите, что система сравнений: $\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{b_1}, \\ x \equiv a_2 \pmod{b_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv a_n \pmod{b_n}; \end{cases}$ имеет решение, если числа b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ попарно взаимно просты.

7.10. Решите системы сравнений:

1)* $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{7}, \\ x \equiv 5 \pmod{9}; \end{cases}$ 2)* $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{10}, \\ x \equiv 2 \pmod{13}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x \equiv 3 \pmod{7}, \\ x \equiv 4 \pmod{11}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{13}, \\ x \equiv 2 \pmod{5}. \end{cases}$

Ответ: 1) $x \equiv 23 \pmod{63}$; 2) $x \equiv 93 \pmod{130}$; 3) $x \equiv 37 \pmod{77}$; 4) $x \equiv 32 \pmod{65}$.

7.11.* Существует ли такой многочлен $f(x)$ с целочисленными коэффициентами, что $f(1) = 1$, $f(5) = 2$?

Ответ: не существует.

7.12. Решите уравнения:

1)* $\sin x + \sin 5x = 2$; 2)* $\sin 7x + \cos 2x = -2$;

3)* $\cos 6x \cdot \sin \frac{5}{6}x = 1$; 4) $\sin 2x \cdot \cos \frac{5x}{3} = 1$;

5) $\cos 2x \cdot \cos \frac{4x}{5} = -1$.

Ответ: 1) $x = \pi/2 + 2\pi t$, $t \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \pi/2 + 2\pi t$, $t \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x = 3\pi + 12\pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$; 4) нет решений; 5) $x = 2{,}5\pi + 5\pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$.

7.13.* Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 7 и дающее в остатке 1 при делении на 2, 3, 4, 5, 6.

Ответ: 301.

7.14.* Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 дает остаток 2, при делении на 4 дает остаток 3, при делении на 5 дает остаток 4 и при делении на 6 дает остаток 5.

Ответ: 59.

7.15.* Найдите первые три положительные решения в целых числах уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$.

Ответ: $(3;2)$, $(17;12)$, $(99;70)$.

7.16.* Выведите рекуррентные формулы для нахождения всех положительных целочисленных решений уравнения Пелля $x^2 - Ay^2 = 1$.

Ответ: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n x_1 + A y_n y_1, \\ y_{n+1} = x_n y_1 + y_n x_1. \end{cases}$

7.17.* Воспользовавшись рекуррентными формулами, найдите первые три положительные решения в целых числах уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$.

Ответ: $(3;2)$, $(17;12)$, $(99;70)$.

7.18.* Воспользовавшись рекуррентными формулами, найдите первые три положительные решения в целых числах уравнений Пелля:

1) $x^2 - 3y^2 = 1$; 2) $x^2 - 8y^2 = 1$.

Ответ: 1) $(2;1)$, $(7;4)$, $(26;15)$; 2) $(3;1)$, $(17;6)$, $(99;35)$.

7.19.* Докажите, что решения уравнения Пелля $x^2 - Ay^2 = 1$ при $x \ge 0$ образуют группу относительно операции $*$: $(x\,;\,y) * (x'\,;\,y') = (xx' + Ayy'\,;\,xy' + yx')$. Какой известной группе изоморфна данная группа?

§ 8. Методы решения нелинейных уравнений

При решении нелинейных уравнений в целых числах условно можно выделить следующие методы:

1. Метод разложения на множители.
2. Метод решения уравнений с двумя переменными как квадратных относительно какой-либо переменной.
3. Метод остатков.
4. Метод «бесконечного спуска».
5. Метод оценки.

Рассмотрим на примерах каждый из этих методов.

8.1. Решение уравнений методом разложения на множители

Пример 1. *Решите в целых числах уравнение*

$$2x^2y^2 + y^2 - 6x^2 - 12 = 0.$$

Решение. $2x^2y^2 + y^2 - 6x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y^2 \cdot (2x^2 + 1) - 3 \cdot (2x^2 + 1) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 1) \cdot (y^2 - 3) = 9.$$

Так как $2x^2 + 1 > 0$, то $y^2 - 3 > 0$. Возможны три случая:

1. $\begin{cases} 2x^2 + 1 = 1, \\ y^2 - 3 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y^2 = 12. \end{cases}$ Нет целочисленных решений.

2. $\begin{cases} 2x^2 + 1 = 3, \\ y^2 - 3 = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y^2 = 6. \end{cases}$ Нет целочисленных решений.

3. $\begin{cases} 2x^2 + 1 = 9, \\ y^2 - 3 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \pm 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \mp 2. \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ: $(\pm 2; \pm 2)$; $(\pm 2; \mp 2)$.

Пример 2. *Решите в целых числах уравнение*

$$10xy - 8y + 5x = 63.$$

Решение. $10xy + 5x = 5x \cdot (2y + 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad 8y = 4 \cdot (2y+1) - 4.$$

Тогда исходное уравнение примет вид $(5x - 4) \cdot (2y + 1) = 59$.

Так как 59 – простое число, то возможны четыре варианта:

1. $\begin{cases} 5x - 4 = 1, \\ 2y + 1 = 59. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x - 4 = 59, \\ 2y + 1 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x - 4 = -1, \\ 2y + 1 = -59. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 5x - 4 = -59, \\ 2y + 1 = -1. \end{cases}$

Ответ: $(1; 29)$, $(-11; -1)$.

Пример 3. *Решите в целых числах уравнение*

$$2xy + x + y = 83.$$

Решение. Выразим y через x, получим:

$$y = \frac{83 - x}{2x + 1} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} + \frac{167}{2 \cdot (2x + 1)} \Leftrightarrow 2y = -1 + \frac{167}{2x + 1}.$$

Значит, $2x + 1$ – делитель простого числа 167. Возможны четыре варианта:

1. $2x + 1 = 167$; 2. $2x + 1 = -167$;
3. $2x + 1 = 1$; 4. $2x + 1 = -1$.

Ответ: $(83; 0)$, $(-84; -1)$, $(0; 83)$, $(-1; -84)$.

Упражнения

8.1. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^2 - y^2 = 91$; 2) $x^2 - 6 = y^2$.

Ответ: 1) $(46; 45)$, $(46; -45)$, $(-46; 45)$, $(-46; -45)$, $(10; 3)$, $(10; -3)$, $(-10; -3)$, $(-10; 3)$; 2) нет решений.

8.2. Найдите пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна:

1) 57; 2) 68; 3) 69; 4) 52; 5) 65.

Ответ: 1) $(11;\ 8)$, $(29;\ 28)$; 2) $(18;\ 16)$; 3) $(35;\ 34)$, $(13;\ 10)$; 4) $(14;\ 12)$; 5) $(33;\ 32)$, $(9;\ 4)$.

8.3. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению:

1) $3xy-6x^2=y-2x+4$;

2) $3xy-9x^2=y-3x+8$;

3) $5xy-20x^2=4y-16x+16$.

Ответ: 1) $(0;-4)$, $(-1;-3)$, $(1;\ 4)$; 2) $(3;\ 10)$, $(0;-8)$, $(-1;-5)$, $(1;\ 7)$; 3) $(1;\ 20)$, $(4;\ 17)$, $(0;-4)$.

8.4. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению:

1) $2xy-6x^2=9x-3y+6$;

2) $xy-6x^2=2y-12x+4$;

3) $2xy+4x^2=5y+10x+21$.

Ответ: 1) нет решений; 2) $(3;\ 22)$, $(6;\ 37)$, $(1;\ 2)$, $(4;\ 26)$; 3) $(3;\ 15)$.

8.5. Решите уравнение:

1) $xy+3x-5y=-3$ в натуральных числах;

2) $xy+3x-y=6$ в целых числах.

Ответ: 1) $(3;\ 6)$, $(2;\ 3)$, $(4;\ 15)$; 2) $(4;-2)$, $(-2;-4)$, $(2;\ 0)$, $(0;-6)$.

8.6. Решите уравнение:

1) $2x^2+5xy-12y^2=28$ в натуральных числах;

2) $x^2-3xy+2y^2=3$ в целых числах.

Ответ: 1) $(8;\ 5)$; 2) $(5;\ 2)$, $(-1;-2)$, $(-5;-2)$, $(1;\ 2)$.

8.7. Решите в натуральных числах уравнение $2xy = x^2 + 2y$.

Ответ: $(2;\ 2)$.

8.8. Решите в целых числах уравнение $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

Ответ: $(4;\ 1)$, $(4;\ -3)$, $(-4;\ -3)$, $(-4;\ -1)$.

8.9. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $x^2 - 4xy - 5y^2 = 1996$; 2) $x^2 - 4xy - 5y^2 = 1999$.

Ответ: 1) $(832;\ 166)$; 2) $(1666;\ 333)$.

8.10. Докажите, что уравнение $x^3 - y^3 = 1993$ не имеет решений в целых числах.

8.11. Решите в целых числах уравнение $x^3 + y^3 = 1999$.

Ответ: нет решений.

8.2. Решение уравнений с двумя переменными как квадратных относительно одной из переменных

Пример 4. *Решите в целых числах уравнение*

$$6x^2y + 2x^2 + 7xy + 2y + 7x + 3 = 0.$$

Решение. $6x^2y + 2x^2 + 7xy + 2y + 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (6y+2)\cdot x^2 + 7\cdot(y+1)\cdot x + (2y+3) = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное уравнение с неизвестным x (заметим, что случай $6y+2=0$ не удовлетворяет условию целочисленности неизвестной y), получим:

$$x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{-2y-3}{3y+1}.$$

Так как x_1 – число нецелое, то удовлетворять условию может лишь x_2. Имеем: $-2y-3 = x\cdot(3y+1)$.

Отсюда $-\frac{2}{3}\cdot(3y+1)-\frac{7}{3}=x\cdot(3y+1)$.

Следовательно, $(3y+1)\cdot(3x+2)=-7$.

Так как x, $y\in\boldsymbol{Z}$, то возможны четыре варианта:

1. $\begin{cases}3x+2=1,\\3y+1=-7.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}3x+2=-1,\\3y+1=7.\end{cases}$

3. $\begin{cases}3x+2=7,\\3y+1=-1.\end{cases}$ 4. $\begin{cases}3x+2=-7,\\3y+1=1.\end{cases}$

Ответ: $(-3;0)$, $(-1;2)$.

Упражнения

8.12. Решите в целых числах уравнение:

1) $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$;
2) $x^2+y^2+xy+2y-2x+4=0$;
3) $3(x^2+xy+y^2)=x+8y$.

Ответ: 1) $(1;-1)$; 2) $(2;-2)$; 3) $(1;1)$, $(0;0)$.

8.13. Решите уравнение:

1) $x^2+xy+y=x^2y^2$ в целых числах;
2) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$ в натуральных числах;
3) $x^6+x^3+1=y^4$ в целых числах.

Ответ: 1) $(-1;1)$, $(1;1)$, $(0;0)$; 2) нет решений;
3) $(0;1)$, $(0;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$.

8.14. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^4-y^4-20x^2+28y^2=107$;
2) $x^4-y^4-2x^2+6y^2=13$.

Ответ: 1) $(4;\ 3),\ (-4;\ -3),\ (-4;\ 3),\ (4;\ -3),$
$(2;\ 3),\ (-2;\ -3),\ (-2;\ 3),\ (2;\ -3);$
2) $(2;\ 1),\ (-2;\ 1),\ (2;\ -1),\ (-2;\ -1).$

8.15. Решите в натуральных числах уравнение

$$(x+y)^2-3x-y=150.$$

Ответ: $(3;\ 10)$.

8.16. Решите в целых числах уравнение

$$x^2+4y^2+4xy-3x-4y-600=0.$$

Ответ: $\left(t^2-601;301-\dfrac{t(t-1)}{2}\right)$, $\left(t^2-601;301-\dfrac{t(t+1)}{2}\right)$, где $t\in\boldsymbol{Z}$.

8.3. Решение уравнений методом остатков

Пример 5. *Докажите, что уравнение* $x^2+y^2=9999$ *не имеет решений в целых числах.*

Решение. Так как число 9999 – нечетное, то для существования решения одно из неизвестных должно быть четным (например, для определенности – это будет x), а другое – нечетным. Итак, $x=2k$, $y=2n-1$, следовательно, $x^2=4k^2$, $y^2=4n^2-4n+1=4m+1$. Если бы задача имела решение в целых числах, то при делении на 4 числа x^2+y^2 и 9999 должны давать одинаковые остатки (т.е. должны быть сравнимы по модулю 4).

Но $x^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4)$, $y^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,4)$, следовательно, $x^2+y^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,4)$; $9999=4\cdot 2499+3\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,4)$. Так как числа x^2+y^2 и 9999 не сравнимы по модулю 4, уравнение $x^2+y^2=9999$ не имеет решений в целых числах.

Пример 6. *Докажите, что уравнение* $15x^2-7y^2=9$ *не имеет решений в целых числах.*

Решение. Перепишем уравнение в виде $7y^2 = 15x^2 - 9$. Если бы уравнение имело решение, то $7y^2 \equiv -9 \pmod{15}$, т.е. $7y^2 \equiv 6 \pmod{15}$.

Составим таблицу сравнений по модулю 15:

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y^2	0	1	4	9	1	10	6	4	4	6	10	1	9	4	1
$7y^2$	0	7	13	3	7	10	12	13	13	12	10	7	3	13	7

Из таблицы видно, что $7y^2$ не сравнимо с 6 по модулю 15. Следовательно, уравнение $15x^2 - 7y^2 = 9$ не имеет решений в целых числах.

Пример 7 ***(Международный турнир «Дружба–90»).*** *Докажите, что уравнение*

$$7^x - 1 = 12 \cdot (2y+1)^2$$

не имеет решений в целых числах.

Решение. Заметим вначале, что $x \geq 0$.

Далее, чтобы уравнение имело решение в целых числах, необходимо выполнение условия $7^x - 1 \equiv 0 \pmod{12}$. Возможны два случая: $x = 2k$ или $x = 2k+1$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

В первом случае $7^{2k} = 49^k \equiv 1^k = 1 \pmod{12}$, а во втором $7^{2k+1} = 7 \cdot 49^k \equiv 7 \pmod{12}$. Очевидно, что второй случай не удовлетворяет условию $7^x - 1 \equiv 0 \pmod{12}$. Итак, для разрешимости уравнения необходимо, чтобы $x = 2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Тогда исходное уравнение примет вид

$7^{2k} - 1 = 12 \cdot (4y^2 + 4y + 1)$, или $49^k - 1 = 48y \cdot (y+1) + 12$.

Отсюда $49^k = 48y \cdot (y+1) + 13$, т.е. $49^k \equiv 13 \pmod{48}$. Но $49^k \equiv 1^k = 1 \pmod{48}$, т.е. не существует таких $k = 0, 1, 2, \ldots$, что $49^k \equiv 13 \pmod{48}$. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

Упражнения

8.17. Решите в целых числах уравнение $2^x - 1 = y^2$.

Ответ: (1; 1), (1; – 1), (0; 0).

8.18. Докажите, что уравнение $6^x = y^2 + y - 2$ не имеет решений в целых числах.

8.19. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^2 + y^2 = 4z - 1$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.

Ответ: 1) нет решений; 2) нет решений.

8.20. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$.

Ответ: нет решений.

8.21. Решите в целых числах уравнение

$$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2.$$

Ответ: (1; 1), (1; – 1), (3; 3), (3; – 3).

8.22. Докажите, что уравнение $x^5 - y^5 = 1993$ не имеет решений в целых числах.

8.23. Докажите, что система уравнений:

$$1)\begin{cases} x^2 - y^3 = 7, \\ z^2 - 2y^2 = 1; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x^2 + y^5 = 11, \\ z^2 - 2y^2 = 1; \end{cases}$$

не имеет решений в целых числах.

8.4. Решение уравнений методом «бесконечного спуска»

Пример 8. *Докажите, что уравнение* $3x^2 - y^2 = 5^z$ *не имеет решений в целых числах.*

Решение. Покажем вначале, что не имеют решений в целых числах уравнения:

1) $3x^2 - y^2 = 1$; 2) $3x^2 - y^2 = 5$.

1) $3x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 3x^2 - 1$, т.е. должно выполняться: $y^2 \equiv 2 \pmod 3$. Но

y	0	1	2
y^2	0	1	1

Следовательно, $y^2 \not\equiv 2 \pmod 3$. Таким образом, уравнение $3x^2 - y^2 = 1$ неразрешимо в целых числах.

2) $3x^2 - y^2 = 5 \Leftrightarrow 3x^2 = 5 + y^2$, т.е. должно выполняться: $3x^2 \equiv y^2 \pmod 5$. Но

y	0	1	2	3	4
y^2	0	1	4	4	1

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
$3x^2$	0	3	2	2	3

Отсюда следует, что для разрешимости в целых числах необходимо выполнение условия $x \equiv y \equiv 0 \pmod 5$, или $x = 5k$, $y = 5n$. Следовательно, $3x^2 = 3 \cdot 25k^2$, $y^2 = 25n^2$. Итак, должно выполняться: $3 \cdot 25k^2 = 5 + 25n^2$, т.е. $3 \cdot 5k^2 = 1 + 5n^2$. Но в последнем уравнении левая и правая части дают разные остатки при делении на 5, значит, исходное уравнение неразрешимо.

Теперь перейдем к доказательству неразрешимости в общем случае, отметив, что $z \geq 0$. Имеем $3x^2 - y^2 = 5^z \Leftrightarrow 3x^2 = 5^z + y^2$. Случай $z = 0$ был рассмотрен ранее, поэтому можно считать, что $z \geq 1$. Отсюда следует, что $3x^2 \equiv y^2 \ (\mathrm{mod}\, 5)$. А это может выполняться только при $x \equiv y \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 5)$. Но тогда $x = 5x_1$, $y = 5y_1$, значит, $3 \cdot 25x_1^2 = 5^z + 25y_1^2$, или $3 \cdot x_1^2 = 5^{z-2} + y_1^2$. Еще раз рассмотрим сравнение по модулю 5 и так далее. В итоге придем к уравнению вида $3x^2 - y^2 = 1$ или к уравнению вида $3x^2 - y^2 = 5$, каждое из которых неразрешимо в целых числах. Утверждение доказано.

Пример 9. *Решите в целых числах уравнение* $2x^2 - 5y^2 = z^2$.

Решение. $2x^2 - 5y^2 = z^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 5y^2 + z^2$. Отсюда, должно выполняться $2x^2 \equiv z^2 \ (\mathrm{mod}\, 5)$. Рассмотрим таблицу сравнений по модулю 5:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
$2x^2$	0	2	3	3	2

Из таблицы видно, что для разрешимости в целых числах исходного уравнения необходимо выполнение условия $x \equiv z \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 5)$.

Предположим, что $x = 5x_1$, $z = 5z_1$, тогда исходное уравнение примет вид $2 \cdot 25x_1^2 - 5y^2 = 25z_1^2$. Сокращая на 5, получим уравнение $10x_1^2 - y^2 = 5z_1^2$, для разрешимости в целых числах которого необходимо, чтобы $y \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 5)$, т.е. должно быть

$y = 5y_1$. Тогда уравнение $10x_1^2 - y^2 = 5z_1^2$ примет вид $10x_1^2 - 25y_1^2 = 5z_1^2$. Сокращая на 5, получим уравнение $2x_1^2 - 5y_1^2 = z_1^2$, имеющее тот же вид, что и исходное.

Из приведенных рассуждений можно сделать следующие выводы. Во-первых, числа x, y, z должны быть кратными 5. Во-вторых, числа x_1, y_1, z_1, т.е. $\frac{x}{5}, \frac{y}{5}, \frac{z}{5}$, удовлетворяющие этому уравнению, также кратны 5. Итак, оказалось, что числа, удовлетворяющие уравнению $2x^2 - 5y^2 = z^2$, должны делиться на 5, и сколько раз мы не делили бы их на 5, будем получать числа, которые также делятся на 5. Единственное число, обладающее этим свойством, есть нуль. Следовательно, уравнение $2x^2 - 5y^2 = z^2$ имеет единственное решение в целых числах – $(0;\ 0;\ 0)$.

Ответ: $(0;\ 0;\ 0)$.

Упражнения

8.24. Решите в целых числах уравнение $4x^3 - 2y^3 - z^3 = 0$.

Ответ: $(0;\ 0;\ 0)$.

8.25. Докажите, что уравнение $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$ не имеет решений в натуральных числах.

8.26. Докажите, что уравнение:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$;

не имеет решений в натуральных числах.

8.27. Решите в целых числах уравнение $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$.

Ответ: $(0;\ 0;\ 0)$.

8.5. Решение уравнений методом оценки

Пример 10. *Решите в натуральных числах уравнение* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть для определенности $y \ge x$. Проверим равенство при $x=1,2,3,\ldots$. Имеем:

1) при $x=1$: $1+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ – неверное равенство, т.к. $1+\frac{1}{y}>1$ при любых натуральных y;

2) при $x=2$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ – неверное равенство, т.к. $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$ при любых натуральных y;

3) при $x=3$: $\frac{1}{3}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$, $y=6$; таким образом, $(3;6)$ – решение уравнения;

4) при $x=4$: $\frac{1}{4}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$, $y=4$; таким образом, $(4;4)$ – решение уравнения;

5) при $x=5$: $\frac{1}{5}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=\frac{3}{10}$, $y=\frac{10}{3}\notin \boldsymbol{N}$.

Пусть $x \ge 6$. По условию $y \ge x$, следовательно, $y \ge 6$. Тогда $\frac{1}{x}\le\frac{1}{6}$, $\frac{1}{y}\le\frac{1}{6}$, а значит, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$. Таким образом, при $x \ge 6$ и $y \ge x$ решений уравнения нет.

Заметим, что в уравнении $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ переменные x и y равноправны, поэтому, снимая условие $y \ge x$, имеем еще одно решение $(6;3)$. Кроме того, можно сделать вывод, что при $x \ge 6$ или $y \ge 6$ решений уравнения нет.

Ответ: (4; 4), (6; 3), (3; 6).

Пример 11. *Решите в целых числах уравнение*

$$x^2 + 13y^2 - 6xy = 100.$$

Решение. $x^2 + 13y^2 - 6xy = 100 \Leftrightarrow (x-3y)^2 + 4y^2 = 100$. Так как $(x-3y)^2 \ge 0$, то $4y^2 \le 100$, или $|2y| \le 10$. Аналогично, в силу $4y^2 \ge 0$ должно выполняться $|x-3y| \le 10$.

Возможны 12 случаев:

1. $\begin{cases} x-3y=0, \\ 2y=10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15, \\ y=5. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-3y=0, \\ 2y=-10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-15, \\ y=-5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-3y=10, \\ 2y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10, \\ y=0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x-3y=-10, \\ 2y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-10, \\ y=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-3y=6, \\ 2y=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=18, \\ y=4. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x-3y=-6, \\ 2y=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-3y=6, \\ 2y=-8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6, \\ y=-4. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x-3y=-6, \\ 2y=-8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-18, \\ y=-4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-3y=8, \\ 2y=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17, \\ y=3. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x-3y=-8, \\ 2y=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-3y=8, \\ 2y=-6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=-3. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x-3y=-8, \\ 2y=-6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-17, \\ y=-3. \end{cases}$

Ответ: $(\pm 15; \pm 5)$; $(\pm 10; 0)$; $(\pm 18; \pm 4)$; $(\pm 6; \pm 4)$; $(\pm 17; \pm 3)$; $(\pm 1; \pm 3)$.

Пример 12. *Найдите все тройки целых чисел* $(x; y; z)$*, для каждой из которых выполняется условие*

$$3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33.$$

Решение. Пусть $(x_0\,;y_0\,;z_0)$ – тройка чисел, удовлетворяющая условию задачи, тогда

$$3(x_0-3)^2+6y_0^2+2z_0^2+3y_0^2z_0^2=33\,.$$

Отсюда, в частности, следует, что $3(x_0-3)^2\le 33$, т.е. $(x_0-3)^2\le 11$. Поскольку $(x_0-3)^2$ является квадратом целого числа x_0-3, то $(x_0-3)^2$ равно либо 0, либо 1, либо 4, либо 9. Перепишем равенство $3(x_0-3)^2+6y_0^2+2z_0^2+3y_0^2z_0^2=33$ в виде

$$3(x_0-3)^2+(z_0^2+2)\cdot(3y_0^2+2)=37\,.$$

Если $(x_0-3)^2=0$, то $(z_0^2+2)\cdot(3y_0^2+2)=37$. Так как z_0^2+2 и $3y_0^2+2$ целые числа, бóльшие 1, а 37 – простое число, то последнее равенство выполняться не может. Значит, $(x_0-3)^2\ne 0$.

Если $(x_0-3)^2=1$, то $(z_0^2+2)\cdot(3y_0^2+2)=34$. Поскольку $z_0^2+2\ge 2$ и $3y_0^2+2\ge 2$ и z_0^2+2, $3y_0^2+2$ – целые числа, то либо $\begin{cases} z_0^2+2=2, \\ 3y_0^2+2=17, \end{cases}$ либо $\begin{cases} z_0^2+2=17, \\ 3y_0^2+2=2. \end{cases}$ Очевидно, что ни одна из полученных систем не имеет решений в целых числах. Значит, $(x_0-3)^2\ne 1$.

Если $(x_0-3)^2=4$, то $(z_0^2+2)\cdot(3y_0^2+2)=25$, откуда следует, что $\begin{cases} z_0^2+2=5, \\ 3y_0^2+2=5. \end{cases}$ Очевидно, что данная система не имеет решений в целых числах. Значит, $(x_0-3)^2\ne 4$.

Если $(x_0-3)^2=9$, т.е. если $x_0=6$ или $x_0=0$, то $(z_0^2+2)\cdot(3y_0^2+2)=10$. Так как $z_0^2+2\ge 2$ и $3y_0^2+2\ge 2$ и

z_0^2+2, $3y_0^2+2$ – целые числа, то либо $\begin{cases} z_0^2+2=5, \\ 3y_0^2+2=2, \end{cases}$ либо $\begin{cases} z_0^2+2=2, \\ 3y_0^2+2=5. \end{cases}$ Очевидно, что первая система не имеет решений в целых числах, а целочисленными решениями второй системы являются следующие пары $(y_0\,;z_0)$: $(1;0)$ и $(-1;0)$.

Итак, тройка чисел $(x_0\,;y_0\,;z_0)$, удовлетворяющая условию задачи, может быть лишь среди четырех троек: $(6;1;0)$, $(6;-1;0)$, $(0;1;0)$ и $(0;-1;0)$. Легко видеть, что все эти тройки чисел удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $(6;1;0)$, $(6;-1;0)$, $(0;1;0)$, $(0;-1;0)$.

Упражнения

8.28. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$.

Ответ: 1) (6; 6), (12; 4), (4; 12);
2) (3; 3; 3), (2; 4; 4), (4; 4; 2), (4; 2; 4), (2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 3; 2), (6; 2; 3).

8.29. Найдите все тройки целых чисел $(x;y;z)$, для каждой из которых выполняется условие:

1) $5x^2+y^2+3z^2-2yz=30$;

2) $4x^2+3y^2+5z^2-24y-1=0$;

3) $2x^2+y^2+7z^2+2x^2y^2-42z+33=0$.

Ответ: 1) $(1;5;0)$, $(1;-5;0)$, $(-1;5;0)$, $(-1;-5;0)$;
2) $(1;4;3)$, $(1;4;-3)$, $(-1;4;3)$, $(-1;4;-3)$;
3) $(1;0;1)$, $(-1;0;1)$, $(1;0;5)$, $(-1;0;5)$.

8.6. Упражнения на различные методы решения

8.30. Решите в целых числах уравнение:

1) $xy = x + y$; 2) $xy + 1 = x + y$.

Ответ: 1) $(2;2)$, $(0;0)$; 2) $(c;1)$, $(1;d)$, где $c, d \in \mathbf{Z}$.

8.31. Решите в целых числах уравнение:

1) $15x^2 - 11xy + 2y^2 = 7$; 2) $12x^2 - 17xy + 6y^2 = 3$;

3) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

Ответ: 1) $(13;32)$, $(-5;-16)$, $(-13;-32)$, $(5;16)$;
2) $(3;5)$, $(-3;-5)$, $(7;9)$, $(-7;-9)$;
3) $(5;2)$, $(-5;-2)$, $(-1;-2)$, $(1;2)$.

8.32. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^2 - 4xy = 4y^2$; 2) $x^2 + 23 = y^2$; 3) $x^2 = 3y^2 + 2$.

Ответ: 1) $(0;0)$; 2) $(-11;12)$, $(11;-12)$, $(-11;-12)$, $(11;12)$;
3) нет решений.

8.33. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $2^x - 3^y = 1$; 2) $3^x - 2^y = 1$; 3) $3^{2x} - 2^y = 1$.

Ответ: 1) $(2;1)$; 2) $(1;1)$, $(2;3)$; 3) $(1;3)$.

8.34. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $2xy = x^2 + 2y$; 2) $x^2 - xy - 2x + 3y = 10$.

Ответ: 1) $(2;2)$; 2) $(2;10)$, $(10;10)$.

8.35. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^2 = 2(xy - y^2 - y)$; 2) $x \cdot (x+1) = y^2$;

3) $2x^2 + xy - y^2 - 7x - 4y = 1$; 4) $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

Ответ: 1) $(0;0)$, $(-2;-2)$, $(0;-1)$, $(-2;-1)$;
2) $(0;0)$, $(-1;0)$; 3) нет решений;
4) $(4;1)$, $(4;-3)$, $(-4;1)$, $(-4;-3)$.

8.36. Решите в целых числах уравнение:

1) $\sqrt{x - 0{,}2} + \sqrt{y - 0{,}2} = \sqrt{5}$; 2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$.

Ответ: 1) $(1;2)$, $(2;1)$; 2) $(9;0)$, $(0;9)$, $(1;4)$, $(4;1)$.

8.37. Решите в целых числах уравнение:

1) $6x^2+5y^2=74$; 2) $19x^2+28y^2=729$.

Ответ: 1) $(3;2)$, $(-3;2)$, $(3;-2)$, $(-3;-2)$; 2) нет решений.

8.38. Найдите все пары натуральных чисел p и q, для которых $4p^2=q^2-9$.

Ответ: $p=2$, $q=5$.

8.39. Решите в целых числах уравнение:

1) $2x^3+xy-7=0$; 2) $19x^3-84y^2=1984$.

Ответ: 1) $(1;5)$, $(7;97)$, $(-1;-9)$, $(-7;-99)$; 2) нет решений.

8.40. Решите в целых числах уравнение:

1) $2^x+1=y^2$; 2) $3^y=1+x^2$; 3) $x^3-91=y^3$;

4) $y^2-x^2=21$; 5) $x^2+7=y^3$; 6) $y^2=x^3+1$

7) $3\cdot 2^x+1=y^2$; 8) $9^x=4y+1$.

Ответ: 1) $(3;3)$; 2) $(0;0)$; 3) $(6;5)$, $(-5;-6)$, $(4;-3)$, $(3;-4)$; 4) $(5;2)$, $(5;-2)$, $(-5;-2)$, $(-5;2)$, $(11;10)$, $(11;-10)$, $(-11;-10)$, $(-11;10)$; 5) $(1;2)$, $(-1;2)$; 6) $(-1;0)$; 7) $(3;5)$, $(3;-5)$, $(4;7)$, $(4;-7)$, $(0;2)$, $(0;-2)$; 8) $\left(k;\dfrac{9^k-1}{4}\right)$, $k=0,1,2,\ldots$.

8.41. Докажите, что уравнение не имеет решений в целых числах:

1) $x^2-y^2=1982$; 2) $x^2=3y^2+17$; 3) $y^2=5x+6$;

4) $2^x-1=y^2$, $x>1$; 5) $x^2-9y^2=23$; 6) $9x=y^2-2$;

7) $x^2-5y^2=3$.

8.42. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $2xy+4z=zx^2+4y^2z$; 2) $xz+4y=yx^2+z^2y$;

3) $3xy+9z=9zx^2+zy^2$; 4) $x+y+z=xyz$;

5) $3xy+3yz+3xz=5xyz+3$.

Ответ: 1) $(2;1;1)$, $(1;1;2)$; 2) $(2;2;1)$, $(1;2;2)$, $(2;1;2)$; 3) $(1;1;3)$, $(1;3;1)$; 4) $(1;2;3)$, $(1;3;2)$, $(2;1;3)$, $(2;3;1)$, $(3;1;2)$, $(3;2;1)$; 5) $(1;2;3)$, $(1;3;2)$, $(2;1;3)$, $(2;3;1)$, $(3;1;2)$, $(3;2;1)$.

8.43. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^2+y^2+z^2=2xyz$; 2) $x^2-2y^2+8z=3$.

Ответ: 1) $(0;0;0)$; 2) нет решений.

8.44. Решите в целых числах уравнение $\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}}}_{2003}=y$.

Ответ: $(0;0)$.

8.45. Выясните, сколько решений в натуральных числах имеет система

$$\begin{cases} k^2+l=m^2, \\ k+l^2=n^2. \end{cases}$$

Ответ: система решений в натуральных числах не имеет.

8.46. Сколько различных целочисленных пар $(x;y)$ удовлетворяют уравнению $x^2=4y^2+20025$?

Ответ: 30.

§ 9. Функция Эйлера

Важную роль в теории чисел играет ***функция Эйлера*** *(1707–1783)* $\varphi(n)$, значение которой для любого натурального числа n равно количеству натуральных чисел, взаимно простых с n и не превосходящих n, т.е. количеству взаимно простых с n чисел, расположенных в ряду $1, 2, \dots, n$.

Примеры.

1) Всеми числами, взаимно простыми с 20 и находящимися в ряду $1, 2, \dots, 20$, являются: $1,\ 3,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19$. Поэтому $\varphi(20) = 8$.
2) Для любого простого числа p все натуральные числа, меньшие p, взаимно просты с p. Поэтому $\varphi(p) = p - 1$.

Лемма 8. Для любого простого числа p и любого натурального числа k имеет место:

$$\varphi(p^k) = p^{k-1} \cdot (p-1).$$

Доказательство. Очевидно, что любое целое число взаимно просто с p^k тогда и только тогда, когда оно взаимно просто с p. Это означает, что данное число не делится на p.

В отрезке натурального ряда от 1 до p^k содержится в точности p^{k-1} чисел, кратных p. Ими являются: $p, 2p, 3p, \dots, p^{k-1} \cdot p$. Все остальные числа в данном отрезке не делятся на p, а значит, взаимно просты с p^k. Поэтому $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1} \cdot (p-1)$ ■

Отметим одно свойство, связанное с разбиением множества целых чисел $\boldsymbol{Z}$ на классы чисел по модулю m.

Пусть K_r $(r = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ m-1)$ – какой-либо класс чисел по модулю m, состоящий из всех целых чисел, которые при делении с остатком на m дают в остатке r, т.е. из чисел, представимых в виде $u = mq + r \ (q \in \boldsymbol{Z})$.

Так как $r = u - mq$, то всякий общий делитель чисел u и m является делителем чисел m и r. Обратно, всякий общий делитель чисел m и r есть делитель чисел u и m. Отсюда вытекает справедливость одного из следующих двух утверждений:

1) Всякое число из K_r взаимно просто с m.
2) Ни одно число из K_r не взаимно просто с m.

Поэтому существует в точности $\varphi(m)$ классов чисел по модулю m, все числа которых взаимно просты с m. Эти классы называют взаимно простыми с модулем. Значит, *в любой полной системе вычетов по модулю m содержится в точности $\varphi(m)$ чисел, взаимно простых с m.* Данное свойство (выделенное курсивом) будет использоваться при доказательстве леммы 9 о *мультипликативности* функции Эйлера.

Лемма 9. Если $a, b \in \boldsymbol{N}$ и $НОД(a, b) = 1$, то

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Доказательство. Очевидно, можем считать, что $a > 1$ и $b > 1$, поскольку $\varphi(1) = 1$.

Всякое натуральное число u из отрезка натурального ряда $1, 2, 3, \dots, ab$ однозначно представляется в виде $u = xb + r$, где $x = 0, 1, 2, \dots, a-1$; $r = 1, 2, \dots, b$, при этом все числа указанного вида содержатся в данном отрезке. Для наглядности дальнейших рассуждений представим числа $1, 2, 3, \dots, ab$ в виде таблицы:

r / ***x***	**1**	**2**	**3**	**…**	***b***
0	1	2	3	…	b
1	$b + 1$	$b + 2$	$b + 3$	…	$2b$
2	$2b + 1$	$2b + 2$	$2b + 3$	…	$3b$
…	…	…	…	…	…
***a* – 1**	$(a-1) \cdot b + 1$	$(a-1) \cdot b + 2$	$(a-1) \cdot b + 3$	…	ab

Пусть x – фиксировано (в этом случае мы рассматриваем какую-то определенную строку таблицы). Тогда числа $u = xb + r$ ($r = 1, 2, \ldots, b$) образуют полную систему вычетов по модулю b.

Пусть r – фиксировано (в этом случае мы рассматриваем какой-то определенный столбец таблицы). Тогда числа $u = xb + r$ ($x = 0, 1, 2, \ldots, a-1$) образуют полную систему вычетов по модулю a.

Согласно свойству, доказанному выше, среди чисел $u = xb + r$ при каждом фиксированном значении x содержится $\varphi(b)$ чисел, взаимно простых с b, а при каждом фиксированном r содержится $\varphi(a)$ чисел, взаимно простых с a.

Таким образом, в отрезке натурального ряда $1, 2, 3, \ldots, ab$ содержится (в силу взаимной простоты чисел a и b) в точности $\varphi(a) \cdot \varphi(b)$ чисел, которые одновременно взаимно просты и с a, и с b, т.е. которые (см. § 1, лемма 4) взаимно просты с произведением ab. Это значит, что $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a \cdot b)$ ■

Замечание. Утверждение леммы неверно, если числа a и b не являются взаимно простыми. Например, при $a = 2$, $b = 4$ имеем: $\varphi(2) = 1$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(2) \cdot \varphi(4) = 2$, $\varphi(2 \cdot 4) = \varphi(8) = 4$. Таким образом, $\varphi(a) \cdot \varphi(b) \neq \varphi(a \cdot b)$, если $НОД(a, b) \neq 1$.

Теорема 16. Пусть натуральное число $n > 1$ задано в каноническом виде

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s} .$$

Тогда

$$\varphi(n) = p_1^{k_1 - 1} \cdot p_2^{k_2 - 1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s - 1} \cdot (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_s - 1) .$$

Доказательство. Справедливость указанного равенства вытекает из двух предыдущих лемм:

$$\varphi\left(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}\right)=\varphi\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\varphi\left(p_2^{k_2}\right)\cdot\ldots\cdot\varphi\left(p_s^{k_s}\right)=$$
$$=p_1^{k_1-1}\cdot(p_1-1)\cdot p_2^{k_2-1}\cdot(p_2-1)\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s-1}\cdot(p_s-1)\ \blacksquare$$

Пример. Найдите количество натуральных чисел, не превосходящих числа 120 и взаимно простых с ним.

Решение.

$$\varphi(120)=\varphi(2^3\cdot 3^1\cdot 5^1)=2^2\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot(2-1)\cdot(3-1)\cdot(5-1)=32.$$

Ответ: 32.

Отметим одно интересное свойство, связанное с функцией Эйлера.

Лемма 10. Для любого простого числа p и любого натурального k выполняется равенство:

$$p^k=\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\ldots+\varphi(p^k).$$

Доказательство. Используя свойство $\varphi(p^k)=p^{k-1}\cdot(p-1)$ для простого числа p, имеем:

$$\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\ldots+\varphi(p^k)=$$
$$=1+(p-1)+p\cdot(p-1)+p^2\cdot(p-1)+\ldots+p^{k-1}\cdot(p-1)=$$
$$=(1-1)+(p-p)+(p^2-p^2)+\ldots+(p^{k-1}-p^{k-1})+p^k=p^k\ \blacksquare$$

Функция Эйлера используется в следующем *соотношении Гаусса (1777–1855)*.

Теорема 17. Для любого натурального числа $n>1$ имеет место

$$n=\sum_{n\,\vdots\,d}\varphi(d),$$

где суммирование производится по всем натуральным делителям d числа n.

Доказательство. Представим n в каноническом виде:

$$n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}.$$

Тогда делителями n являются всевозможные числа вида

$$p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{l_s}\text{, где } 0 \le l_i \le k_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Используя уже известные свойства функции Эйлера, получим:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s} = (\varphi(1) + \varphi(p_1) + \varphi(p_1^2) + \ldots + \varphi(p_1^{k_1})) \times$$

$$\times (\varphi(1) + \varphi(p_2) + \varphi(p_2^2) + \ldots + \varphi(p_2^{k_2})) \times \ldots \times$$

$$\times (\varphi(1) + \varphi(p_s) + \varphi(p_s^2) + \ldots + \varphi(p_s^{k_s})) =$$

$$= \sum_{0 \le l_i \le k_i} \left(\varphi(p_1^{l_1}) \cdot \varphi(p_2^{l_2}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_s^{l_s}) \right) = \sum_{0 \le l_i \le k_i} \varphi(p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{l_s}) =$$

$$= \sum_{n \vdots d} \varphi(d) \ \ \blacksquare$$

Следующая теорема называется ***теоремой Эйлера***. Она считается одной из фундаментальных теорем теории чисел.

Теорема 18 ***(Эйлер).*** Если $НОД(a, n) = 1$ ($a \in \boldsymbol{Z}$), то

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Доказательство. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_c$, где $c = \varphi(n)$, – все числа из совокупности $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, взаимно простые с n. Пусть r – одно из чисел r_i. Тогда $a \cdot r = q \cdot n + r_0$, $0 \le r_0 < n$. Если r_0 и n имеют общий простой делитель p, то ar делится на p. Но это невозможно, т.к. $НОД(a, n) = 1$ и $НОД(r, n) = 1$. Следовательно, $НОД(r_0, n) = 1$ и число r_0 содержится среди $r_1, r_2, \ldots, r_c$. Таким образом, для любого индекса i, $1 \le i \le c$, выполнено

$$ar_i \equiv r_{a(i)} \pmod{n},$$

где $a(i)$ – некоторое число из совокупности $1, 2, 3, \ldots, c$.

Если $a(j) = a(i)$, то должно выполняться $ar_j \equiv ar_i \pmod{n}$, т.е. $n \,\big|\, a \cdot (r_j - r_i)$. Поскольку $НОД(a, n) = 1$, то $n \,\big|\, (r_j - r_i)$. Но последнее невозможно, т.к. $1 \le |r_j - r_i| < n$. Итак, набор чисел $a(1), a(2), \dots, a(c)$ есть некоторая перестановка чисел $1, 2, \dots, c$ и

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_c = r_{a(1)} \cdot r_{a(2)} \cdot \ldots \cdot r_{a(c)}.$$

Перемножим теперь для всех i, $1 \le i \le c$, сравнения $ar_i \equiv r_{a(i)} \pmod n$. Получим

$$a^c \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_c \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_c \pmod n.$$

Так как $НОД(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_c, n) = 1$, то по свойству сравнений $a^c \equiv 1 \pmod n$, т.е. $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ ■

Следствие (малая теорема Ферма). Если p – простое число и $p \nmid a$, то

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Доказательство. Так как $\varphi(p) = p - 1$, то, согласно теореме Эйлера, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ ■

Упражнения

9.1.* Вычислите: 1) $\varphi(1764)$; 2) $\varphi(2000)$; 3) $\varphi(261360)$.

Ответ: 1) 504; 2) 800; 3) 63360.

9.2. Найдите натуральное число x, если:

1) $\varphi(6^x) = 72$; 2) $\varphi(12^x) = 6912$; 3) $\varphi(15^x) = 1800$.

Ответ: 1) 3; 2) 4; 3) 3.

9.3. Найдите натуральное число a, если для некоторых натуральных чисел m и n:

1) $\varphi(a) = 108$ и $a = 3^m \cdot 7^n$; 2) $\varphi(a) = 440$ и $a = 2^m \cdot 11^n$;

3) $\varphi(a) = 936$ и $a = 3^m \cdot 13^n$.

Ответ: 1) 189; 2) 968; 3) 1521.

9.4.* Найдите количество натуральных чисел:

1) не превосходящих числа 605 и имеющих с этим числом наибольший общий делитель, равный 5;
2) не превосходящих числа 1680 и имеющих с ним наибольший общий делитель, равный 24.

Ответ: 1) 110; 2) 24.

9.5.* Докажите, что для любого целого числа $m \geq 2$ сумма всех натуральных чисел, не превосходящих числа m и взаимно простых с m, равна $0{,}5 \cdot m \cdot \varphi(m)$.

9.6.* Найдите все натуральные числа n, для которых имеет место равенство $n = 2 \cdot \varphi(n)$.

Ответ: $n = 2^k$ $(k \in \boldsymbol{N})$.

9.7.* Докажите ***малую теорему Ферма*** (в обобщенной формулировке), не опираясь на теорему Эйлера: если p – простое число, то для любого $a \in \boldsymbol{Z}$ имеет место сравнение $a^p \equiv a \pmod{p}$.

9.8. Найдите остаток от деления: 1)* 100^{100} на 101; 2)* 2^{30} на 13;
3) 3^{50} на 17; 4)* 21^{83} на 24; 5)* 120^{422} на 385;
6) 35^{150} на 425; 7) $3^{100} + 4^{100}$ на 7; 8)* $3 \cdot 5^{75} + 4 \cdot 7^{100}$ на 132.

Ответ: 1) 1; 2) 12; 3) 9; 4) 21; 5) 155; 6) 375; 7) 1; 8) 7.

9.9.* Докажите, что при любом целом n число $n^7 - n$ делится на 42.

9.10.* Докажите, что если целое число a не делится на 5, то число $a^{12} - 1$ делится на 5.

9.11.* Докажите, что если p – простое число, то для любых целых чисел a и b число $a^p - b$ делится на p тогда и только тогда, когда число $a - b$ делится на p.

9.12. Докажите, что если:

1)* число $a^{6m} + a^{6n}$ делится на 7, то и число a делится на 7;

2) число $a^{10m} + a^{10n}$ делится на 11, то и число a делится на 11.

9.13.* Докажите, что если каждое из целых чисел a и b взаимно просто с числом 65, то число $a^{12} - b^{12}$ делится на 65.

9.14. Докажите, что если целые числа a и b взаимно просты, то:

1)* каждое из чисел $2a^5 + b^5$ и $2a^5 - b^5$ не делится на 11;

2) каждое из чисел $2a^3 + b^3$ и $2a^3 - b^3$ не делится на 7;

3) каждое из чисел $2a^3 + b^3$ и $2a^3 - b^3$ не делится на 13.

9.15. Найдите все такие натуральные числа n, что:

1)* число $2^n - 9$ делится на 7; 2) число $2^n - 1$ делится на 5.

Ответ: 1) $n = 3k + 1$; 2) $n = 4k$.

9.16.* Пусть p и q – такие различные простые числа, что число $p - 1$ является делителем числа $q - 1$. Докажите, что для любого целого числа a, взаимно простого с pq, имеет место сравнение $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

9.17.* Докажите, что если p и q произвольные простые числа, то для любого целого числа a имеет место сравнение $qa^p + pa^q \equiv (p+q)\cdot a \pmod{pq}$.

9.18.* Пусть p и q – различные простые числа. Докажите, что в этом случае имеет место сравнение $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

О решении уравнений в рациональных числах

К задаче решения в целых числах диофантовых уравнений тесно примыкает задача отыскания всех рациональных решений подобных уравнений. Она сама по себе довольно сложна и выделяется в отдельный самостоятельный раздел математики. Несмотря на то, что рассмотрение теоретических и практических аспектов решения этой задачи выходит за рамки тематики данного пособия, авторы посчитали нужным затронуть (на примерах) те идеи, которые позволяют найти в рациональных числах все решения диофантовых уравнений второго порядка от двух переменных.

Пример 1. Решите уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ в рациональных числах.

Решение. Уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ задает на плоскости кривую второго порядка (гиперболу). Найдем на кривой произвольную точку с *рациональными* (!!) координатами. Это равносильно нахождению какого-либо рационального решения исходного уравнения и обычно осуществляется методом подбора. Очевидное рациональное решение: $(x_0\,;\,y_0) = (1\,;\,0)$.

Всевозможные прямые, проведенные через точку $(x_0\,;\,y_0)$, могут пересекать график кривой $x^2 - 2y^2 = 1$ не более, чем в одной точке (это следует из теории кривых второго порядка).

Заметим, что вертикальная прямая $x = 1$ не имеет других общих точек с кривой $x^2 - 2y^2 = 1$. Это равносильно тому, что при $x = 1$ нет других рациональных решений исходного уравнения, кроме $(x_0\,;\,y_0) = (1\,;\,0)$.

Проведем через точку $(x_0\,;\,y_0)$ прямую с угловым коэффициентом k, ее уравнение в общем виде: $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$. В нашем случае уравнение прямой будет $y = k \cdot (x - 1)$. Подставим $y = k \cdot (x - 1)$ в уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$, получим:

$$x^2 - 2k^2 \cdot (x-1)^2 = 1, \text{ или } (x-1)\cdot(x+1) - 2k^2 \cdot (x-1)^2 = 0.$$

Вынося в последнем уравнении множитель $(x-1)$ за скобку и сокращая на него (т.к. решение уравнения при $x = 1$ уже найдено), получим $x = \dfrac{2k^2+1}{2k^2-1}$. Тогда $y = k \cdot \left(\dfrac{2k^2+1}{2k^2-1} - 1 \right)$, или $y = \dfrac{2k}{2k^2-1}$.

Если переменная k будет принимать всевозможные *рациональные* (!!) значения, то будут найдены все остальные (помимо $(1;0)$) рациональные решения исходного уравнения.

Ответ: $(1;0)$, $\begin{cases} x = \dfrac{2k^2+1}{2k^2-1}, \\ y = \dfrac{2k}{2k^2-1}, \end{cases}$ где $k \in \boldsymbol{Q}$.

Пример 2. Решите уравнение $x^2 + 3y^2 = 1$ в рациональных числах.

Решение. Уравнение $x^2 + 3y^2 = 1$ задает на плоскости кривую второго порядка (эллипс). Найдем на кривой произвольную точку с *рациональными* (!!) координатами. Это равносильно нахождению какого-либо рационального решения исходного уравнения. Очевидное рациональное решение: $(x_0 ; y_0) = (1;0)$.

Всевозможные прямые, проведенные через точку $(x_0 ; y_0)$, могут пересекать график кривой $x^2 + 3y^2 = 1$ не более, чем в одной точке.

Заметим, что вертикальная прямая $x = 1$ не имеет других общих точек с кривой $x^2 + 3y^2 = 1$. Это равносильно тому, что при $x = 1$ нет других рациональных решений исходного уравнения, кроме $(x_0 ; y_0) = (1;0)$.

Проведем через точку $(x_0 ; y_0)$ прямую с угловым коэффициентом k, ее уравнение в нашем случае будет $y = k \cdot (x-1)$. Подставим $y = k \cdot (x-1)$ в уравнение $x^2 + 3y^2 = 1$, получим:

$$x^2 + 3k^2 \cdot (x-1)^2 = 1, \text{ или } (x-1)\cdot(x+1) + 3k^2 \cdot (x-1)^2 = 0.$$

Вынося в последнем уравнении множитель $(x-1)$ за скобку и сокращая на него (т.к. решение уравнения при $x=1$ уже найдено), получим $x=\dfrac{3k^2-1}{3k^2+1}$.

Тогда $y=k\cdot\left(\dfrac{3k^2-1}{3k^2+1}-1\right)$, или $y=-\dfrac{2k}{3k^2+1}$.

Если переменная k будет принимать всевозможные *рациональные* (!!) значения, то будут найдены все остальные (помимо $(1;0)$) рациональные решения исходного уравнения.

Ответ: $(1;0)$, $\begin{cases} x=\dfrac{3k^2-1}{3k^2+1}, \\ y=-\dfrac{2k}{3k^2+1}, \end{cases}$ где $k\in\boldsymbol{Q}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Варианты контрольных работ

В приложении приведены образцы вариантов двух контрольных работ. Каждая из них рассчитана по времени на один академический час. Эти работы проводились авторами при изучении темы «Делимость, сравнения и диофантовы уравнения» в 10-х и 11-х классах школ города Зеленограда.

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Известно, что сумма нескольких натуральных чисел делится на 6. Доказать, что сумма кубов этих чисел тоже делится на 6.
2. Найти остаток от деления: 6^{192} на 17.
3. Найти остаток от деления: $2^{2^{2003}}$ на 13.
4. Решить сравнение: $x^2 + 5x + 7 \equiv 1 \pmod{11}$.
5. Решить систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{3}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}. \end{cases}$

Вариант 2

1. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.
2. Найти остаток от деления: 11^{644} на 19.
3. Найти остаток от деления: $3^{2^{2003}}$ на 7.
4. Решить сравнение: $2x^2 + 5x + 1 \equiv -1 \pmod{7}$.
5. Решить систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv -2 \pmod{4}, \\ x \equiv 1 \pmod{7}. \end{cases}$

Вариант 3

1. Доказать, что из пяти чисел всегда можно выбрать два таких, у которых разность квадратов делится на 7.
2. Найти остаток от деления: 15^{254} на 17.
3. Найти остаток от деления: $5^{3^{2003}}$ на 8.
4. Решить сравнение: $3x^2 - 2x - 1 \equiv 0 \pmod 9$.
5. Решить систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5, \\ x \equiv 1 \pmod 7. \end{cases}$

Вариант 4

1. Доказать, что если натуральное число четно и не делится на 4, то у него столько же положительных четных делителей, сколько нечетных.
2. Найти остаток от деления: 12^{316} на 19.
3. Найти остаток от деления: $3^{5^{2003}}$ на 8.
4. Решить сравнение: $5x^2 - 4x + 2 \equiv 3 \pmod 7$.
5. Решить систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv -1 \pmod 5, \\ x \equiv 4 \pmod 9. \end{cases}$

Вариант 5

1. Имелся лист бумаги, который был разрезан на 7 кусков. Некоторые из этих кусков опять разрезали на 7 частей. Затем некоторые из получившихся кусков вновь разрезали на 7 частей и так далее несколько раз. Можно ли в результате получить ровно 2003 куска?
2. Найти остаток от деления: 9^{142} на 7.
3. Найти остаток от деления: $2^{3^{2003}}$ на 6.
4. Решить сравнение: $x^2 + 9x + 10 \equiv 1 \pmod{13}$.
5. Решить систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv -3 \pmod{11}, \\ x \equiv -2 \pmod 9. \end{cases}$

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Решить в целых числах уравнение $6x-17y=11$.
2. Найти первые три положительные решения уравнения Пелля
$$x^2-14y^2=1.$$
3. Решить в целых числах уравнение
$$6x^2y+4x^2-5xy-8x+y+3=0.$$
4. Решить в рациональных числах уравнение $x^2+2y^2=3$.

Вариант 2

1. Решить в целых числах уравнение $12x+7y=-1$.
2. Найти первые три положительные решения уравнения Пелля
$$x^2-18y^2=1.$$
3. Решить в целых числах уравнение
$$4x^2y-12x^2+3xy+11x-y-2=0.$$
4. Решить в рациональных числах уравнение $x^2=2y^2+x$.

Вариант 3

1. Решить в целых числах уравнение $4x-11y=3$.
2. Найти первые три положительные решения уравнения Пелля
$$x^2-10y^2=1.$$
3. Решить в целых числах уравнение
$$6x^2y-3x^2-5xy-2x+y+1=0.$$
4. Решить в рациональных числах уравнение $x^2+xy+y^2=4$.

Вариант 4

1. Решить в целых числах уравнение $19x+5y=-4$.
2. Найти первые три положительные решения уравнения Пелля
$$x^2-11y^2=1.$$
3. Решить в целых числах уравнение
$$3x^2y+9x^2-5xy+6x-2y+1=0.$$
4. Решить в рациональных числах уравнение $2x^2=y^2+x$.

Вариант 5

1. Решить в целых числах уравнение $11x + 20y = -7$.
2. Найти первые три положительные решения уравнения Пелля
$$x^2 - 7y^2 = 1.$$
3. Решить в целых числах уравнение
$$2x^2y - 2x^2 - 5xy - 5x - 3y - 2 = 0.$$
4. Решить в рациональных числах уравнение $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Решения, указания и ответы

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Решение. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – натуральные числа и $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ делится на 6. Докажем, что $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$ также делится на 6. Для этого рассмотрим таблицу остатков при делении на 6 для произвольного натурального числа и его куба:

x	0	1	2	3	4	5
x^3	0	1	2	3	4	5

Из таблицы видно, что $x \equiv x^3 \pmod 6$. Поэтому
$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n \equiv 0 \pmod 6.$$

2. Ответ: $6^{192} \equiv 1 \pmod{17}$.

3. Ответ: $2^{2^{2003}} \equiv 9 \pmod{13}$.

4. Решение.
$$x^2 + 5x + 7 \equiv 1 \pmod{11} \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)\cdot(x+3) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Так как число 11 – простое, то произведение $(x+2)\cdot(x+3)$ может делиться на 11, если хотя бы один из сомножителей делится на 11. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x+2 \equiv 0 \pmod{11}, \\ x+3 \equiv 0 \pmod{11}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \equiv 8 \pmod{11}, \\ x \equiv 9 \pmod{11}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \equiv 8 \pmod{11}$, $x \equiv 9 \pmod{11}$.

5. Решение.

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{3}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \equiv -5 \pmod{15}, \\ 3x \equiv 9 \pmod{15}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \equiv -5 \pmod{15}, \\ 6x \equiv 18 \pmod{15}. \end{cases}$$

Вычитая из второго сравнения первое, получим $x \equiv 8 \pmod{15}$.

Ответ: $x \equiv 8 \pmod{15}$.

Вариант 2

1. Решение. Заметим, что три последовательных натуральных числа при делении на 3 дают остатки $0, 1, 2$.

Числа, делящиеся на 3, имеют вид $3k$. Тогда $(3k)^3 = 9 \cdot (3k^3) \equiv 0 \pmod{9}$.

Числа, дающие при делении на 3 остаток 1, имеют вид $3k+1$. Тогда $(3k+1)^3 = 9 \cdot (3k^3 + 3k + k) + 1 \equiv 1 \pmod{9}$.

Числа, дающие при делении на 3 остаток 2, имеют вид $3k+2$. Тогда $(3k+2)^3 = 9 \cdot (3k^3 + 6k + 4k) + 8 \equiv 8 \pmod{9}$.

Итак, сумма кубов трех последовательных натуральных чисел будет иметь при делении на 9 остаток: $0+1+8 = 9 \equiv 0 \pmod{9}$. Что и требовалось доказать.

2. Ответ: $11^{644} \equiv 7 \pmod{19}$.

3. Ответ: $3^{2^{2003}} \equiv 2 \pmod{7}$.

4. Ответ: $x \equiv 3 \pmod{7}$, $x \equiv 5 \pmod{7}$.

5. Ответ: $x \equiv 22 \pmod{28}$.

Вариант 3

1. Решение. Рассмотрим таблицу остатков при делении на 7 для квадрата произвольного целого числа x:

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

Из таблицы видно, что различных остатков – четыре: 0, 1, 2, 4. Чисел же, по условию, – пять. Поэтому среди них всегда найдутся два числа, квадраты которых будут иметь одинаковые остатки при делении на 7. Следовательно, разность квадратов этих чисел будет делиться на 7.

2. Ответ: $15^{254} \equiv 13 \pmod{17}$.

3. Ответ: $5^{3^{2003}} \equiv 5 \pmod{8}$.

4. Ответ: $x \equiv 1 \pmod{9}$.

5. Ответ: $x \equiv 22 \pmod{35}$.

Вариант 4

1. Решение. Пусть x – произвольное четное число, которое не делится на 4. Тогда $x = 2k$, где k – нечетное число. Рассмотрим всевозможные положительные делители $k_1, k_2, \dots, k_n$ числа k (они все нечетны и среди них имеется делитель, равный 1). Тогда $k_1, k_2, \dots, k_n$ будут нечетными делителями числа x. Причем других нечетных делителей у числа x нет. Очевидно, что $2k_1, 2k_2, \dots, 2k_n$ – это *все* четные делители x. Таким образом, количество нечетных делителей числа x равно количеству его четных делителей.

2. Ответ: $12^{316} \equiv 7 \pmod{19}$.

3. Ответ: $3^{5^{2003}} \equiv 3 \pmod{8}$.

4. Ответ: $x \equiv 1 \pmod{7}$, $x \equiv 4 \pmod{7}$.

5. Ответ: $x \equiv 4 \pmod{45}$.

Вариант 5

1. Решение. Заметим, что при каждом новом разрезании количество кусков бумаги (обозначим его через x) увеличивается на 6. Поэтому $x = 6k + 1$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, или $x \equiv 1 \pmod{6}$. Найдем остаток при делении на 6 числа 2003: $2003 = 6 \cdot 333 + 5$, или $2003 \equiv 5 \pmod 6$. Итак, $x \not\equiv 2003 \pmod 6$, а значит, ни на каком шаге разрезания *невозможно получить* 2003 куска бумаги.

2. Ответ: $9^{142} \equiv 2 \pmod 7$.

3. Ответ: $2^{3^{2003}} \equiv 2 \pmod 6$.

4. Ответ: Нет решений.

5. Ответ: $x \equiv 52 \pmod{99}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Ответ: $\begin{cases} x = -1 + 17t, \\ y = -1 + 6t, \end{cases}$ где $t \in \boldsymbol{Z}$.

2. Решение. Наименьшее положительное решение уравнения $(x_1\,;\,y_1) = (15\,;\,4)$. Рекуррентные формулы: $\begin{cases} x_{n+1} = 15x_n + 56y_n, \\ y_{n+1} = 4x_n + 15y_n. \end{cases}$

Ответ: $(15;4)$, $(449;120)$, $(13455;3596)$.

3. Решение. Решая это уравнение как квадратное с неизвестным x, получим: дискриминант $D = (y-4)^2$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{y+3}{3y+2}$. Так как x_1 – число нецелое, то удовлетворять условию задания может лишь x_2. Имеем: $(3y+2)\cdot x = y+3$, или $(3y+2)\cdot(3x-1) = 7$. Возможны четыре случая:

1) $\begin{cases} 3x-1=1, \\ 3y+2=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-1=-1, \\ 3y+2=-7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x-1=7, \\ 3y+2=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-1=-7, \\ 3y+2=-1. \end{cases}$

Ответ: $(0;-3)$, $(-2;-1)$.

4. Решение. Подбором находим частное решение уравнения: $(x_0\,;\,y_0) = (1\,;1)$. Вертикальная прямая $x = 1$ пересекает кривую, задаваемую уравнением $x^2 + 2y^2 = 3$, еще в одной точке с рациональными координатами: $(x_1\,;\,y_1) = (1\,;\,-1)$. Это также одно из решений исходного уравнения. Для нахождения остальных решений уравнения $x^2 + 2y^2 = 3$ следует провести через точку $(x_0\,;\,y_0) = (1\,;\,1)$ всевозможные прямые вида $y = k \cdot (x-1) + 1$. Подставив последнее выражение для переменной y в исходное уравнение, получим: $x = \dfrac{2k^2 - 4k - 1}{2k^2 + 1}$. Отсюда $y = \dfrac{-2k^2 - 2k + 1}{2k^2 + 1}$.

Ответ: $(1\,;\,\pm 1)$, $\begin{cases} x = \dfrac{2k^2 - 4k - 1}{2k^2 + 1}, \\ y = \dfrac{-2k^2 - 2k + 1}{2k^2 + 1}, \end{cases}$ где $k \in \boldsymbol{Q}$.

Вариант 2

1. Ответ: $\begin{cases} x = -3 - 7t\,, \\ y = 5 + 12t\,, \end{cases}$ где $t \in \boldsymbol{Z}$.

2. Решение. Наименьшее положительное решение уравнения $(x_1\,;\,y_1) = (17\,;\,4)$. Рекуррентные формулы: $\begin{cases} x_{n+1} = 17x_n + 72y_n\,, \\ y_{n+1} = 4x_n + 17y_n\,. \end{cases}$

Ответ: $(17\,;\,4)$, $(577\,;\,136)$, $(19601\,;\,4620)$.

3. Решение. Решая это уравнение как квадратное с неизвестным x, получим: дискриминант $D = 25 \cdot (y+1)^2$, $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = -\dfrac{y+2}{y-3}$. Так как x_1 – число нецелое, то удовлетворять условию задания может лишь x_2. Имеем: $(3-y) \cdot x = y + 2$, или $(3-y) \cdot (x+1) = 5$. Возможны четыре случая:

1) $\begin{cases} x + 1 = 1, \\ 3 - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 1 = -1, \\ 3 - y = -5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 1 = 5, \\ 3 - y = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 1 = -5, \\ 3 - y = -1. \end{cases}$

Ответ: $(0\,;\,-2)$, $(-2\,;\,8)$, $(4\,;\,2)$, $(-6\,;\,4)$.

4. Решение. Подбором находим частное решение уравнения: $(x_0\,;\,y_0)=(0\,;\,0)$. Вертикальная прямая $x=0$ не имеет с кривой, задаваемой уравнением $x^2=2y^2+x$, других общих точек. Для нахождения остальных решений уравнения $x^2=2y^2+x$ следует провести через точку $(x_0\,;\,y_0)=(0\,;\,0)$ всевозможные прямые вида $y=kx$. Подставив последнее выражение для переменной y в исходное уравнение, получим: $x=\dfrac{1}{1-2k^2}$. Отсюда $y=\dfrac{k}{1-2k^2}$.

Ответ: $(0\,;\,0)$, $\begin{cases} x=\dfrac{1}{1-2k^2}, \\ y=\dfrac{k}{1-2k^2}, \end{cases}$ где $k\in\boldsymbol{Q}$.

Вариант 3

1. Ответ: $\begin{cases} x=-2+11t, \\ y=-1+4t, \end{cases}$ где $t\in\boldsymbol{Z}$.

2. Решение. Наименьшее положительное решение уравнения $(x_1\,;\,y_1)=(19\,;\,6)$. Рекуррентные формулы: $\begin{cases} x_{n+1}=19x_n+60y_n, \\ y_{n+1}=6x_n+19y_n. \end{cases}$

Ответ: $(19\,;\,6)$, $(721\,;\,228)$, $(27379\,;\,8658)$.

3. Решение. Решая это уравнение как квадратное с неизвестным x, получим: дискриминант $D=(y+4)^2$, $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=\dfrac{y+1}{2y-1}$. Так как x_1 – число нецелое, то удовлетворять условию задания может лишь x_2. Имеем: $(2y-1)\cdot x=y+1$, или $(2y-1)\cdot(2x-1)=3$. Возможны четыре случая:

1) $\begin{cases} 2x-1=1, \\ 2y-1=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-1=-1, \\ 2y-1=-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-1=3, \\ 2y-1=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-1=-3, \\ 2y-1=-1. \end{cases}$

Ответ: $(0\,;\,-1)$, $(2\,;\,1)$, $(1\,;\,2)$, $(-1\,;\,0)$.

4. Решение. Подбором находим частное решение уравнения: $(x_0\,;\,y_0)=(2\,;\,0)$. Вертикальная прямая $x=2$ пересекает кривую, задаваемую уравнением $x^2+xy+y^2=4$, еще в одной точке с рациональными координатами: $(x_1\,;\,y_1)=(2\,;-2)$. Это также одно из решений исходного уравнения. Для нахождения остальных решений уравнения $x^2+xy+y^2=4$ следует провести через точку $(x_0\,;\,y_0)=(2\,;\,0)$ всевозможные прямые вида $y=k\cdot(x-2)$. Подставив последнее выражение для переменной y в исходное уравнение, получим: $x=\dfrac{2k^2-2}{k^2+k+1}$. Отсюда $y=\dfrac{-2k^2-4k}{k^2+k+1}$.

Ответ: $(2\,;\,0)$, $(2\,;-2)$, $\begin{cases} x=\dfrac{2k^2-2}{k^2+k+1}, \\ y=\dfrac{-2k^2-4k}{k^2+k+1}, \end{cases}$ где $k\in\boldsymbol{Q}$.

Вариант 4

1. Ответ: $\begin{cases} x=-1-5t\,, \\ y=3+19t\,, \end{cases}$ где $t\in\boldsymbol{Z}$.

2. Решение. Наименьшее положительное решение уравнения $(x_1\,;\,y_1)=(10\,;\,3)$. Рекуррентные формулы: $\begin{cases} x_{n+1}=10x_n+33y_n\,, \\ y_{n+1}=3x_n+10y_n\,. \end{cases}$

Ответ: $(10\,;3)$, $(199\,;60)$, $(3970\,;1197)$.

3. Решение. Решая это уравнение как квадратное с неизвестным x, получим: дискриминант $D=49y^2$, $x_1=-\dfrac{1}{3}$, $x_2=\dfrac{2y-1}{y+3}$. Так как x_1 – число нецелое, то удовлетворять условию задания может лишь x_2. Имеем: $(y+3)\cdot x=2y-1$, или $(y+3)\cdot(x-2)=-7$. Возможны четыре случая:

1) $\begin{cases} x-2=1, \\ y+3=-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2=-1, \\ y+3=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2=7, \\ y+3=-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-2=-7, \\ y+3=1. \end{cases}$

Ответ: $(3;-10)$, $(1;4)$, $(9;-4)$, $(-5;-2)$.

4. Решение. Подбором находим частное решение уравнения: $(x_0\,;\,y_0)=(0\,;0)$. Вертикальная прямая $x=0$ не имеет с кривой, задаваемой уравнением $2x^2=y^2+x$, других общих точек. Для нахождения остальных решений уравнения $2x^2=y^2+x$ следует провести через точку $(x_0\,;\,y_0)=(0\,;0)$ всевозможные прямые вида $y=kx$. Подставив последнее выражение для переменной y в исходное уравнение, получим: $x=\dfrac{1}{2-k^2}$. Отсюда $y=\dfrac{k}{2-k^2}$.

Ответ: $(0\,;0)$, $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2-k^2}, \\ y=\dfrac{k}{2-k^2}, \end{cases}$ где $k\in\boldsymbol{Q}$.

Вариант 5

1. Ответ: $\begin{cases} x=3-20t, \\ y=-2+11t, \end{cases}$ где $t\in\boldsymbol{Z}$.

2. Решение. Наименьшее положительное решение уравнения $(x_1\,;\,y_1)=(8\,;3)$. Рекуррентные формулы: $\begin{cases} x_{n+1}=8x_n+21y_n, \\ y_{n+1}=3x_n+8y_n. \end{cases}$

Ответ: $(8;3)$, $(127;48)$, $(2024;765)$.

3. Решение. Решая это уравнение как квадратное с неизвестным x, получим: дискриминант $D=(7y+3)^2$, $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{3y+2}{y-1}$. Так как x_1 – число нецелое, то удовлетворять условию задания может лишь x_2. Имеем: $(y-1)\cdot x=3y+2$, или $(y-1)\cdot(x-3)=5$. Возможны четыре случая:

1) $\begin{cases} x-3=1, \\ y-1=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-3=-1, \\ y-1=-5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-3=5, \\ y-1=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-3=-5, \\ y-1=-1. \end{cases}$

Ответ: $(4;6)$, $(2;-4)$, $(8;2)$, $(-2;0)$.

4. Решение. Подбором находим частное решение уравнения: $(x_0\,;y_0)=(1;0)$. Вертикальная прямая $x=1$ пересекает кривую, задаваемую уравнением $x^2-xy+y^2=1$, еще в одной точке с рациональными координатами: $(x_1\,;y_1)=(1;1)$. Это также одно из решений исходного уравнения. Для нахождения остальных решений уравнения $x^2-xy+y^2=1$ следует провести через точку $(x_0\,;y_0)=(1;0)$ всевозможные прямые вида $y=k\cdot(x-1)$. Подставив последнее выражение для переменной y в исходное уравнение, получим: $x=\dfrac{k^2-1}{k^2-k+1}$. Отсюда $y=\dfrac{k^2-2k}{k^2-k+1}$.

Ответ: $(1;0)$, $(1;1)$, $\begin{cases} x=\dfrac{k^2-1}{k^2-k+1}, \\ y=\dfrac{k^2-2k}{k^2-k+1}, \end{cases}$ где $k\in\boldsymbol{Q}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Задачи на целые числа на вступительных экзаменах в вузы

Задача 1.1. *Мастер делает в час целое число деталей, большее, чем* 15*, а ученик – на* 5 *деталей меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе – на* 1 *час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?*

Решение. Пусть мастер делает в час x деталей, y часов – время выполнения заказа мастером, N – количество деталей в заказе. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} xy = N, \\ 2\cdot(x-5)\cdot(y-1) = N, \\ x > 15. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы получаем:

$$xy = 2xy - 2x + 10 - 10y, \text{ или } x\cdot(y-2) = 10\cdot(y-1).$$

Из последнего равенства следует, что $y \geq 3$. Кроме того, т.к. числа $y-1$ и $y-2$ взаимно простые, $y-2$ является делителем числа 10. Имеем четыре возможности:

1) $y-2=10$, или $y=12$; 2) $y-2=5$, или $y=7$;

3) $y-2=2$, или $y=4$; 4) $y-2=1$, или $y=3$.

Перебором устанавливаем, что $y=3$. Тогда $x=20$ и $N=60$.

Ответ: 60 деталей.

Задача 1.2. *Фрезеровщик вытачивает за один час целое число деталей, большее, чем* 3*, а ученик – на* 1 *деталь меньше. Один фрезеровщик выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе – на* 1 *час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?*

Ответ: 12 деталей.

Задача 2. *Произведение двузначного числа на число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, равно* 1008. *Найдите это число.*

Решение. Пусть искомое число $\overline{ab} = 10a + b$. По условию

$$(10a + b)\cdot(10b + a) = 1008 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100ab + 10\cdot(a^2 + b^2) + ab = 1008.$$

Заметим, что произведение ab дает последнюю цифру числа 1008. Кроме того $ab < 10$ (иначе сумма $100ab + ab$ будет больше 1008). Следовательно, цифры a, b – это 1, 8 или 2, 4. В первом случае произведение $18\cdot 81$ больше 1008, а во втором случае $24\cdot 42 = 1008$.

Ответ: 24 или 42.

Задача 3. *Сумма в* 95 *копеек составлена из пятикопеечных и десятикопеечных монет. Если все десятикопеечные монеты заменить пятикопеечными, а все пятикопеечные – десятикопеечными, то общая сумма уменьшится более, чем в* 1.5 *раза. Сколько пятикопеечных и десятикопеечных монет было первоначально?*

Решение. Пусть x – количество пятикопеечных, а y – количество десятикопеечных монет. Тогда $5x + 10y = 95$, $10x + 5y < \dfrac{95}{1.5}$, причем $y \le 9$. После упрощения получим: $x + 2y = 19$, $2x + y < \dfrac{38}{3}$, $y \le 9$. Отсюда $8\tfrac{4}{9} < y \le 9$. Так как y – число целое, то $y = 9$. Отсюда $x = 1$.

Ответ: 1 пятикопеечная и 9 десятикопеечных монет.

Задача 4.1. *На заводе «Гиперон» цеха трех типов. В каждом цехе первого типа* 108 *рабочих и* 53 *инженера, второго типа –* 20 *рабочих и* 13 *инженеров, третьего типа –* 11 *рабочих и* 5 *инженеров. Общее число рабочих на заводе равно* 353, *инженеров –* 180. *Найти количество цехов каждого типа, если их общее число не превосходит* 16.

Ответ: 2; 3; 7.

Задача 4.2. *Компания владеет гостиницами трех типов. В каждой гостинице первого типа работает* 114 *горничных и* 62 *рабочих, второго типа –* 20 *горничных и* 28 *рабочих, третьего типа –* 21 *горничная и* 5 *рабочих. Общее число горничных –* 537, *рабочих –* 337. *Найти количество гостиниц каждого типа, если общее число гостиниц превосходит* 11.

Ответ: 2; 6; 9.

Задача 4.3. *В поселке Энском имеются лишь двухэтажные, трехэтажные и пятиэтажные дома. В каждом двухэтажном доме* 3 *однокомнатных и* 15 *двухкомнатных квартир, в трехэтажном –* 30 *однокомнатных и* 63 *двухкомнатных квартир, в пятиэтажном –* 29 *однокомнатных и* 87 *двухкомнатных квартир. Общее число однокомнатных квартир равно* 244, *двухкомнатных –* 669. *Найти количество двухэтажных, трехэтажных и пятиэтажных домов, если их общее число не превышает* 13.

Ответ: 3; 3; 5.

Задача 4.4. *Со склада в магазин были отправлены телевизоры и видеомагнитофоны в контейнерах трех типов. В каждом контейнере первого типа содержалось* 17 *телевизоров и* 105 *видеомагнитофонов, второго типа –* 12 *телевизоров и* 90 *видеомагнитофонов, третьего типа –* 3 *телевизора и* 15 *видеомагнитофонов. Всего было отправлено* 136 *телевизоров и* 870 *видеомагнитофонов. Сколько контейнеров каждого типа было отправлено, если их общее число превысило* 15?

Ответ: 2; 5; 14.

Задача 4.5. *Фирма владеет торговыми палатками трех типов. В палатки первого типа завезли по* 85 *банок фанты и по* 119 *пепси-колы, второго типа –* 20 *фанты и* 31 *пепси-колы, третьего типа –* 30 *фанты и* 38 *пепси-колы. Всего завезли* 480 *банок фанты и* 659 *пепси-колы. Сколько палаток каждого типа имеет фирма, если общее их число не превосходит* 13?

Ответ: 4; 1; 4.

Задача 5.1. *В пачке письменных работ абитуриентов – не более* 75 *работ. Известно, что половина работ в этой пачке имеют оценку «от-*

лично». Если убрать три верхние работы, то 48% оставшихся работ будут с оценкой «отлично». Сколько работ было в пачке?

Решение. Пусть x – количество работ в пачке. Так как половина работ имеют отличную оценку, то $x = 2n$, причем $2n \le 75$.

После того, как три верхние работы были убраны, их количество стало $2n - 3$, причем $2n - 3 \le 72$. По условию $0.48(2n - 3) = p$, где p – натуральное число. Последнее равенство можно записать так: $12(2n - 3) = 25p$. Так как $12(2n - 3)$ делится на 25, а числа 12 и 25 взаимно простые, значит, $2n - 3$ должно делиться на 25.

Число $2n - 3$ нечетное, поэтому $2n - 3 = 25$. Таким образом, $x = 28$.

Ответ: в пачке было 28 работ.

Задача 5.2. *В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52% из них – белые. Если отложить три самых малых гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?*

Ответ: в корзине было 25 грибов.

Задача 5.3. *В коробке лежало не более 55 белых и черных шаров. Число белых относилось к числу черных, как 3 : 2. После того, как из коробки вынули 4 шара, оказалось, что соотношение белых и черных шаров стало равно 4 : 3. Сколько шаров лежало в коробке?*

Ответ: в коробке лежало 25 шаров.

Задача 5.4. *Рыбаки поймали n рыб, из них 48% окуней. Пять рыб были отпущены в озеро. После этого рыб снова пересчитали, и оказалось, что среди оставшихся 50% составляют окуни. Сколько рыб поймали рыбаки, если известно, что $30 \le n \le 100$?*

Ответ: рыбаки поймали 75 рыб.

Задача 5.5. *В соревнованиях принимало участие более 20 спортсменов, из них 65% юношей. После того, как 5 спортсменов выбыли из соревнований, получив травмы, число юношей составило 60%. Сколько спортсменов участвовало в соревнованиях?*

Ответ: в соревнованиях участвовало 40 спортсменов.

Задача 6.1. *При каких* a *система неравенств* $\begin{cases} x+3y>24, \\ y-x<6, \\ ay>x-2; \end{cases}$ *имеет единственное решение в целых числах?*

Указание. Для решения задачи удобно использовать графическую интерпретацию, считая y независимой переменной, а x – зависимой. Пусть G – область, точки которой принадлежат всем трем полуплоскостям. На геометрическом языке поставленную в условии задачу можно сформулировать следующим образом: найти, при каких значениях параметра a область G содержит ровно одну точку с целочисленными координатами.

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; \frac{2}{9}\right]$.

Задача 6.2. *При каких* a *система неравенств* $\begin{cases} x+y<6, \\ 2y-x>15, \\ x>ay-2; \end{cases}$ *имеет единственное решение в целых числах?*

Ответ: $\left[-\frac{1}{8}; 0\right)$.

Задача 6.3. *При каких* a *система неравенств* $\begin{cases} x+3y>18, \\ y+x<5, \\ ay<x+2; \end{cases}$ *имеет единственное решение в целых числах?*

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right)$.

Задача 6.4. *При каких* a *система неравенств* $\begin{cases} x - y > 3, \\ x + 4y > -22, \\ ay > x + 1; \end{cases}$ *имеет единственное решение в целых числах?*

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{5}; 0\right)$.

Задача 6.5. *При каких* a *система неравенств* $\begin{cases} 2x + y < 5, \\ x - y > 5, \\ ax < y + 3; \end{cases}$ *имеет единственное решение в целых числах?*

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{4}; 0\right)$.

Задача 7. *Найдите сумму всех семизначных четных чисел, делящихся на* 3 *и записываемых только цифрами* 0 *и* 1.

Ответ: $11\,555\,550$.

Задача 8. *Натуральное число является полным квадратом и оканчивается на* 5. *Докажите, что его третья справа цифра четная (подразумевается, что число по крайней мере трехзначное).*

Задача 9. *Найдите все пятизначные числа, делящиеся на* 45, *запись которых в десятичной системе имеет вид* $\overline{53x1y}$ (x *и* y *– цифры*).

Ответ: 53010, 53910, 53415.

Задача 10.1. *Шестизначное число* A *делится на* 17, *а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на* 13. *Найти наибольшее число* A, *удовлетворяющее этим требованиям.*

Решение. Пусть a – последняя цифра числа A, а B – число, полученное удалением из A этой цифры. Тогда $A = 10B + a$. Число B – пятизначное. Так как $99\,999 = 13 \cdot 7692 + 3$, то $99\,996$ делится на 13. Числа вида $999\,96*$ (здесь $*$ обозначает цифру a) не делятся на 17, так как наибольшее из них $999\,969$ при делении на 17 дает в остатке 12, а наименьшее $999\,960$ дает в остатке 3. Значит, $B = 99\,996$ не годится. Тогда возьмем $B = 99\,996 - 13 = 99\,983$. Если взять $A = 999\,839$, то будет выполнено равенство $A = 58\,814 \cdot 17 + 1$. Следовательно, подходит $A = 999\,838$. Ясно, что это число наибольшее.

Ответ: $999\,838$.

Задача 10.2. *Семизначное число A делится на 13, а число, полученное вычеркиванием его первой цифры, делится на 11. Найти наибольшее число A, удовлетворяющее этим требованиям.*

Ответ: $9\,999\,977$.

Задача 10.3. *Шестизначное число A делится на 11, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 17. Найти наименьшее число A, удовлетворяющее этим требованиям.*

Ответ: $100\,133$.

Задача 10.4. *Семизначное число A делится на 13, а число, полученное вычеркиванием его первой цифры, делится на 19. Найти наибольшее число A, удовлетворяющее этим требованиям.*

Ответ: $9\,999\,951$.

Задача 10.5. *Шестизначное число A делится на 13, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 17. Найти наименьшее число A, удовлетворяющее этим требованиям.*

Ответ: $100\,139$.

Задача 11.1. *Восьмизначное число A получается из натурального числа B, записанного в десятичной системе счисления, перестановкой его последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 12 и $B \geq 44\,444\,444$. Найти наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих указанным условиям.*

Решение. Максимальное восьмизначное число $A = 99\,999\,999$. Соответствующее ему число $B = 99\,999\,999$ делится на 3, а значит, не взаимно просто с числом 12. Уменьшим число A на единицу: $A = 99\,999\,998$. Тогда число $B = 99\,999\,989$ удовлетворяет всем условиям задачи. Таким образом, наибольшее число найдено.

Наименьшее среди чисел A будем искать в два этапа. На первом этапе подберем такое наименьшее восьмизначное число A, чтобы соответствующее ему число B удовлетворяло только условию $B \geq 44\,444\,444$. На втором этапе будем к этому числу A добавлять по единице до тех пор, пока не найдем такое A, при котором на B выполнены все ограничения.

Итак, первый этап. Записываем число A, помещая в каждом разряде наименьшее из возможных цифр: $A = 14\,444\,445$. Действительно, на первое место надо поставить наименьшую из значащих цифр. Следующие шесть цифр соответствуют первым шести цифрам числа B и должны быть равны 4, так как если вместо хотя бы одной из «четверок» поставить меньшую цифру, то число B станет меньше $44\,444\,444$. Легко убедиться, что минимальная цифра, которую можно поставить на последнюю позицию в числе A, должна быть равна 5.

Полученное на первом этапе число A не подходит, так как соответствующее ему число $B = 44\,444\,451$ кратно 3. Увеличим число A на единицу: $A = 14\,444\,446$. Тогда $B = 44\,444\,461$ и удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: $99\,999\,998$; $14\,444\,446$.

Задача 11.2. *Девятизначное число A получается из натурального числа B, записанного в десятичной системе счисления, перестановкой его первой цифры на последнее место. Известно, что число B взаимно просто с числом 24 и $B \geq 222\,222\,222$. Найти наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих указанным условиям.*

Ответ: $999\,999\,998$; $100\,000\,003$.

Задача 11.3. *Восьмизначное число A получается из натурального числа B, записанного в десятичной системе счисления, перестановкой его последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 36 и $B \geq 77\,777\,777$. Найти наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих указанным условиям.*

Ответ: $99\,999\,998$; $17\,777\,779$.

Задача 11.4. *Девятизначное число A получается из натурального числа B, записанного в десятичной системе счисления, перестановкой его последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 18 и $B \geq 222\,222\,222$. Найти наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих указанным условиям.*

Ответ: $999\,999\,998$; $122\,222\,224$.

Задача 11.5. *Одиннадцатизначное число A получается из натурального числа B, записанного в десятичной системе счисления, перестановкой его первой цифры на последнее место. Известно, что число B взаимно просто с числом 30 и $B \geq 44\,444\,444\,444$. Найти наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих указанным условиям.*

Ответ: $99\,999\,999\,998$; $10\,000\,000\,015$.

Задача 12.1. *Найти все целочисленные решения неравенства*

$$\sqrt[4]{6x - x^2 - 5} < \sqrt[10]{2x^2 + 3x - 9}\,.$$

Указание. Найти ОДЗ неравенства и перебрать все его целочисленные значения.

Ответ: 4; 5.

Задача 12.2. *Найти все целочисленные решения неравенства*

$$\sqrt[4]{7x - 2x^2 + 4} < \sqrt[6]{x^2 - 9x + 18}\,.$$

Ответ: 0.

Задача 12.3. *Найти все целочисленные решения неравенства*

$$\sqrt[6]{4x^2 + 4x - 3} < \sqrt[8]{15 - 2x^2 - x}\,.$$

Ответ: -2; 1.

Задача 12.4. *Найти все целочисленные решения неравенства*

$$\sqrt[10]{2x^2-11x+5}<\sqrt[6]{3-x^2-2x}\,.$$

Ответ: 0.

Задача 12.5. *Найти все целочисленные решения неравенства*

$$\sqrt[6]{x^2+7x+10}<\sqrt[4]{9-3x-2x^2}\,.$$

Ответ: – 2; – 1; 0.

Задача 13.1. *Определить число точек, лежащих на плоскости* Oxy *в области, ограниченной линиями* $y=\log_3 x$, $x=2$, $x=900$, $y=0$ *(включая границы), координаты* $(x\,;\,y)$ *которых целочисленные.*

Ответ: 5213.

Задача 13.2. *Определить число точек, лежащих на плоскости* Oxy *в области, ограниченной линиями* $y=2^x$, $y=2$, $y=1030$, $x=1$ *(включая границы), координаты* $(x\,;\,y)$ *которых целочисленные.*

Ответ: 8263.

Задача 13.3. *Определить число точек, лежащих на плоскости* Oxy *в области, ограниченной линиями* $y=\log_2 x$, $x=1.5$, $x=1000$, $y=0$ *(включая границы), координаты* $(x\,;\,y)$ *которых целочисленные.*

Ответ: 8986.

Задача 13.4. *Определить число точек, лежащих на плоскости* Oxy *в области, ограниченной линиями* $y=4^x$, $y=2$, $y=16400$, $x=0$ *(включая границы), координаты* $(x\,;\,y)$ *которых целочисленные.*

Ответ: 109362.

Задача 13.5. *Определить число точек, лежащих на плоскости* Oxy *в области, ограниченной линиями* $y=\lg x$, $x=15$, $x=1\,000\,003$, $y=0$ *(включая границы), координаты* $(x\,;\,y)$ *которых целочисленные.*

Ответ: 5888898.

Задача 14.1. *Автомобильный завод выпустил в первый рабочий день месяца некоторое количество автомобилей. Каждый следующий рабо-*

чий день дневной выпуск возрастал на 3 *автомобиля ежедневно, и месячный план –* 287 *автомобилей – был выполнен досрочно, причем за целое число дней. После этого ежедневно выпускался* 41 *автомобиль. На сколько процентов был перевыполнен месячный план выпуска автомобилей, если в месяце было* 26 *рабочих дней?*

Ответ: $342\frac{6}{7}\%$; $271\frac{3}{7}\%$; $171\frac{3}{7}\%$.

Задача 14.2. *Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца* 31 *телевизор. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на некоторое количество телевизоров ежедневно, и месячный план продажи –* 445 *телевизоров – был выполнен досрочно, причем за целое число дней. После этого ежедневно продавалось* 89 *телевизоров. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце было* 26 *рабочих дней?*

Ответ: 480%; 420%; 320%.

Задача 14.3. *Автомобильный завод выпустил в первый рабочий день месяца некоторое количество автомобилей. Каждый следующий рабочий день дневной выпуск возрастал на один автомобиль ежедневно, и месячный план –* 1067 *автомобилей – был выполнен досрочно, причем за целое число дней. После этого ежедневно выпускалось по* 97 *автомобилей. На сколько процентов был перевыполнен месячный план выпуска автомобилей, если в месяце было* 26 *рабочих дней?*

Ответ: $218\frac{2}{11}\%$; $136\frac{4}{11}\%$; $36\frac{4}{11}\%$.

Задача 14.4. *Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца* 29 *телевизоров. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на некоторое количество телевизоров ежедневно, и месячный план продажи –* 497 *телевизоров – был выполнен досрочно, причем за целое число дней. После этого ежедневно продавался* 71 *телевизор. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце было* 26 *рабочих дней?*

Ответ: $342\frac{6}{7}\%$; $271\frac{3}{7}\%$; $171\frac{3}{7}\%$.

Задача 15.1. *Около дома посажены липы и березы, причем общее число их более* 14*. Если количество лип увеличить вдвое, а количество берез – на* 18*, то берез станет больше. Если же, не изменяя количества лип,* *увеличить вдвое количество берез, то лип все равно будет больше. Сколько лип и сколько берез было посажено?*

Решение. Пусть x – первоначальное количество лип, y – первоначальное количество берез. Тогда из условия задачи получим систему неравенств:

$$\begin{cases} x+y>14, \\ 2x<y+18, \\ x>2y. \end{cases}$$

Из последней системы находим:

$$\begin{cases} 2x-18<y<\dfrac{x}{2}, \\ 14-x<y<\dfrac{x}{2}, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} 2x-18<\dfrac{x}{2}, \\ 14-x<\dfrac{x}{2}, \end{cases} \text{ или } \frac{28}{3}<x<12.$$

Поскольку x – целое число, то количество лип может быть равно 10 или 11.

Подставим значение $x=10$ в систему $\begin{cases} 2x-18<y<\dfrac{x}{2}, \\ 14-x<y<\dfrac{x}{2}. \end{cases}$

Получим: $\begin{cases} 2<y<5, \\ 4<y<5. \end{cases}$ Так как y – целое число, то последняя система не имеет решений.

Подставим значение $x=11$ в систему $\begin{cases} 2x-18<y<\dfrac{x}{2}, \\ 14-x<y<\dfrac{x}{2}. \end{cases}$

Получим: $\begin{cases} 4<y<5.5, \\ 3<y<5.5. \end{cases}$ Так как y – целое число, то решением последней системы является $y=5$.

Ответ: 11 лип, 5 берез.

Задача 15.2. *Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если количество девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее ко-*

личество домов станет более 24, а если увеличить вдвое количество пятиэтажных домов, то общее количество домов станет менее 27. Сколько построено пятиэтажных и девятиэтажных домов?

Ответ: 9 пятиэтажных, 8 девятиэтажных домов.

Задача 15.3. *На стоянке находятся машины марок «Москвич» и «Волга». Общее число их менее 30. Если число «Волг» увеличить вдвое, а число «Москвичей» – на 27, то «Волг» станет больше. Если, не изменяя числа «Волг», увеличить вдвое число «Москвичей», то «Москвичей» станет больше. Сколько «Москвичей» и сколько «Волг» находятся на стоянке?*

Ответ: 19 «Волг», 10 «Москвичей».

Задача 15.4. *Рабочий изготовил некоторое количество деталей двух видов – A и B. Причем деталей A он изготовил больше, чем деталей B. Если он изготовит деталей A в 2 раза больше, то общее число деталей станет менее 32, а если деталей B в 2 раза более, то общее число деталей станет больше 28. Сколько деталей каждого вида изготовил рабочий?*

Ответ: 11 деталей вида A, 9 деталей вида B.

Задача 16.1. *Найдите целые значения x и y, удовлетворяющие системе уравнений*

$$\begin{cases} 2x^2 + xy + y^2 = 8, \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$. Так как $(y-2)^2 \geq 0$, то $(x+1)^2 = 1 - (y-2)^2 \leq 1$, или $|x+1| \leq 1$. Существует только три целочисленных значения x, удовлетворяющих последнему неравенству: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

При $x_1 = -2$ получим систему $\begin{cases} y^2 - 2y = 0, \\ y - 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow y = 2$.

При $x_2 = -1$ получим систему

$$\begin{cases} y^2 - y = 6, \\ (y-2)^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -2, \\ y = 3, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 3, \\ y = 1, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow y = 3.$$

При $x_3 = 0$ получим систему $\begin{cases} y^2 = 8, \\ (y-2)^2 = 0. \end{cases}$ Эта система не имеет решений.

Итак, целочисленными решениями исходной системы являются пары чисел $(-2;2)$ и $(-1;3)$.

Ответ: $(-2;2)$, $(-1;3)$.

Задача 16.2. *Найдите целые значения* x *и* y*, удовлетворяющие системе уравнений*

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 4, \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(2;0)$, $(2;2)$.

Задача 16.3. *Найдите целые значения* x *и* y*, удовлетворяющие системе уравнений*

$$\begin{cases} -3x^2 + xy + y^2 = 9, \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(1;-4)$, $(0;-3)$.

Задача 16.4. *Найдите целые значения* x *и* y*, удовлетворяющие системе уравнений*

$$\begin{cases} x^2 + 8xy + 17y^2 = 2, \\ (x+4)^2 + (y-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-3;1)$, $(-5;1)$.

Задача 16.5. *Найдите целые значения* x *и* y*, удовлетворяющие системе уравнений*

$$\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 8, \\ (x+3)^2 + (y-2)^2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-3;\ 1), (-2;\ 2)$.

Задача 17.1. *Найдите два действительных корня уравнения* $x^4 + 5x + a = 0$*, если известно, что это различные целые числа.*

Решение. Пусть k и m – решения уравнения $x^4 + 5x + a = 0$, т.е.

$$\begin{cases} k^4 + 5k + a = 0, \\ m^4 + 5m + a = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$k^4 - m^4 + 5 \cdot (k - m) = 0, \text{ или}$$

$$(k - m) \cdot ((k^2 + m^2) \cdot (k + m) + 5) = 0 .$$

Так как по условию $k - m \neq 0$, то должно выполняться равенство

$$(k^2 + m^2) \cdot (k + m) = -5 .$$

Числа $k^2 + m^2$ и $k + m$ – целые, поэтому они должны являться делителями числа (-5). Так как $k^2 + m^2 > 0$, то возможны варианты:

$$1) \begin{cases} k^2 + m^2 = 5, \\ k + m = -1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} k^2 + m^2 = 1, \\ k + m = -5. \end{cases}$$

В первом случае система имеет две пары целых решений:

$$m_1 = 1,\ k_1 = -2 \text{ и } m_2 = -2,\ k_2 = 1 .$$

Во втором случае целочисленных решений нет.

Таким образом, различными целыми решениями уравнения $x^4 + 5x + a = 0$ могут быть только числа $x = -2$ и $x = 1$. Так как существует $a = -6$, при котором одновременно выполняются равенства $(-2)^4 + 5 \cdot (-2) + a = 0$ и $1^4 + 5 \cdot 1 + a = 0$, то эта пара удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $-2;\ 1$.

Задача 17.2. *Найдите два действительных корня уравнения* $x^4 + 41x + a = 0$*, если известно, что это различные целые числа.*

Ответ: -5; 4.

Задача 17.3. *Найдите два действительных корня уравнения* $x^4 + 13x + a = 0$, *если известно, что это различные целые числа.*

Ответ: -3; 2.

Задача 17.4. *Найдите два действительных корня уравнения* $x^4 - 5x + a = 0$, *если известно, что это различные целые числа.*

Ответ: -1; 2.

Задача 17.5. *Найдите два действительных корня уравнения* $x^4 - 41x + a = 0$, *если известно, что это различные целые числа.*

Ответ: -4; 5.

Задача 17.6. *Найдите два действительных корня уравнения* $x^4 - 13x + a = 0$, *если известно, что это различные целые числа.*

Ответ: -2; 3.

Задача 18.1. *Если к числу* a *прибавить* 26 *или отнять* 30, *то каждый раз получится квадрат натурального числа. Найдите* a.

Решение. Пусть $a + 26 = b^2$, $a - 30 = c^2$, где b и c – некоторые натуральные числа. Заметим, что при этом $b > c$. Вычтя из первого равенства второе, получим:

$$56 = b^2 - c^2, \text{ или } 56 = (b-c)\cdot(b+c).$$

С учетом того, что $0 < b - c < b + c$, возможны четыре случая:

1) $\begin{cases} b-c=1, \\ b+c=56; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b-c=2, \\ b+c=28; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} b-c=4, \\ b+c=14; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} b-c=7, \\ b+c=8. \end{cases}$

В первом и последнем случаях целочисленных решений нет. Во втором случае $b = 15$, $c = 13$, тогда $a = 199$. В третьем случае $b = 9$, $c = 5$, тогда $a = 55$.

Ответ: 55; 199.

Задача 18.2. *Если к числу* a *прибавить* 24 *или отнять* 11, *то каждый раз получится квадрат натурального числа. Найдите* a.

Ответ: 12; 300.

Задача 18.3. *Если к числу* a *прибавить* 11 *или отнять* 5, *то каждый раз получится квадрат натурального числа. Найдите* a.

Ответ: 14.

Задача 18.4. *Если к числу a прибавить 29 или отнять 16, то каждый раз получится квадрат натурального числа. Найдите a.*

Ответ: 20; 52; 500.

Задача 18.5. *Если к числу a прибавить 19 или отнять 17, то каждый раз получится квадрат натурального числа. Найдите a.*

Ответ: 81.

Задача 19.1. *Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:*

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 22n - 171, \\ 30m - n^2 > 252 + 14n + m^2. \end{cases}$$

Решение. Выделив полные квадраты в неравенствах системы, получим:

$$\begin{cases} (m^2 - 16m + 64) + (n^2 + 22n + 121) < 14, \\ (m^2 - 30m + 225) + (n^2 + 14n + 49) < 22; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-8)^2 + (n+11)^2 < 14, \\ (m-15)^2 + (n+7)^2 < 22. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} (m-8)^2 < 14, \\ (m-15)^2 < 22. \end{cases}$ С учетом целочисленности m из последней системы следует:

$$\begin{cases} |m-8| \le 3, \\ |m-15| \le 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \le m \le 11, \\ 11 \le m \le 19; \end{cases} \Leftrightarrow m = 11.$$

Используя найденное значение $m = 11$ и учтя целочисленность, для n получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} (n+11)^2 < 5, \\ (n+7)^2 < 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |n+11| \le 2, \\ |n+7| \le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13 \le m \le -9, \\ -9 \le m \le -5; \end{cases} \Leftrightarrow n = -9.$$

Ответ: $m = 11$, $n = -9$.

Задача 19.2. *Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:*

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 2m - 14n - 36, \\ m^2 + 6n + n^2 + 73 < 16m + 22. \end{cases}$$

Ответ: $m = 4$, $n = -5$.

Задача 19.3. *Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:*

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 8n - 66, \\ 203 + m^2 < 30m - n^2. \end{cases}$$

Ответ: $m = 11$, $n = -2$.

Задача 19.4. *Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:*

$$\begin{cases} m^2 + n^2 + 14n + 35 < 0, \\ m^2 + 6n + n^2 < 14m - 36. \end{cases}$$

Ответ: $m = 3$, $n = -5$.

Задача 19.5. *Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:*

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 12m - 18n - 103, \\ m^2 + 10n + n^2 < 26m - 172. \end{cases}$$

Ответ: $m = 9$, $n = -7$.

Задача 19.6. *Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:*

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 10m - 16n - 75, \\ m^2 + 8n + n^2 < 24m - 138. \end{cases}$$

Ответ: $m = 8$, $n = -6$.

Задача 20. *Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он будет наклеивать по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист оста-*

нется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого будет наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

Решение. Пусть x – количество марок у школьника, y – количество листов в альбоме. Тогда:

$$\begin{cases} 20y < x, \\ 23\cdot(y-1) \ge x, \\ x + 21y = 500. \end{cases}$$

Из последней системы имеем: $20y < 500 - 21y$. Отсюда $y < \dfrac{500}{41} = 12\tfrac{8}{41}$. Так как y – целое, то $y \le 12$.

Рассмотрим таким же образом неравенство $23\cdot(y-1) \ge 500 - 21y$. Получим $y \ge \dfrac{523}{44} = 11\tfrac{39}{44}$. Отсюда, с учетом целочисленности y, получим: $y \ge 12$.

Получаем ответ: $y = 12$.

Ответ: 12 листов.

Задача 21. *Прибывших на парад солдат планировали построить так, чтобы в каждом ряду стояло по 24 человека. По прибытии оказалось, что не все солдаты смогут участвовать в параде, и их перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше, а число человек в ряду – на 26 больше нового числа рядов. Сколько солдат прибыло на парад, если известно, что если бы все они участвовали, то солдат можно было бы перестроить так, чтобы число рядов было бы равно числу человек в ряду?*

Решение. Пусть n – число первоначально предполагавшихся рядов. Имеем неравенство: $24n > (n-2)\cdot(n+24)$. Решив его, получим $-6 < n < 8$. Учитывая условие, что первоначально планировалось построить солдат «квадратом», получим, что $24n = x^2$, где n может принимать натуральные значения от 1 до 7. Следовательно, $n = 6$. Тогда количество солдат, прибывших на парад, равно 144.

Ответ: 144 солдата.

Задача 22.1. *В некоторой группе студентов процент успевающих заключен в интервале от 96.8% до 97.2%. Какое наименьшее число студентов может быть в группе?*

Решение. Пусть n – число неуспевающих, а N – число студентов в группе. Тогда $\frac{100n}{3.2} \le N \le \frac{100n}{2.8}$. Очевидно, что при фиксированном проценте «двоечников» группа студентов будет тем меньше, чем меньше в ней неуспевающих. Начнем с наименьшего n перебором до тех пор, пока не получим для N целое число, удовлетворяющее этому двойному неравенству. Уже при $n = 1$ получим: $31.2 \le N \le 35.7$.

Ответ: 32 студента.

Задача 22.2. *В некоторой бригаде процент рабочих, выполняющих норму, заключен между 91.3% и 91.5%. Каково наименьшее возможное число членов бригады?*

Ответ: 23 человека.

Задача 22.3. *При подведении итогов шахматного турнира оказалось, что на первое место претендуют сразу несколько спортсменов. Их количество оказалось больше $7/31$, но меньше $5/21$ от общего числа участников соревнований. Какое минимальное число шахматистов принимало участие в турнире?*

Ответ: 13.

Задача 22.4. *В финальном забеге соревнований по кроссу оказалось, что количество спортсменов, выполнивших мастерский норматив, меньше $6/13$, но больше $7/16$ от общего числа, закончивших дистанцию. Какое минимальное число спортсменов закончило дистанцию?*

Ответ: 9.

Задача 22.5. *После сдачи студентами группы сессии оказалось, что количество отличников меньше $4/33$, но больше $5/42$ от общего числа студентов группы. Какое наименьшее число студентов может быть в группе?*

Ответ: 25.

Задача 23. *Найдите дробь* $\frac{m}{n}$ (m и n *– натуральные числа*) *с наименьшим возможным знаменателем* n, *удовлетворяющую неравенству* $\frac{2}{15} < \frac{m}{n} < \frac{1}{7}$.

Решение. По условию $n > 7m$ и $m > \frac{2n}{15}$. Так как $m \geq 1$, то $n > 7m \geq 7$. Число n целое, поэтому $n \geq 8$.

Далее, $m > \frac{2n}{15} \geq \frac{2 \cdot 8}{15} > 1$, следовательно, $m \geq 2$. Теперь $n > 7m \geq 7 \cdot 2 = 14$, поэтому $n \geq 15$.

Далее, $m > \frac{2n}{15} \geq \frac{2 \cdot 15}{15} = 2$, следовательно, $m \geq 3$. Теперь $n > 7m \geq 7 \cdot 3 = 21$, поэтому $n \geq 22$. Но тогда

$$m > \frac{2n}{15} \geq \frac{2 \cdot 22}{15} > 2.$$

Отсюда $m = 3$, $n = 22$.

Ответ: $\frac{3}{22}$.

Задача 24.1. *Заданы четыре натуральных числа. Сумма первых трех чисел не превосходит трети четвертого числа. Сумма первого числа, умноженного на* 7, *и третьего числа на* 58 *меньше четвертого. Если к четвертому числу прибавить* 11, *то эта сумма будет равна сумме первого, второго и упятеренного третьего. Найдите четвертое число, если оно на* 52 *больше суммы первого, удвоенного второго и третьего.*

Решение. Обозначим заданные натуральные числа соответственно через a, b, c и d. Тогда, согласно условию задачи, имеем:

$$\begin{cases} a+b+c \le \dfrac{d}{3}, \\ 7a+c = d-58, \\ a+b+5c = d+11, \\ a+2b+c = d-52. \end{cases}$$

Вычитая из третьего уравнения системы четвертое, получим $4c-b=63$, или $b=4c-63$. Аналогично, вычитая из третьего уравнения второе, получим $4c+b-6a=69$. Подставляя b, найдем связь между a и c: $4c-3a=66$, или $4c=3\cdot(22+a)$. Отсюда, т.к. 4 и 3 взаимно простые числа, следует, что c делится на 3. Пусть $c=3t$, где $t\in \boldsymbol{N}$. Тогда $a=4t-22$, $b=12t-63$, $c=3t$ и $d=31t-96$. Из первого неравенства системы имеем

$$4t-22+12t-63+3t \le \frac{31t-96}{3}, \text{ или } 26t \le 159,$$

$$\text{или } t \le \frac{159}{26}, \text{ или } t \le 6.$$

Кроме того, $12t-63>0$. Следовательно, $t>\dfrac{63}{12}$, или $t>5$. Значит, $t=6$ и $d=31\cdot 6-96=90$.

Ответ: 90.

Задача 24.2. *Двум рабочим и ученику поручили изготовить некоторое количество деталей. За одну смену они выполнили меньше половины задания. Заканчивать работу пришлось второму рабочему, который затратил на это еще две смены. Если бы им помогал еще один рабочий с такой же производительностью, как у первого, то за смену они сделали бы на 23 детали меньше задания. Если бы производительность ученика была вдвое больше, то после отработки одной смены им осталось бы сделать 32 детали. Сколько деталей надо было изготовить, если известно, что число деталей есть квадрат целого числа?*

Ответ: 64 детали.

Задача 24.3. *В магазине имеется три вида наборов игрушек – металлических, пластмассовых и мягких. Детский сад купил по одному набору металлических и пластмассовых игрушек и 4 набора мягких, при этом* *количество игрушек совпало с числом детей в саду. Если бы было куплено 4 набора металлических и один набор мягких игрушек, то 57 детям игрушек бы не досталось. Количество игрушек, составляющих 4 набора пластмассовых и один мягких, на 41 меньше числа детей. Сколько детей было в детском саду, если, купив по три набора игрушек каждого вида, детский сад не обеспечил бы всех детей игрушками?*

Ответ: 84 ребенка.

Задача 24.4. *В саду приготовили n ям для посадки деревьев. После того, как посадили имеющиеся яблони, груши и сливы, оказалось, что было использовано менее трети ям, при этом груш было посажено на 6 штук больше, чем яблонь. Если бы яблонь посадили в три раза больше, то остались бы неиспользованными 59 ям. Сколько ям для посадки было подготовлено, если известно, что на оставшиеся места посадили персиковые деревья, и их оказалось в три раза больше, чем слив?*

Ответ: 94 ямы.

Задача 24.5. *Машины трех марок должны были перевезти некоторое четное число панелей. Если бы работали по одной машине каждой марки, то они за два дня не перевезли бы всех панелей. Если бы работали две машины первой марки, а двух других по одной, то после одного дня работы осталось бы 29 панелей. Если бы в первый день работали по одной машине всех трех марок, а во второй день две машины третьей марки, то они перевезли бы все панели. Сколько панелей должны были перевезти машины, если за день машина второй марки перевозит на 6 панелей больше, чем машина первой марки?*

Ответ: 60 панелей.

Задача 25.1. *Найдите минимальный член последовательности*

$$a_n = 2n^2 - 24n + 69 - \frac{9}{(3n-22)^2 + 3}, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}.$$

Решение. Выделим в записи общего члена последовательности

$$a_n = 2n^2 - 24n + 69 - \frac{9}{(3n-22)^2 + 3}$$

два слагаемых: $a_n^* = 2n^2 - 24n + 69$ и $a_n^{**} = -\frac{9}{(3n-22)^2 + 3}$.

Каждое из этих слагаемых представляет собой функции $y_1 = 2x^2 - 24x + 69$ и $y_2 = -\dfrac{9}{(3x-22)^2+3}$ при натуральных значениях аргумента $x = n$. Легко заметить, что при $x \geq 8$ обе функции монотонно возрастают. Для функции y_1, являющейся квадратным трехчленом, это утверждение очевидно. Для функции y_2 такое заключение сразу следует из монотонного возрастания знаменателя дроби при $x \geq 8$. Так же легко доказывается, что при $x \leq 6$ обе функции монотонно убывают.

Таким образом, наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 24x + 69 - \dfrac{9}{(3x-22)^2+3}$ следует искать на отрезке $6 \leq x \leq 8$, а общего члена последовательности – среди чисел $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$. Вычислив $a_6 = -3\frac{9}{19}$, $a_7 = -3\frac{1}{4}$, $a_8 = 3\frac{5}{7}$, установим, что минимальным членом последовательности является шестой член.

Ответ: $a_6 = -\dfrac{66}{19}$.

Задача 25.2. *Найдите максимальный член последовательности*

$$a_n = -2n^2 + 20n - 48 + \frac{25}{(5n-31)^2+10}, \text{ где } n \in \mathbf{N}.$$

Ответ: $a_5 = \dfrac{117}{46}$.

Задача 25.3. *Найдите минимальный член последовательности*

$$a_n = n^2 - 8n + 15 - \frac{9}{(3n-16)^2+6}, \text{ где } n \in \mathbf{N}.$$

Ответ: $a_4 = -\dfrac{31}{22}$.

Задача 25.4. *Найдите максимальный член последовательности*

$$a_n = -n^2 + 14n - 45 + \frac{4}{(2n-17)^2 + 2}, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}.$$

Ответ: $a_7 = \dfrac{48}{11}$.

Задача 25.5. *Найдите минимальный член последовательности*

$$a_n = 2n^2 - 20n + 47 - \frac{9}{(3n-19)^2 + 3}, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}.$$

Ответ: $a_5 = -\dfrac{66}{19}$.

Задача 26.1. *Купил Роман раков, вчера – мелких, по цене* 510 *рублей за штуку, а сегодня – по* 990, *но очень крупных. Всего на раков он истратил* 25200 *рублей, из них переплаты из-за отсутствия сдачи в сумме составили от* 160 *до* 200 *рублей. Сколько раков купил Роман вчера и сколько сегодня?*

Ответ: Вчера Роман купил 18 раков, сегодня – 16.

Задача 26.2. *У Фрола было не менее* 6 *кусков мыла, а у Прокла – не более* 30 *штук шил. Столковались они считать каждое шило за* 8700 *рублей, а кусок мыла – за* 4500, *да и поменялись. Прокл отдал Фролу все свои шила и забрал у него все мыло. Определите, сколько мыла выменял Прокл, если известно, что Фрол доплатил Проклу* 3350 *рублей и остался ему должен не более* 500 *рублей.*

Ответ: Прокл выменял 34 куска мыла.

Задача 27. *Каково наименьшее значение суммы* $m + n$, *если* m *и* n *– натуральные числа и* $\dfrac{7}{23} < \dfrac{m}{n} < \dfrac{5}{16}$.

Решение. Имеем: $\dfrac{16}{5} < \dfrac{n}{m} < \dfrac{23}{7}$, т.е. $3\tfrac{1}{5} < \dfrac{n}{m} < 3\tfrac{2}{7}$. Пусть $\dfrac{n}{m} = 3 + \dfrac{k}{m}$. Тогда $\dfrac{1}{5} < \dfrac{k}{m} < \dfrac{2}{7}$. Следовательно, $\dfrac{7}{2} < \dfrac{m}{k} < 5$. Теперь ясно, что $\dfrac{m}{k} = 4$, т.е. $m = 4$, $k = 1$ (при других значениях m и k сумма $m + n$ не будет наименьшей).

Ответ: 17.

Задача 28. *Вся семья выпила по чашке кофе с молоком, причем Катя выпила четвертую часть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько человек в семье?*

Решение. Пусть n – количество человек в семье. Вместимость каждой чашки примем за 1. Пусть x – количество молока в чашке у Кати. Тогда $1 - x$ – количество кофе.

Имеем: $n = 4x + 6 \cdot (1 - x)$, или $n = 6 - 2x$. Так как $0 < x < 1$, то $4 < 6 - 2x < 6$.

Ответ: 5 человек.

Задача 29. *В шахматном турнире участвовали два десятиклассника и несколько одиннадцатиклассников. Десятиклассники вместе набрали 8 очков, а одиннадцатиклассники – по одинаковому количеству очков. Сколько одиннадцатиклассников участвовало в турнире?*

Решение. Пусть x – число одиннадцатиклассников, a – количество очков у каждого из них. Тогда всего было $x + 2$ человека, а общее количество очков равно $\dfrac{(x+2)\cdot(x+1)}{2}$. Имеем: $\dfrac{(x+2)\cdot(x+1)}{2} = 8 + ax$. Отсюда $x \cdot (x + 3 - 2a) = 14$. Так как x и $2a$ – целые, то возможны лишь следующие случаи:

1) $\begin{cases} x = 1, \\ x + 3 - 2a = 14. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2, \\ x + 3 - 2a = 7. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 7, \\ x + 3 - 2a = 2. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 14, \\ x + 3 - 2a = 1. \end{cases}$

В первых двух случаях $a < 0$, что невозможно.

Ответ: 7 или 14 человек.

Задача 30. *В магазин со склада было отправлено некоторое количество телевизоров. Отправка производилась в контейнерах, причем все контейнеры, кроме одного, были загружены полностью, а один содержал 5 телевизоров. В другой раз в магазин было отправлено в полтора раза больше телевизоров, и все контейнеры, кроме одного, были загружены полностью, а в одном остались места для двух телевизоров. Сколько телевизоров вмещает один контейнер, если известно, что все телевизоры и все контейнеры одинаковы?*

Решение. Пусть a – количество телевизоров, отгруженных в первый раз, x – вместимость одного контейнера. Тогда $a = xy + 5$, $1.5a = xy' - 2$, где y и y' – целые числа. Имеем: $1.5 \cdot (xy + 5) = xy' - 2$. Отсюда $x \cdot (2y' - 3y) = 19$. Так как 19 – простое число и $x > 1$, то $x = 19$.

Ответ: 19 телевизоров.

Задача 31. *Цех получил заказ на изготовление 500 деталей первого типа и 300 деталей второго типа. Каждый из 150 рабочих цеха затрачивает на изготовление детали первого типа такое же время как и на изготовление детали второго типа. Рабочих цеха разбивают на две бригады и поручают каждой бригаде заниматься изготовлением только одного вида деталей. Сколько рабочих следует отнести к первой бригаде, чтобы заказ был выполнен за наименьшее время?*

Решение. Пусть x рабочих в первой бригаде и $150 - x$ – во второй. Тогда время выполнения заказа равно наибольшему из чисел $t_1 = \dfrac{500}{x}$ и $t_2 = \dfrac{300}{150 - x}$. Выясним, когда $t_1 < t_2$, решив неравенство $\dfrac{500}{x} < \dfrac{300}{150 - x}$. Получим, что должно выполняться $x > 93\frac{3}{4}$. Поэтому при $x = 94, 95, \ldots, 150$ время выполнения заказа будет равно t_2 и окажется наименьшим при $x = 94$. Если же $x < 93\frac{3}{4}$, то $\dfrac{500}{x} > \dfrac{300}{150 - x}$. Остается сравнить числа $\dfrac{300}{150-94}$ и $\dfrac{500}{93}$.

Ответ: 94 рабочих.

Задача 32.1. *За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $11\frac{1}{9}\%$, потом $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определите срок хранения вклада.*

Решение. Пусть x, y, z, u – количества месяцев хранения вклада для разных процентных ставок.

Если в месяц начисляется $k\%$, то вклад величиной A через месяц будет равен $\left(1+\dfrac{k}{100}\right)\cdot A$, а через x месяцев $\left(1+\dfrac{k}{100}\right)^x\cdot A$.

Имеем:

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)^x\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)^y\cdot\left(1+\frac{1}{14}\right)^z\cdot\left(1+\frac{12}{100}\right)^u\cdot A=\frac{280}{100}\cdot A,\ \text{т.е.}$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^x\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^y\cdot\left(\frac{15}{14}\right)^z\cdot\left(\frac{28}{25}\right)^u=\frac{14}{5}.$$

Разложив на простые множители, получим:

$$\left(3\cdot7\cdot5^{-1}\cdot2^{-2}\right)^x\cdot\left(2\cdot5\cdot3^{-2}\right)^y\cdot\left(3\cdot5\cdot2^{-1}\cdot7^{-1}\right)^z\cdot\left(2^2\cdot7\cdot5^{-2}\right)^u=2\cdot7\cdot5^{-1}.$$

Согласно основной теореме арифметики:

$$\begin{cases}-2x+y-z+2u=1,\\ x-2y+z=0,\\ -x+y+z-2u=-1,\\ x-z+u=1.\end{cases}$$

Решив эту систему, найдем сумму $x+y+z+u$.

Ответ: 12 месяцев.

Задача 32.2. *Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4%, на втором – 12.5%, на третьем – $100/7$ % и на четвертом – $50/3$ %. По окончании реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 64%. Определите продолжительность периода реконструкции.*

Ответ: 8 месяцев.

Задача 32.3. *Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4%, на втором – 10%, на третьем – $50/3$ % и на четвертом – 65%. По окончании реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 93%. Определите продолжительность третьего этапа реконструкции.*

Ответ: 7 месяцев.

Задача 33.1. *Числа* $\frac{1}{17}, \frac{1}{15}, \frac{1}{13}$ *являются членами арифметической прогрессии. Каково наибольшее возможное значение разности прогрессии?*

Решение. Можно считать, что $\frac{1}{17} = a_1$, $\frac{1}{15} = a_m$, $\frac{1}{13} = a_n$ и $1 < m < n$. Воспользуемся формулой общего члена арифметической прогрессии. Получим: $a_m = a_1 + (m-1)\cdot d$, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, где d – разность прогрессии.

Тогда $\frac{1}{15} - \frac{1}{17} = (m-1)\cdot d$, $\frac{1}{13} - \frac{1}{15} = (n-m)\cdot d$.

Отсюда $13\cdot(n-m) = 17\cdot(m-1)$, т.е. $13n - 30m = -17$. Последнее уравнение имеет следующее решение:

$$\begin{cases} n = 1 + 30t, \\ m = 1 + 13t, \end{cases} \text{ где } t \in \boldsymbol{N}.$$

Подставив это решение в соотношение $\frac{1}{13} - \frac{1}{15} = (n - m) \cdot d$, получим:

$$d = \frac{2}{13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot t}.$$

Очевидно, что наибольшее значение d получится при $t = 1$.

Ответ: $\frac{2}{13 \cdot 15 \cdot 17}$.

Задача 33.2. *Числа* $\frac{1}{23}$, $\frac{1}{21}$, $\frac{1}{19}$ *являются членами арифметической прогрессии. Каково наибольшее возможное значение разности прогрессии?*

Ответ: $\frac{2}{19 \cdot 21 \cdot 23}$.

Задача 34.1. *Пусть* a, b, c *– различные простые числа, каждое из которых больше* 3. *Докажите, что они не могут быть последовательными членами арифметической прогрессии.*

Задача 34.2. *Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые десять членов – целые числа, а остальные – не целые?*

Ответ: да, например, $b_1 = 2^9$, $q = 3/2$.

Задача 34.3. *Пусть* a, b, c *– попарно взаимно простые числа, причем* $a \neq 1$. *Докажите, что они не могут быть членами одной геометрической прогрессии.*

Задача 35.1. *Пусть длины сторон прямоугольного треугольника – натуральные числа. Докажите, что:* 1) *длина одного из катетов кратна трем*; 2) *длина одной из сторон кратна пяти*.

Задача 35.2. *Докажите, что все прямоугольные треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию, подобны «египетскому» треугольнику* (*длины его сторон равны* 3, 4, 5).

Задача 35.3. *Докажите, что в прямоугольном треугольнике длины всех его сторон не могут быть нечетными числами.*

Задача 35.4. *Стороны прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, не превосходящими* 10, *и составляют арифметическую прогрессию. Найдите сумму длин сторон этого треугольника*.

Ответ: 12 или 24.

Задача 35.5. *Определите длины сторон треугольника, если они выражаются целыми числами, образуют арифметическую прогрессию, а периметр треугольника равен* 15.

Ответ: 3, 5, 7; 4, 5, 6; 5, 5, 5.

Задача 35.6. *Стороны прямоугольника выражены целыми числами. Каковы длины сторон прямоугольника, если его периметр численно равен площади?*

Ответ: 4 и 4; 6 и 3; 3 и 6.

Задача 36.1. *Найдите все целые значения* a, *при которых* $x^2-(a+5)x+5a+1$ *можно разложить в произведение* $(x+b)(x+c)$ *двух сомножителей с целыми* b *и* c.

Ответ: $a=3;7$.

Задача 36.2. *Найдите все целые числа* m *и* n, *при которых один из корней уравнения* $3x^3+m\cdot x^2+n\cdot x+12=0$ *равен* $1+\sqrt{3}$.

Ответ: $m=-12$, $n=6$.

Задача 36.3. *Докажите, что у многочлена* $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *не могут быть все корни целыми, если* $P(0)$ *и* $P(-1)$ *нечетные.*

Задача 36.4. *Найдите многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень:* 1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

Ответ: 1) x^4-10x^2+1; 2) x^4-16x^2+4.

Задача 37. *Найдите все пары* $(m;n)$ *натуральных чисел, для которых выполняется равенство:*

1) $\log_m(n-7)+\log_n(6m-17)=1$;

2) $\log_{m-1}(n-8)+\log_n(8m-39)=1$;

3) $\log_m(n-7)+\log_n(5m-17)=1$.

Ответ: 1) $(3;10)$; 2) $(5;12)$, $(6;9)$; 3) $(4;9)$, $(5;8)$.

Задача 38.1. *Есть* 2000 *рублей на путевки в дома отдыха. Путевки есть на* 15, 27 *и* 45 *дней. Стоимость их* 21, 40 *и* 60 *рублей соответственно. Сколько и каких путевок надо купить, чтобы истратить все деньги и сделать число дней отдыха наибольшим?*

Решение. Пусть надо купить x путевок первого типа, y путевок второго и z – третьего. По условию $21x+40y+60z=2000$. Кроме того, x, y, z – целые неотрицательные числа и выражение $15x+27y+45z$ (общее число дней отдыха) максимально.

Выясним, какой тип путевок самый выгодный, т.е. где один рубль дает наибольшее число дней отдыха. По путевкам первого типа один рубль дает $15/21$ дней отдыха, по путевкам второго типа – $27/40$, а по путевкам третьего типа – $45/60$ дней отдыха. Сравнивая эти дроби, выясняем, что путевки третьего типа самые выгодные.

Получим теперь ограничения на x и y. На 420 рублей можно купить либо 20 путевок первого типа, либо 7 путевок третьего типа. При этом число дней отдыха будет соответственно 300 и 315. Значит, при оптимальном выборе x, y, z будет выполнено неравенство $x<20$. Действительно, если $x\ge 20$, то можно вместо двадцати путевок первого типа купить семь путевок третьего. Тогда потраченная сумма будет такая же, а число дней отдыха увеличится, т.е. выбор таких x, y, z, что

$x \geq 20$, не оптимален. Далее, на 120 рублей можно купить три путевки второго типа или две путевки третьего типа. При этом число дней отдыха будет соответственно 81 и 90. Рассуждая аналогично, получим $y < 3$.

Перепишем уравнение $21x + 40y + 60z = 2000$ в виде $21x = 2000 - 40y - 60z$. Отсюда видно, что $21x$ делится на 10. Значит, x равно либо 0, либо 10, а y – одно из чисел 0, 1, 2. Перебором устанавливаем, что $x = 0$, $y = 2$, $z = 32$.

Ответ: 0 путевок первого типа, 2 путевки второго типа, 32 путевки третьего типа.

Задача 38.2. *На* 100 *долларов решено купить елочные игрушки. Игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из* 20 *игрушек, стоит* 4 *доллара. Набор, состоящий из* 35 *игрушек, стоит* 6 *долларов. Набор, состоящий из* 50 *игрушек, стоит* 9 *долларов. Сколько наборов каждого типа нужно купить, чтобы число купленных игрушек было наибольшим, и все деньги были истрачены?*

Ответ: 1 набор первого типа, 16 наборов второго типа, 0 наборов третьего типа.

Задача 38.3. *В продажу поступили путевки трех типов стоимостью по* 4, 6 *и* 9 *тысяч рублей соответственно. По путевке первого типа можно отдыхать* 8 *дней, второго типа –* 14 *дней, третьего типа –* 20 *дней. Сколько путевок каждого типа надо купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим, а сумма израсходованных средств составила бы* 100 *тысяч рублей?*

Ответ: 1 путевка первого типа, 16 путевок второго типа, 0 путевок третьего типа.

Задача 39. *Цифры трехзначного числа переписаны в обратном порядке. Докажите, что разность между исходным и полученным числом делится на* 9.

Задача 40. *Докажите, что число* $\underbrace{11\ldots1}_{81}$ *делится на* 81.

Задача 41. *При каких* n *число* $M = \underbrace{1313\ldots13}_{2n \text{ цифр}}$ *делится на* 63*?*

Ответ: $n = 9k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Задача 42. *При каких* n *число* $M = \underbrace{1717\ldots17}_{2n \text{ цифр}}$ *делится на* 33*?*

Ответ: $n = 33k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Задача 43. *Докажите, что если* n *– целое число, то число* $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ *также является целым.*

Задача 44.1. *При каких целых* q *существует целое решение уравнения* $x^3 + 2qx + 1 = 0$*?*

Ответ: -1; 0.

Задача 44.2. *При каких* a *уравнение* $x^2 + ax + 6 = 0$ *имеет хотя бы один целый корень?*

Ответ: ± 5, ± 7.

Задача 44.3. *При каких* a *уравнение* $ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$ *имеет только целые решения?*

Ответ: $a = 0$, $a = -0{,}5$ или $a = 1{,}5$.

Задача 45. *Докажите, что число* $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ *ни при каком натуральном* n *не является полным квадратом.*

Задача 46. *Докажите, что число* $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ *является полным квадратом при любом натуральном* n.

Задача 47. *Докажите, что удвоенная сумма квадратов двух натуральных чисел есть также сумма квадратов двух натуральных чисел.*

Задача 48. *Покажите, что всякое нечетное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.*

Задача 49. *Известно, что* a, b, c *– целые числа и* $a + b = c$. *Докажите, что* $a^4 + b^4 + c^4$ *есть удвоенный квадрат целого числа.*

Задача 50. *Докажите, что число, состоящее из* n $(n > 1)$ *одинаковых цифр, не является полным квадратом.*

Задача 51. *Является ли полным квадратом число*

$$M = \underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ цифр}} - \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ цифр}}?$$

Ответ: да.

Задача 52. *Пусть a – действительное число, причем $a + \frac{1}{a}$ – целое. Докажите, что при любом натуральном n число $a^n + \frac{1}{a^n}$ также целое.*

Задача 53. *При каких целых n выражение $\frac{3n+2}{n-1}$ является целым числом?*

Ответ: -4; 0; 2; 6.

Задача 54. *При каких n число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 120?*

Ответ: $n = 5k + 2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Задача 55. *Докажите, что для всех натуральных n выражение $8^{2n-1} - 1$ делится на 7.*

Задача 56. *Докажите, что $n^2 + 3n + 5$ ни при каком целом n не делится на 121.*

Задача 57. *Дано число $a = 3^{2002} + 7^{2002}$. Найдите последнюю цифру числа a и остаток от деления числа a на 11.*

Ответ: последняя цифра равна 8; остаток равен 3.

Задача 58. *Найдите натуральное число a, если его шестая степень содержит цифры 0, 1, 3 по одному разу, цифру 4 два раза, цифру 2 три раза.*

Решение. Пусть a – искомое число. Тогда сумма цифр числа a^6 равна $0+1+3+4\cdot2+2\cdot3=18$. Следовательно, $a^6 \vdots 3$, а значит, $a \vdots 3$. Так как в записи числа a^6 нет цифры 5, то $a \not\vdots 5$. Найдем диапазон изменения числа a. Имеем:

$$24^6 = 576^3 > 500^3 = 125\,000\,000 > 10^8.$$

Значит, число 24^6 содержит более 8 цифр. Далее:

$$12^6 = 144^3 < 150^3 = 3\,375\,000.$$

Значит, число 12^6 содержит менее 8 цифр. Между 12 и 24 три числа делятся на 3. Это 15, 18 и 21. Так как $a \not\vdots\, 5$, то $a \neq 15$. Остается проверить лишь числа 18 и 21. Имеем: $18^6 = 34\,012\,224$, $21^6 = 86\,251\,221$. Следовательно, $a = 18$.

Ответ: $a = 18$.

Задача 59. *На кольцевой дороге проводится эстафета мотоциклистов. Длина кольцевой дороги – 330 км, а длина каждого этапа – 75 км. Какое наименьшее количество этапов может быть в этой эстафете, если старт и финиш находятся в одном месте?*

Решение. Пусть a – количество этапов. Тогда $75a = 330b$, где b – целое число. Сократив на 15, получим: $5a = 22b$. Так как $НОД(5, 22) = 1$, то $a \vdots 22$. Следовательно, наименьшее a равно 22.

Ответ: 22.

Задача 60. *Две трубы, работая одновременно, могли бы наполнить бассейн объемом 1200 м³ за 6 часов. Однако, начав работать одновременно со второй трубой, первая труба, накачав 500 м³ воды, увеличила производительность работы на 30 м³/час, а вторая, накачав 50 м³, увеличила свою производительность на 40 м³/час. В результате бассейн был заполнен за ме́ньшее, но также целое число часов. Определите, первоначальные производительности работы труб, если известно, что каждая из них выражается целым числом м³/час.*

Ответ: 120 *м³/час*, 80 *м³/час*.

Задача 61. *В погребе 40 литровых банок с вареньем. В 8 из них – клубничное, в 7 – малиновое, в 25 – вишневое. Какое наибольшее количество банок можно в полной темноте вынести из погреба с гарантией, что в погребе останутся хотя бы 4 банки одного сорта варенья и хотя бы 3 банки другого?*

Ответ: 10 банок.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Краткий исторический очерк

Теория чисел является одним из древнейших разделов математики. Она возникла как наука, изучающая свойства натуральных чисел. Понятия натурального числа и арифметических действий над ними являются одними из первых математических абстракций, имеющими важнейшее значение для математики, других наук и всей практической деятельности человечества.

В дальнейшем круг рассматриваемых в теории чисел вопросов значительно расширился. В ней изучаются свойства различных классов чисел: целых, рациональных, алгебраических, трансцендентных. Но и в настоящее время целые числа являются важнейшим объектом исследований.

По основной теореме арифметики каждое натуральное число, начиная с 2, единственным способом представляется в виде произведения простых чисел. Таким образом, простые числа – это те элементы, из которых при помощи умножения строятся натуральные числа. Поэтому одной из важнейших задач теории чисел является изучение свойств простых чисел.

Некоторые результаты о простых числах были получены еще в Древней Греции. В книге Евклида «Начала» (IV–III в.в. до н.э.) содержится доказательство бесконечности множества простых чисел. Древнегреческий ученый Эратосфен (276–194 г.г. до н.э.) нашел способ составления таблиц простых чисел, названный позднее «решетом Эратосфена». На его идее разработаны некоторые современные методы решения задач, связанных с простыми числами (методы решета).

Ряд важных результатов о простых числах получил Л. Эйлер (1707–1783). В его рассуждениях впервые использовалось тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},\ s>1,$$

где произведение распространяется на все простые числа.

Проблемы, связанные с распределением простых чисел в натуральном ряде, обычно являются очень трудными. Многие выдающиеся математики проявляли к ним большой интерес. Существенный прогресс в исследовании этих проблем был достигнут только в середине XIX века русским ученым П.Л. Чебышевым (1821–1894). Изучая поведение функции $\pi(x)$ – количества простых чисел, не превосходящих x, он, в частности, с помощью элементарных методов оценил порядок роста этой функции, показав, что при некоторых положительных постоянных a и b для всех $x \geq 2$ выполняются неравенства

$$a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\frac{x}{\ln x}.$$

В конце XIX века Ж. Адамар (1865–1963) и Ш.Ж. де ла Валле-Пуссен (1866–1962) доказали асимптотический закон распределения простых чисел, утверждающий, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

В 1837 году Г.П. Лежен-Дирихле (1805–1859) доказал, что в любой арифметической прогрессии, разность и первый член которой взаимно простые числа, содержится бесконечное множество простых чисел.

К настоящему времени получено много глубоких результатов о простых числах. Однако имеется и целый ряд нерешенных проблем.

В трудах Евклида и особенно Диофанта (III в. н.э.) излагаются методы решения в целых числах некоторых уравнений. Эти труды положили начало большому разделу теории чисел, носящему название «теория диофантовых уравнений».

В теории диофантовых уравнений исследуются вопросы, связанные с решением уравнений в целых числах, в частности, вопросы о существовании решений, о числе решений в случае их конечности, о способах нахождения решений.

Замечательным достижением в теории чисел явилось полученное в 1937 году И.М. Виноградовым (1891–1983) доказательство теоремы, утверждающей, что каждое достаточно большое нечетное натуральное число представимо в виде суммы трех простых чисел. Эта задача, известная как проблема Х. Гольдбаха (1690–1764), не поддавалась решению около двухсот лет. Ее решение стало возможным в результате создания И.М. Виноградовым нового аналитического метода оценки тригонометрических сумм. Метод тригонометрических сумм оказался очень эффективным при решении многих проблем теории чисел.

В теории чисел много задач, которые просто формулируются, но решения которых очень трудны. Некоторые из них не решены до сих пор.

Например, не доказано и не опровергнуто утверждение о том, что всякое четное число, начиная с 4, представимо в виде суммы двух простых чисел. Это предположение является усилением проблемы Гольдбаха.

Рассмотрение таблиц показывает, что имеется много пар простых чисел, разность между которыми равна 2 (11 и 13, 41 и 43 и т.д.). Такие числа называются простыми числами-близнецами. До сих пор неизвестно, конечно или бесконечно множество пар близнецов.

Теория чисел в основном является наукой теоретической, использующая методы теории функций (в том числе комплексной переменной), алгебры, геометрии, теории вероятностей. Однако ее результаты и методы успешно применяются в других разделах математики, многих других науках, а также при решении ряда практических задач.

В развитие теории чисел внесли свой вклад такие выдающиеся математики, как П. Ферма (1601–1665), Л. Эйлер, Ж. Лагранж (1736–1813), А. Лежандр (1752–1833), К. Гаусс (1777–1855), Г.П. Лежен-Дирихле, Б. Риман (1826–1866), Ш. Эрмит (1822–1901), Д. Гильберт (1862–1943).

Большое значение имели работы русских математиков петербургской школы теории чисел, основанной П.Л. Чебышевым: А.Н. Коркина (1837–1908), Е.И. Золотарева (1847–1878), Г.Ф. Вороного (1868–1908), А.А. Маркова (1856–1922).

Замечательные достижения в теории чисел связаны с именами советских математиков. Среди них в первую очередь следует отметить И.М. Виноградова, Ю.В. Линника (1915–1972), А.Я. Хинчина (1894–1959), А.О. Гельфонда (1906–1968).

Программа факультативного курса

«Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах»

№ п/п	Название темы	Количество часов
1.	**Элементарная теория делимости целых чисел.** *Вопросы для изучения:* определение и простейшие свойства делимости целых чисел.	2
2.	**Деление целых чисел с остатком.** *Вопросы для изучения:* определение и теорема о делении с остатком; правила действий с остатками; принцип Дирихле; признаки делимости.	2
3.	**Простые числа.** *Вопросы для изучения:* определение и простейшие свойства простых чисел; основная теорема арифметики; понятие о каноническом разложении натурального числа; теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел; «решето Эратосфена».	2
4.	**Сравнения.** *Вопросы для изучения:* определение и основные свойства сравнений; признаки делимости целых чисел и сравнения; теорема Вильсона.	2
5.	**Наибольший общий делитель.** *Вопросы для изучения:* определение и вопросы существования наибольшего общего делителя двух и более целых чисел (алгоритм Евклида); теорема о линейном разложении наибольшего общего делителя.	2
6.	**Наименьшее общее кратное.** *Вопросы для изучения:* определение и теоремы о нахождении наименьшего общего кратного двух и более целых чисел. **Контрольная работа № 1 (1 час).**	2 1
7.	**Каноническое разложение натуральных чисел.** *Вопросы для изучения:* понятие о каноническом разложении; необходимое и достаточное условия делимости одного натурального числа на другое; нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного с использованием канонического разложения; количество и сумма всех натуральных делителей данного числа (функции $\tau(n)$ и $\sigma(n)$); совершенные числа, простые числа Мерсенна и Ферма.	3

8.	**Диофантовы уравнения первой степени.** *<u>Вопросы для изучения</u>:* определение и критерий разрешимости в целых числах линейного диофантова уравнения, нахождение его частного и общего решений; «Китайская теорема об остатках».	3
9.	**Нелинейные диофантовы уравнения.** *<u>Вопросы для изучения</u>:* уравнения Пифагора и Пелля; «Великая» теорема Ферма.	2
10.	**Методы решения нелинейных уравнений в целых и натуральных числах.** *<u>Вопросы для изучения</u>:* метод разложения на множители; метод решения уравнений с двумя переменными как квадратных относительно какой-либо переменной; метод остатков; метод «бесконечного спуска»; метод оценки. **Контрольная работа № 2 (1 час).**	3 1
11.	**Функция Эйлера.** *<u>Вопросы для изучения</u>:* определение и свойства функции Эйлера; теореме Эйлера; малая теорема Ферма.	2
12.	**Решение уравнений в рациональных числах.**	1
13.	**Краткий исторический очерк.**	1
14.	**Задачи на целые числа на вступительных экзаменах в вузы.**	3
	Всего:	**32**

Решения, указания и ответы

1.2. 2) Решение. Рассмотрим число $A=(ad+bc)-(ab+cd)$. Воспользуемся равенством:

$$(ad+bc)-(ab+cd)=d\cdot(a-c)-b\cdot(a-c)=(a-c)\cdot(d-b).$$

Так как A и $ab+cd$ делятся на $a-c$ и $ad+bc=A+(ab+cd)$, то число $ad+bc$ тоже делится на $a-c$.

1.4. Решение. Пусть $\overline{abc}$ трехзначное число. Рассмотрим разность:

$$\overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-(100c+10b+a)=99a-99c=9\cdot(11a-11c).$$

1.5. Решение. Пусть $\overline{aaa}$ трехзначное число. Тогда

$$\overline{aaa}=100a+10a+a=111a=37\cdot(3a).$$

1.6. Решение. Пусть $\overline{abb}$ трехзначное число. По условию $(a+2b)$ делится на 7. Тогда $\overline{abb}=100a+11b=7\cdot(14a+b)+2\cdot(a+2b)$.

1.7. Решение. Пусть $\overline{abc}$ и $\overline{def}$ – данные числа. Тогда

$$\overline{abcdef}=1000\cdot\overline{abc}+\overline{def}=999\cdot\overline{abc}+\overline{abc}+\overline{def}=$$
$$=37\cdot27\cdot\overline{abc}+(\overline{abc}+\overline{def}).$$

По условию сумма $(\overline{abc}+\overline{def})$ делится на 37, значит, число $\overline{abcdef}$ также делится на 37.

1.8. Решение. Пусть число $\overline{abc}$ делится на 37. Рассмотрим вначале число $A=10\cdot\overline{abc}-\overline{bca}$. Тогда

$$A=1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c-100\cdot b-10\cdot c-a=999\cdot a=37\cdot(27\cdot a).$$

Так как A делится на 37, то и число $\overline{bca}=10\cdot\overline{abc}-A$ делится на 37. Рассмотрим теперь число $B=10\cdot\overline{bca}-\overline{cab}$. Тогда

$$B=1000\cdot b+100\cdot c+10\cdot a-100\cdot c-10\cdot a-b=999\cdot b=37\cdot(27\cdot b).$$

Так как B делится на 37, то и число $\overline{cab}=10\cdot\overline{bca}-B$ делится на 37.

1.9. Решение. Пусть $\overline{abc}$ и $\overline{def}$ – данные числа. Тогда

$$\overline{abcdef} = 1000\cdot\overline{abc} + \overline{def} = 1001\cdot\overline{abc} - \overline{abc} + \overline{def} =$$
$$= 7\cdot 143\cdot\overline{abc} - \overline{abc} + \overline{def}\,.$$

По условию $\overline{abc} = 7\cdot m + r$, $\overline{def} = 7\cdot n + r$, следовательно,

$$\overline{abcdef} = 7\cdot 143\cdot\overline{abc} + 7\cdot n + r - 7\cdot m - r =$$
$$= 7\cdot(143\cdot\overline{abc} + n - m)\,.$$

1.11. Решение. $a^2+1 = (a^2-1)+2 = (a+1)\cdot(a-1)+2$, следовательно, a^2+1 делится на $a+1$ тогда и только тогда, когда $(a+1)\big|2$. Отсюда $|a+1|\le 2$. Так как $a+1\ne 0$, то либо $|a+1|=1$, либо $|a+1|=2$. Поэтому a совпадает с одним из четырех чисел $-3, -2, 0, 1$. Непосредственная проверка показывает, что при каждом из этих значений a требуемая делимость имеет место.

1.12. 1) Решение. Из равенства $n^3+14=(n+2)(n^2-2n+4)+6$ следует, что n^3+14 делится на $n+2$ тогда и только тогда, когда 6 делится на $n+2$.

Следовательно, $n=-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4$.

1.15. Указание. Делители n можно разбить на пары $(d, n/d)$. Так как $d\cdot(n/d)=n$, то в каждой паре одно из чисел не превосходит $\sqrt{n}$.

1.16. Указание. Делители n можно разбить на пары $(d, n/d)$. Так как число делителей нечетно, то $d=\dfrac{n}{d}$ для некоторого d.

1.17. Решение. Имеем: $ad-bc=c\cdot(a-b)-a\cdot(c-d)$. Поэтому число $a\cdot(c-d)=c\cdot(a-b)-(ad-bc)$ делится на m. А так как a и m взаимно просты, то число $c-d$ делится на m.

1.18. Решение. Имеем: $4\cdot(10a+b)=13\cdot 3a+(a+4b)$. Поэтому, если $a+4b$ делится на 13, то число $4\cdot(10a+b)$ делится на 13. Поскольку числа 4 и 13 взаимно просты, число $10a+b$ делится на 13.

Обратно, если число $10a+b$ делится на 13, то, в силу того же равенства, число $a+4b$ делится на 13.

1.20. Ответ: **1)** $12327 = 45 \cdot 273 + 42$;

2) $88943 = (-13) \cdot (-6841) + 10$;

3) $-35627 = 110 \cdot (-324) + 13$.

1.21. Ответ: **1)** 2; **2)** 3; **3)** 0, если $|n|=1$, $|n|=3$; 1, если $|n|=2$; 3, если $|n|>3$; **4)** 2.

1.21. 5) Решение. Так как $n^2+1=(n-1)(n+1)+2$, то остаток равен 2, если $|n-1|>2$, т.е. для всех $n \neq -1, 0, 1, 2, 3$. Если $n=-1, 3$, то остаток равен 0, если $n=0, 2$, то остаток равен 1. Если $n=1$, то деление с остатком не определено, т.к. $n-1=0$.

1.22. Решение. По условию имеем $1270 = b \cdot 74 + r$, где $0 \le r < b$. Поэтому $b \in \left(\frac{1270}{75}; \frac{1270}{74} \right]$, единственным целым числом, принадлежащим которому, является 17. **Ответ:** $b=17$, $r=12$.

1.28. Решение. Пусть $a = bq + r$, $0 \le r < b$. Так как $a > b$, то $q \ge 1$ и поэтому $a \ge b + r > 2r$. Отсюда $r < 0.5a$.

1.30. Решение. Вычислим остатки для нескольких первых значений n. Остаток от деления 2 на 3 равен 2. Остаток от деления 2^2 на 3 равен 1. Остаток от деления 2^3 на 3 равен 2. Методом индукции докажем, что остаток от деления 2^n на 3 равен 2 для нечетных и 1 для четных n. Для $n=1$ наше утверждение справедливо. Предположим, что оно справедливо для n. Запишем $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ и воспользуемся правилами действия над остатками. Если n нечетно, то по индукционному предположению остаток от деления 2^n на 3 равен 2. Тогда остаток от деления 2^{n+1} на 3 равен остатку от деления $2 \cdot 2 = 4$ на 3, т.е. 1. Если же n четно, то остаток от деления 2^n на 3 равен 1. И тогда остаток от деления 2^{n+1} на 3 равен $2 \cdot 1 = 2$.

1.34. Решение. Остаток от деления целого числа a на 3 может быть равен 0, 1 или 2. В каждом из этих случаев определим, какой остаток дает a^2. По правилам действия над остатками он равен остатку от деления 0^2, 1^2 и 2^2 на 3, т.е. 0, 1 и 1 соответственно. Итак, квадрат целого числа может при делении на 3 давать остатки 0 и 1. Аналогично рассматриваются случаи деления на 5 и 7.

1.35. Решение. Если числа a и b не делятся на 3, то, по предыдущей задаче, остатки от деления a^2 и b^2 на 3 равны 1. Но тогда $a^2 - b^2$ делится на 3.

Замечание. Метод решения данной задачи фактически заключался в следующем. Мы перебрали остатки от деления a и b на 3 (1 и 2, поскольку a и b не делятся на 3 по условию) и определили, какой остаток дает $a^2 - b^2$ в каждом возможном случае. Оказалось, что он всегда равен 0, т.е. $a^2 - b^2$ делится на 3. Рассуждения такого типа иногда называют ***перебором остатков***. Пользуясь ими, можно решить многие задачи элементарной теории чисел.

1.44. Указание. Перебор остатков от деления на 9.

1.50. Решение. Перебор остатков показывает, что $x^2 + y^2$ может при делении на 4 давать остатки 0, 1 и 2. Следовательно, числа вида $4n+3$ не являются суммами двух квадратов.

1.54. Решение. Пусть $m = 2x+1$, $n = 2y+1$. Тогда $m^2 = 4x\cdot(x+1)+1$, $n^2 = 4y\cdot(y+1)+1$. Так как $x\cdot(x+1)$ и $y\cdot(y+1)$ – четные числа (произведение двух подряд идущих чисел четно), то $m^2 = 8l+1$, $n^2 = 8k+1$. Рассмотрим разность $m^2 - n^2 = 8l+1-8k-1 = 8\cdot(l-k)$. Таким образом, число $m^2 - n^2$ делится на 8.

1.57. Решение. Так как $n = 2k-1$, то

$$n^3 - n = n\cdot(n-1)\cdot(n+1) = (2k-1)(2k-2)\cdot 2k = 4k\cdot(k-1)\cdot(2k-1).$$

Число $k\cdot(k-1)$ делится на 2, поэтому n^3-n делится на 8. Покажем, что $k\cdot(k-1)\cdot(2k-1)$ делится на 3. Действительно, рассмотрев таблицу остатков от деления на 3 для чисел $k-1$, k, $2k-1$, видим, что в каждом столбце таблицы встречается 0.

$k-1$	0	1	2
k	1	2	0
$2k-1$	1	0	2

Это означает, что для любого k в тройке чисел $k-1$, k, $2k-1$ одно число обязательно будет делиться на 3. Следовательно, и произведение $k\cdot(k-1)\cdot(2k-1)$ всегда делится на 3.

Поскольку 8 и 3 взаимно просты, число n^3-n делится на 24.

1.58. Решение. $n^5-n=n(n^4-1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$.

Число $n\cdot(n-1)\cdot(n+1)$ делится на 2 и на 3. Так как 2 и 3 взаимно просты, число n^5-n делится на 6. Покажем, что число n^5-n делится на 5. Действительно, рассмотрев таблицу остатков от деления на 5, получим:

n	0	1	2	–2	–1
n^2	0	1	4	4	1
n^4	0	1	1	1	1
n^4-1	–1	0	0	0	0
$n\cdot(n^4-1)$	0	0	0	0	0

Таким образом, для любого n число n^5-n дает при делении на 5 остаток 0. Поскольку 6 и 5 взаимно просты, число n^5-n делится на 30.

1.61. Решение. Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного n.

1) $n=2k$, тогда

$$3^{2n+2}+8n-9=9\cdot(3^n-1)\cdot(3^n+1)+8n=$$
$$=9\cdot(3^{2k}-1)\cdot(3^{2k}+1)+16k=$$

$$= 9 \cdot (3^k - 1) \cdot (3^k + 1) \cdot (9^k + 1) + 16k;$$

2) $n = 2k - 1$, тогда

$$3^{2n+2} + 8n - 9 = 3^{4k} + 8 \cdot (2k - 1) - 9 = (3^{4k} - 1) + 16 \cdot (k - 1) =$$

$$= (3^k - 1) \cdot (3^k + 1) \cdot (9^k + 1) + 16 \cdot (k - 1).$$

Число $9^k + 1$ четно; числа $3^k - 1$ и $3^k + 1$ четны и идут подряд, следовательно, одно из них обязательно делится на 4. Итак, произведение $(3^k - 1) \cdot (3^k + 1) \cdot (9^k + 1)$ делится на 16, а значит, и число $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

1.62. Решение. Перебор остатков показывает, что если $x_{n+2} = x_{n+1}^2 + x_n^2$ делится на 7, то либо x_{n+1}, либо x_n делится на 7. Так как $x_1 = x_2 = 1$, то ни один x_n на 7 не делится.

1.75. Указание. По принципу Дирихле найдутся два числа, имеющие одинаковые остатки от деления на n.

1.77. Указание. Среди чисел $1, 2, 2^2, \ldots, 2^a$ найдутся два, разность которых делится на a.

2.1. 1) Решение. Так как $\sqrt{353} < \sqrt{361} = 19$, то нужно проверять делимость числа 353 на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

2.1. 2) Решение. Так как $\sqrt{767} < 28$, то нужно проверять делимость числа 767 на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Имеем: $767 = 13 \cdot 59$.

2.1. 3) Решение. Так как $\sqrt{1999} < 45$, то нужно проверять делимость числа 1999 на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.

2.2. 1) Решение. Так как $\sqrt{2350} < 50$, то нужно проверять делимость на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

2.2. 2) Решение. Числа 40324, 40326, 40328 делятся на 2; числа 40323 и 40329 делятся на 3; число 40325 делится на 5; число 40327 делится на 7.

2.2. 3) Решение. Числа 3628804, 3628806, 3628808 делятся на 2; числа 3628803 и 3628809 делятся на 3; число 3628805 делится на 5; число 3628807 делится на 7.

Ответ: **1)** $2333, 2339, 2341, 2347$;
2) среди этих чисел нет ни одного простого;
3) среди этих чисел нет ни одного простого.

2.3. Решение. Обозначим через a наименьшее число, взаимно простое с $2, 3, \ldots, n$. Если бы число a не было простым, оно делилось бы на некоторое простое число $p < a$. Случай $p \le n$ невозможен, т.к. a взаимно просто с каждым из чисел $2, 3, \ldots, n$ и потому не делится ни на одно из них. Значит, $p > n$. Но тогда p есть меньшее, чем a, число, взаимно простое с $2, 3, \ldots, n$, что также невозможно. Таким образом, число a не может быть составным.

2.4. Решение. Пусть $x = n + 2$, тогда

$$nx + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

А число $(n+1)^2$ – составное.

2.9. Указание. Необходимо проверить тождества

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, если n – нечетно, и воспользоваться одним из них.

2.10. Необходимо проверить тождества

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, если n – нечетно, и воспользоваться одним из них.

2.11. Решение. Очевидно, что одним таким числом является 3. Покажем, что других таких p не существует. Действительно, p не делится на 3 и, следовательно, при делении на 3 дает остаток 1 или 2. В первом случае на 3 делится $p+2$, а во втором $p+4$. Поэтому при $p \ne 3$ одно из чисел обязательно составное.

2.12. Решение. Пусть $p > 3$, $p \in \boldsymbol{N}$. Тогда после деления числа p на 6 с остатком возможны шесть случаев:

1) $p = 6k$, тогда p – составное;
2) $p = 6k + 2 = 2 \cdot (3k + 1)$, тогда p – составное;
3) $p = 6k + 3 = 3 \cdot (2k + 1)$, тогда p – составное;
4) $p = 6k + 4 = 2 \cdot (3k + 2)$, тогда p – составное;
5) $p = 6k + 1$, тогда p может быть простым числом (например, $p = 7$);
6) $p = 6k + 5$, тогда p может быть простым числом (например, $p = 29$).

2.14. Решение. $p \neq 2$, т.к. $p + 10 = 12$ – составное число.

Пусть $p = 3$, тогда $p + 10 = 13$ – простое; $p + 14 = 17$ – простое число. Итак, $p = 3$ удовлетворяет условию задания.

Пусть теперь $p > 3$. Тогда p может быть представлено только в виде $6k + 1$ или $6k + 5$ (см. задачу 2.12). В случае $p = 6k + 1$ число $p + 14 = 6k + 15 = 3 \cdot (2k + 5)$ – составное, а в случае $p = 6k + 5$ число $p + 10 = 6k + 15 = 3 \cdot (2k + 5)$ – составное. Итак, число p не может быть больше 3.

2.15. Решение. $p \neq 2$, т.к. $8p^2 + 1 = 33$ – составное число.

Пусть $p = 3$, тогда $8p^2 + 1 = 73$ – простое число. Итак, $p = 3$ удовлетворяет условию задания.

Пусть теперь $p > 3$. Тогда p может быть представлено только в виде $6k + 1$ или $6k + 5$ (см. задачу 2.12). В случае $p = 6k + 1$ число

$$8p^2 + 1 = 8 \cdot (36k^2 + 12k + 1) + 1 = 3 \cdot (96k^2 + 32k + 3)$$

составное, а в случае $p = 6k + 5$ число

$$8p^2 + 1 = 8 \cdot (36k^2 + 60k + 25) + 1 = 3 \cdot (96k^2 + 160k + 67)$$

составное.

Итак, число p не может быть больше 3.

2.16. Решение. $p \neq 2$, т.к. $4p + 1 = 9$ – составное число.

Пусть $p = 3$, тогда $2p+1=7$ – простое; $4p+1=13$ – простое число. Итак, $p = 3$ удовлетворяет условию задания.

Пусть теперь $p > 3$. Тогда p может быть представлено только в виде $6k + 1$ или $6k + 5$ (см. задачу 2.12). В случае $p=6k+1$ число $2p+1=3\cdot(4k+1)$ – составное, а в случае $p=6k+5$ число $4p+1=3\cdot(8k+7)$ – составное.

Итак, число p не может быть больше 3.

2.19. Указание. Перебором остатков покажите, что одно из чисел делится на 5.

2.21. Указание. Пусть n – составное число. Рассмотрите два случая: а) $n = kl$, где k и l – различны; б) $n = k^2$.

2.22. Указание. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ – все простые числа, не превосходящие n, и пусть $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k - 1$. Если $N < n$, то N делится на одно из p_i, что невозможно.

2.23. Указание. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ – все простые числа, не превосходящие n, и пусть $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k - 1$. Тогда $N < n!$ и делится на некоторое простое число, которое больше n.

2.24. Решение. Пусть $n = p \cdot q$, где $1 < p \le q$, тогда

$$2^n - 1 = 2^{p\cdot q} - 1 = (2^p)^q - 1.$$

Обозначив $2^p = x$ (заметим, что $x > 2$), получим $2^n - 1 = x^q - 1$. Но

$$x^q - 1 = (x-1)\cdot(x^{q-1} + x^{q-2} + \ldots + x + 1).$$

Значит, число $2^n - 1$ составное.

2.25. Решение. Пусть p – простое число, $p > 3$. Таким образом, необходимо доказать, что $p^2 = 12k+1 \Leftrightarrow p^2 - 1 = 12k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (p-1)\cdot(p+1) = 3\cdot 2\cdot 2\cdot k$.

Так как число p – простое, то оно не делится на 3. Но тогда либо $p - 1$, либо $p + 1$ делятся на 3.

Так как число p – простое, то оно нечетное. Но тогда числа $p-1$ и $p+1$ четные. Утверждение доказано.

2.26. Решение. Рассмотрим число $(k+1)!+n$, где $2 \le n \le k+1$. Таких чисел – k штук, идущих подряд. Все они составные, т.к. n всегда можно вынести за скобку.

2.27. Решение. Если a не делится на p, то a и p взаимно просты (см. § 2, лемма 7), и потому (см. § 1, лемма 3) число b делится на p.

2.28. Решение. Если $(a+b)$ и ab делятся на простое число p, то на p делится и число $a \cdot (a+b) - ab = a^2$; следовательно, на p делится и число a. Тогда на p делится и число $(a+b)-a=b$.

В случае, когда p – составное, утверждение неверно. Например, $a = 2$, $b = 6$, $p = 4$. Тогда $a + b = 8$, $8 = 2p$; $ab = 12$, $12 = 3p$. Однако ни a, ни b не делятся на p.

2.29. Решение. Пусть $13p+1=n^3$. Тогда $13p=(n-1)\cdot(n^2+n+1)$. Так как произведение $(n-1)\cdot(n^2+n+1)$ равно произведению двух простых чисел 13 и p, то, с учетом $(n-1)<(n^2+n+1)$, возможны три случая:

1) $\begin{cases} n-1=1, \\ n^2+n+1=13p; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2, \\ 13p=7. \end{cases}$

Этот случай не удовлетворяет условию задачи.

2) $\begin{cases} n-1=13, \\ n^2+n+1=p; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=14, \\ p=211. \end{cases}$

Этот случай удовлетворяет условию задачи, т.к. 211 – простое число (Проверьте!).

3) $\begin{cases} n-1=p, \\ n^2+n+1=13; \end{cases}$ Имеем две возможности:

- $\begin{cases} n=-4, \\ p=-5. \end{cases}$ Этот случай не удовлетворяет условию задачи.

- $\begin{cases} n = 3, \\ p = 2. \end{cases}$ Этот случай удовлетворяет условию задачи.

2.30. Решение. Так как $1 + 3 + 5 + \ldots + (2m - 1) = m^2$, то данная сумма может быть представлена в виде произведения двух множителей следующим образом:

$$(2k + 1) + (2k + 3) + (2k + 5) + \ldots + (2k + 2n - 1) =$$
$$= (1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) + (2k + 3) + (2k + 5) + \ldots + (2k + 2n - 1)) -$$
$$- (1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)) = (k + n)^2 - k^2 = n \cdot (2k + n).$$

2.31. Решение. $C_p^i = \dfrac{p!}{i!(p-i)!} = \dfrac{(i+1)\cdot(i+2)\cdot\ldots\cdot(p-1)\cdot p}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-i)} \in \boldsymbol{N}$,

т.е. числитель последней дроби нацело делится на знаменатель. Так как p – число простое, то $НОД(p, k) = 1$, где $k \in \{2, 3, \ldots, p - i \,|\, 1 \le i \le p - 1\}$. Следовательно, число $(i+1)\cdot(i+2)\cdot\ldots\cdot(p-1)$ делится нацело на число $2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-i)$. Итак, $C_p^i = p \cdot q$, где $q = \dfrac{(i+1)\cdot(i+2)\cdot\ldots\cdot(p-1)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-i)}$, т.е. делится на p (p – простое число).

Если число p не является простым, то утверждение неверно. Например, $C_4^2 = 6$ и не делится на 4.

2.32. Решение. По формуле

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Причем число C_{2n}^n – натуральное, т.е. числитель последней дроби делится нацело на знаменатель. Если p – простое число и $n < p \le 2n$, то оно не делится на 2, 3, … , n. Следовательно, C_{2n}^n всегда можно представить в виде: $C_{2n}^n = p \cdot q$ ($q \in \boldsymbol{N}$). Утверждение доказано.

2.33. Решение. *Первый способ.* Если $n = 2k$, то утверждение очевидно. Пусть $n = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$, тогда

$$n^4+4=(2k+1)^4+4=16k^4+32k^3+24k^2+8k+1+4=$$
$$=4\cdot(4k^4+8k^3+6k^2+2k+1)+1=$$
$$=4\cdot(4k^2(k^2+2k+1)+(k^2+2k+1)+k^2)+1=$$
$$=4\cdot(k+1)^2\cdot(4k^2+1)+4k^2+1=(4k^2+1)\cdot(4\cdot(k+1)^2+1).$$

Утверждение доказано.

Второй способ.

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=$$
$$=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2n+2)\cdot(n^2-2n+2).$$

Оба множителя, очевидно, больше единицы. Утверждение доказано.

2.34. Указание. Докажите неравенство индукцией по n.

2.35. Указание. Из доказательства теоремы 3 (Евклида) следует, что $p_{n+1}\le p_1\cdot\ldots\cdot p_n+1$. Воспользуйтесь этим и докажите неравенство $p_n\le 2^{2^{n-1}}$ индукцией по n.

2.36. Указание. Пусть $(x;y;z)$ – некоторое решение. Покажите, что все эти числа делятся на p. Далее, положив $x=px_1$, $y=py_1$, $z=pz_1$, докажите, что $(x_1;y_1;z_1)$ также является решением исходного уравнения. Повторяя этот процесс, заключите, что x, y и z делятся на сколь угодно высокую степень p.

2.37. Решение. Предположим, что простых чисел вида $3n+2$ конечное множество. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – все эти числа.

Число $A=3\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_s+2$ не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$ и не делится на 3. Поэтому, если разложить число A на простые множители: $A=q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_r$, то среди этих множителей не будет ни одного из чисел $3, p_1, p_2, \ldots, p_s$. Иначе говоря, все эти простые множители будут числами вида $3k+1$. Но произведение чисел вида $3k+1$ снова является числом того же вида, в то время как A есть число вида $3n+2$. Противоречие, которое доказывает, что простых чисел вида $3n+2$ бесконечно много.

2.38. Решение. Предположим, что множество таких чисел конечно. Перенумеруем их в порядке возрастания: $p_1 = 3$, $p_2 = 7$, $p_3 = 11$, … , p_r. Рассмотрим целое число

$$N = 4 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r - 1.$$

Это число нечетно, поэтому все его простые делители нечетны. Нечетные числа могут быть представлены либо в виде $4n+1$, либо в виде $4n-1$.

Заметим, что произведение любых двух чисел вида $4n+1$ имеет тот же вид. Действительно,

$$(4l+1)\cdot(4m+1) = 4\cdot(4lm+l+m)+1 = 4n+1.$$

Отсюда, ввиду того, что N имеет вид $4n-1$, можно заключить, что у N есть простой делитель вида $4n-1$. Обозначим его буквой p. Так как N не делится ни на одно из чисел p_1, p_2, … , p_r, то p отлично от всех чисел p_1, p_2, … , p_r. Это противоречит с предположением, что p_1, p_2, … , p_r – совокупность *всех* простых чисел вида $4k-1$. Утверждение доказано.

2.39. Решение. Ровно половина взятых чисел делится на 2, т.е. после вычеркивания чисел, делящихся на 2, останется $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$ часть взятых чисел.

Ровно треть взятых чисел делится на 3. Из них половина делится на 2, а половина не делится на 2. Таким образом, числа, делящиеся на 3 и не делящиеся на 2, составляют $\dfrac{1}{6}$ часть от всего количества взятых чисел. Значит, ровно треть от оставшейся половины чисел делится на 3. Поэтому после вычеркивания чисел, делящихся на 2 или на 3, останется $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)$ часть от первоначального количества чисел. Достаточно легко убедиться, что среди оставшихся чисел ровно $\dfrac{1}{5}$ часть делится на 5 и т.д.

2.40. Решение. Пусть $a = b \cdot q + r$. Тогда чисел, делящихся на b, будет q (это числа b, $2b$, $3b$, ..., $q \cdot b$). Но, очевидно, $q = \left[\dfrac{a}{b}\right]$.

2.41. Решение. Чисел, делящихся на b, имеется $\left[\dfrac{a}{b}\right]$; чисел, делящихся на c, имеется $\left[\dfrac{a}{c}\right]$. Среди них и в том, и в другом случае учитывались числа, делящиеся на bc; их имеется $\left[\dfrac{a}{bc}\right]$.

3.1. 1) Решение. $14^{256} \equiv (-3)^{256} = 3^{256} = 81^{64} \equiv$

$$\equiv (-4)^{64} = 4^{64} = 16^{32} \equiv (-1)^{32} = 1 \pmod{17}.$$

3.1. 2) Решение. $6^{592} = 36^{296} \equiv 3^{296} = 81^{74} \equiv 4^{74} =$

$$= 16^{37} \equiv 5^{37} = 5 \cdot 5^{36} = 5 \cdot 25^{18} \equiv 5 \cdot 3^{18} =$$

$$= 5 \cdot 9^{9} = 45 \cdot 81^{4} \equiv 1 \cdot 4^{4} = 256 \equiv 3 \pmod{11}.$$

3.2. 1) Решение.

$$11^{10} = 121^{5} \equiv 21^{5} = 21 \cdot 21^{4} = 21 \cdot 441^{2} \equiv 21 \cdot 41^{2} = 21 \cdot 1681 \equiv$$

$$\equiv 21 \cdot 81 = 1701 \equiv 1 \pmod{100},$$ поэтому

$$11^{10} - 1 \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{100},$$ т.е. $11^{10} - 1$ делится на 100.

3.2. 2) Решение.

$$2222^{5555} \equiv 3^{5555} = 243^{1111} \equiv (-2)^{1111} = -2^{1111} \pmod 7;$$

$$5555^{2222} \equiv 4^{2222} = 16^{1111} \equiv 2^{1111} \pmod 7.$$ Поэтому

$$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv -2^{1111} + 2^{1111} = 0 \pmod 7.$$

3.4. 1) Решение. Необходимо найти остаток от деления на 100. Составим таблицу двух последних цифр степеней числа 2:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
02	04	08	16	32	64	28	56	12	24	48

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04

Получилось повторение: $2^2 \equiv 2^{22} \pmod{100}$. Следовательно, две последние цифры будут повторяться через 20, тогда: $2^{2004} = 2^{20\cdot 100+4} \equiv 2^4 \equiv 16 \pmod{100}$.

3.4. 2) Решение. Необходимо найти остаток от деления на 10:

$$1998^{2001^{2004}} \equiv 8^{2001^{2004}} \pmod{10}.$$

Составим таблицу для последней цифры степеней числа 8:

1	2	3	4	5
8	4	2	6	8

Получилось повторение: $8^1 \equiv 8^5 \pmod{10}$. Следовательно, последняя цифра будет повторяться через 4, тогда

$$8^{2001^{2004}} \equiv 8^{(4\cdot 500+1)^{2004}} = 8^{4n+1} = 8\cdot 8^{4n} = 8\cdot 4^{2n} \equiv 8\cdot 6^n \equiv 8 \pmod{10},$$

т.к. 6^n всегда оканчивается на цифру 6 для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

3.5. 1) Решение. Предположим, что $12n+5=m^2$. Тогда $5 \equiv m^2 \pmod{12}$. Составим таблицу квадратов по модулю 12 числа m:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m^2	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

Из таблицы видно, что ни одно из них не сравнимо с 5 по модулю 12.

3.6. Решение. Рассмотрим таблицу остатков от деления на 7 для произвольного целого числа x и его квадрата:

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

Из таблицы видно, что a^2+b^2 может быть сравнимо по модулю 7 со следующими числами:

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 0+4=4,\ 0+2=2,\ 1+4=5,$$
$$1+2=3,\ 1+1=2,\ 4+4\equiv 1,\ 4+2=6,\ 2+2=4.$$

Следовательно, если $a^2+b^2\equiv 0 \pmod 7$, то $a\equiv b\equiv 0 \pmod 7$.

3.7. Решение. Рассмотрим таблицу остатков от деления на 8 для произвольного целого числа x и его квадрата:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
x^2	0	1	4	1	0	1	4	1

Итак, каково бы ни было целое число x, число x^2 может иметь при делении на 8 только остатки 0, 1, 4. Обозначим через r_1, r_2, r_3 остатки, которые дают при делении на 8 числа a^2, b^2, c^2 соответственно. Тогда $a^2+b^2+c^2+1\equiv r_1+r_2+r_3+1 \pmod 8$. Но каждое из чисел r_1, r_2, r_3 может принимать лишь значения 0, 1, 4. Легко видеть поэтому, что сумма $r_1+r_2+r_3+1$ может делиться на 8 лишь в случаях, когда не менее двух из чисел r_1, r_2, r_3 равны 4.

Имеем три возможности:

1) одно из чисел r_1, r_2, r_3 равно 1, два других равны 4; тогда $r_1+r_2+r_3+1=10\not\equiv 0 \pmod 8$;
2) одно из чисел r_1, r_2, r_3 равно 0, два других равны 4; тогда $r_1+r_2+r_3+1=9\not\equiv 0 \pmod 8$;
3) $r_1=r_2=r_3=4$; тогда $r_1+r_2+r_3+1=13\not\equiv 0 \pmod 8$.

Итак, каковы бы ни были целые числа a, b, c, число $a^2+b^2+c^2+1$ не делится на 8.

3.8. Решение. Рассмотрим таблицу остатков от деления на 9 для произвольного целого числа x и его квадрата:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1

Итак, каково бы ни было целое число x, число x^2 может иметь при делении на 9 только остатки 0, 1, 4, 7. Обозначим через r_1, r_2, r_3 остатки, которые дают при делении на 9 числа a^2, b^2, c^2 соответственно. Тогда $0 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 1 \equiv r_1 + r_2 + r_3 \pmod 9$.

Но каждое из чисел r_1, r_2, r_3 может принимать лишь значения 0, 1, 4, 7. Легко видеть поэтому, что сумма $r_1 + r_2 + r_3$ может делиться на 9 лишь в следующих случаях:

1) $r_1 = r_2 = r_3 = 0$;
2) одно из чисел r_1, r_2, r_3 равно 1, два других равны 4;
3) одно из чисел r_1, r_2, r_3 равно 7, два других равны 1;
4) одно из чисел r_1, r_2, r_3 равно 4, два других равны 7.

Во всех случаях среди чисел r_1, r_2, r_3 найдутся два одинаковых, то есть какие-нибудь два из чисел a^2, b^2, c^2 имеют одинаковые остатки при делении на 9. Значит, хотя бы одна из разностей $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$, $b^2 - c^2$ делится на 9.

3.9. Решение. Так как $a - 5 \equiv 0 \pmod 9$, то $a \equiv 5 \pmod 9$. Предположим, что $a = x^4$, тогда $x^4 \equiv 5 \pmod 9$. Составим таблицу сравнений по модулю 9 для x^4:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^4	0	1	7	0	4	4	0	7	1

Из таблицы видно, что ни одно из натуральных чисел после возведения в четвертую степень не может при делении на 9 давать в остатке 5. Следовательно, если $a - 5$ делится на 9, то a не может быть четвертой степенью натурального числа.

3.10. Решение. Предположим, что $x^2 + y^2 + z^2 = 8n + 7$. Следовательно, $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod 8$.

Составим таблицу остатков от деления на 8 для квадрата любого целого числа:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
k^2	0	1	4	1	0	1	4	1

Таким образом, x^2, y^2, z^2 могут иметь лишь три различных остатка при делении на 8: 0, 1, 4. Но всевозможные комбинации этих трех остатков в сумме никогда не дадут 7.

3.12. Решение. Предположим, что

$$(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(a+2)^2=x^2.$$

Тогда $5a^2+10=x^2$, или $5(a^2+2)=x^2$, т.е. $x^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,5)$. Составим таблицу сравнений по модулю 5:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

Из таблицы видно, что $x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,5)$, т.е. $x=5k$. Тогда $5(a^2+2)=25k^2$, или $a^2+2=5k^2$. Следовательно, $a^2=5k^2-2$, т.е. $a^2\equiv -2\ (\mathrm{mod}\,5)$, или $a^2\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,5)$. Но квадрат целого числа никогда не дает при делении на 5 остаток, равный 3. Значит, сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не может быть квадратом целого числа.

3.13. Решение. Предположим, что равенство возможно, т.е.

$$(2m-2)^{2k_1}+(2m)^{2k_2}+(2m+2)^{2k_3}=n^{2p}.$$

Рассмотрим сравнения по модулю 3. Три последовательных четных числа всегда имеют следующие остатки от деления на 3: 0, 1, 2. Пусть для определенности $2m-2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)$, тогда $2m\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,3)$, $2m+2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3)$. Следовательно, $(2m-2)^{2k_1}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)$,

$$(2m)^{2k_2}\equiv 2^{2k_2}=4^{k_2}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3),$$

$$(2m+2)^{2k_3}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3).$$ Отсюда

$$(2m-2)^{2k_1}+(2m)^{2k_2}+(2m+2)^{2k_3}\equiv 0+1+1=2\ (\mathrm{mod}\,3),$$

но n^{2p} может давать только два остатка при делении на 3 – либо 0, либо 1. Итак, левая и правая части равенства

$(2m-2)^{2k_1}+(2m)^{2k_2}+(2m+2)^{2k_3}=n^{2p}$ не сравнимы по модулю 3, что и доказывает утверждение.

3.14. 1) Решение. *Первый способ.* Так как $2x+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$, то $2x\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 7)$, т.е. $2x\equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 7)$. Отсюда $x\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 7)$.

Второй способ. Составим таблицу сравнений по модулю 7:

x	0	1	2	3	4	5	6
$2x$	0	2	4	6	1	3	5
$2x+1$	1	3	5	0	2	4	6

Из таблицы видно, что $x\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 7)$ является решением данного сравнения.

3.14. 2) Решение. Так как $2x-3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$, то $2x\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 7)$, т.е. $2x\equiv 10\ (\mathrm{mod}\ 7)$. Отсюда $x\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 7)$.

3.14. 3) Решение. Составим таблицу сравнений по модулю 6:

x	0	1	2	3	4	5
$2x$	0	2	4	0	2	4
$2x+3$	3	5	1	3	5	1

Из таблицы видно, что сравнение $2x+3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 6)$ не имеет решений.

3.14. 4) Решение. Так как $x^2\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 13)$, то $x^2\equiv 12\ (\mathrm{mod}\ 13)$. Составим таблицу сравнений по модулю 13:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x^2	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

Из таблицы видно, что $x\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 13)$, $x\equiv 8\ (\mathrm{mod}\ 13)$ являются решениями данного сравнения.

3.14. 5) Решение. Так как $x^2\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 11)$, то $x^2\equiv 10\ (\mathrm{mod}\ 11)$. Составим таблицу сравнений по модулю 11:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

Из таблицы видно, что сравнение $x^2\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 11)$ не имеет решений.

3.14. 6) Решение. Так как $x^2 \equiv 2 \pmod{31}$, то $x^2 \equiv 64 \pmod{31}$, или $x \equiv 8 \pmod{31}$, $x \equiv -8 \pmod{31}$.

3.14. 7) Решение. Рассмотрим таблицу сравнений по модулю 5:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
$3x$	0	3	1	4	2
$2x^2$	0	2	3	3	2
$2x^2+3x+1$	1	1	0	3	0

Из таблицы видно, что $x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 4 \pmod 5$ являются решениями данного сравнения.

3.14. 8) Решение. Сравнение $2x^2 + 4x + 2 \equiv 0 \pmod 8$ равносильно

$$2(x^2 + 2x + 1) \equiv 0 \pmod{2 \cdot 4}.$$

Отсюда $(x+1)^2 \equiv 0 \pmod 4$. Для выполнения последнего сравнения достаточно, чтобы $x + 1 \equiv 0 \pmod 2$. Следовательно, $x \equiv 1 \pmod 2$. Поэтому возможны четыре случая: $x \equiv 1 \pmod 8$, $x \equiv 3 \pmod 8$, $x \equiv 5 \pmod 8$, $x \equiv 7 \pmod 8$.

3.16. 1) Решение. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 5, \\ x \equiv 1 \pmod 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x \equiv 24 \pmod{40}, \\ 5x \equiv 5 \pmod{40}. \end{cases}$

Вычитая из первого сравнения второе, получим:

$$3x \equiv 19 \pmod{40} \Leftrightarrow 3x \equiv -21 \pmod{40}.$$

Отсюда, т.к. $НОД(3, 40) = 1$,

$$x \equiv -7 \pmod{40} \Leftrightarrow x \equiv 33 \pmod{40}.$$

3.16. 2) Решение. $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{15}, \\ x \equiv 3 \pmod 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x \equiv 16 \pmod{120}, \\ 15x \equiv 45 \pmod{120}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x \equiv 16 \pmod{120}, \\ 7x \equiv 29 \pmod{120}. \end{cases}$$

Следовательно, $x \equiv -13 \pmod{120}$, или $x \equiv 107 \pmod{120}$.

3.16. 3) Решение. $\begin{cases} 3x+4\equiv 0 \pmod{14}, \\ 2x+1\equiv 3 \pmod 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\equiv 10 \pmod{14}, \\ x\equiv 1 \pmod 5; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x\equiv 120 \pmod{70}, \\ 14x\equiv 14 \pmod{70}. \end{cases}$$

Следовательно, $x\equiv 106 \pmod{70} \Leftrightarrow x\equiv 36 \pmod{70}$.

3.17. Решение. Рассмотрим n чисел $1, 11, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{n}$. Имеются две возможности:

1) число n является делителем одного из чисел этой совокупности;
2) ни одно из этих чисел $1, 11, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{n}$ не делится на n.

В первом случае требование условия задания выполнено. А во втором случае среди чисел $1, 11, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{n}$ найдутся два числа, сравнимые между собой по модулю n. Разность этих двух чисел записывается только единицами и нулями и делится на n.

3.18. Решение. Рассмотрим число $1\underbrace{00\ldots00}_{2k}1$, в котором $2k$ нулей. Осуществим деление этого числа на 11 «уголком». Так как $100\equiv 1 \pmod{11}$, то в результате деления в частном получим число $9090\ldots091$, в записи которого k цифр 9 чередуются с $(k-1)$ цифрой 0.

3.19. Решение. Рассмотрим числа $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\ldots11}_{218\ \text{цифр}}$. Каждое из них имеет какой-то остаток от деления на 217. Так как остатков от деления на 217 имеется 217 (т.е. $0, 1, 2, \ldots, 216$), а чисел рассматривается 218, то среди них найдутся два числа, имеющие одинаковые остатки от деления на 217. Пусть, например,

$$\underbrace{111\ldots11}_{k\ \text{цифр}} \equiv \underbrace{111\ldots11}_{(k+l)\ \text{цифр}} \pmod{217}.$$

Тогда разность этих чисел делится на 217. Подписав первое число под вторым и произведя вычитание «в столбик», получим число $\underbrace{111...11}_{l\ цифр}\underbrace{000...00}_{k\ цифр} = 10^k \cdot \underbrace{111...11}_{l\ цифр}$. По доказанному выше это число делится на 217. Так как числа 10^k и 217 взаимно просты, то число $\underbrace{111...11}_{l\ цифр}$ должно делиться на 217. Итак, существует такое натуральное n, что число $\underbrace{111...11}_{n\ цифр}$ делится на 217.

Замечание. Можно даже утверждать, что существует число, записываемое не более, чем 217 единицами, и делящееся на 217.

3.20. Решение. Покажем вначале, что $ab\cdot(a^2-b^2)$ делится на 3.

$$ab\cdot(a^2-b^2) = ab\cdot(a-b)\cdot(a+b).$$

Возможны следующие варианты:

1) $b \equiv 0 \pmod 3$, тогда $ab\cdot(a^2-b^2)$ делится на 3;

2) $b \equiv 1 \pmod 3$, тогда
$$ab\cdot(a-b)\cdot(a+b) \equiv a\cdot(a-1)\cdot(a+1) \pmod 3,$$
но $a\cdot(a-1)\cdot(a+1)$ делится на 3, значит, $ab\cdot(a^2-b^2)$ также делится на 3;

3) $b \equiv 2 \pmod 3$, тогда
$$ab\cdot(a-b)\cdot(a+b) \equiv a\cdot(a-2)\cdot(a+2) \equiv$$
$$\equiv 2a\cdot(a+1)\cdot(a+2) \pmod 3,$$
но $a\cdot(a+1)\cdot(a+2)$ делится на 3, значит, $ab\cdot(a^2-b^2)$ также делится на 3.

Итак, $ab\cdot(a^2-b^2)$ всегда делится на 3.

Теперь докажем, что число $ab\cdot(a^2-b^2)\cdot(4a^2-b^2)$ делится на 5.

$$ab\cdot(a^2-b^2)\cdot(4a^2-b^2) = ab\cdot(a-b)\cdot(a+b)\cdot(2a-b)\cdot(2a+b).$$

Возможны варианты:

1) $b \equiv 0 \pmod 5$, тогда $ab \cdot (a^2 - b^2) \cdot (4a^2 - b^2) \equiv 0 \pmod 5$;

2) $b \equiv 1 \pmod 5$, тогда

$ab \cdot (a^2 - b^2) \cdot (4a^2 - b^2) \equiv a \cdot (a-1) \cdot (a+1) \cdot (2a-1) \cdot (2a+1) \equiv$
$\equiv a \cdot (a-1) \cdot (a+1) \cdot (2a+4) \cdot (2a-4) \equiv$
$\equiv 4 \cdot (a-2) \cdot (a-1) \cdot a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \equiv 0 \pmod 5$;

3) $b \equiv 2 \pmod 5$, тогда

$ab \cdot (a^2 - b^2) \cdot (4a^2 - b^2) \equiv 2a \cdot (a-2) \cdot (a+2) \cdot (2a-2) \cdot (2a+2) \equiv$
$\equiv 8 \cdot (a-2) \cdot (a-1) \cdot a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \equiv 0 \pmod 5$;

4) $b \equiv -2 \pmod 5$, тогда получаем (аналогично предыдущему случаю): $ab \cdot (a^2 - b^2) \cdot (4a^2 - b^2) \equiv 0 \pmod 5$;

5) $b \equiv -1 \pmod 5$, тогда получаем (аналогично случаю 2):

$$ab \cdot (a^2 - b^2) \cdot (4a^2 - b^2) \equiv 0 \pmod 5.$$

Итак, $ab \cdot (a^2 - b^2) \cdot (4a^2 - b^2)$ всегда делится на 5.

Поскольку числа 3 и 5 взаимно просты, число $ab \cdot (a^2 - b^2) \cdot (4a^2 - b^2)$ делится на 15.

3.21. Решение. Заметим, что $3804 = 3 \cdot 4 \cdot 317$, которые попарно взаимно просты. Поэтому достаточно проверить делимость $\left(a^3 - a\right) \cdot \left(5^{8a+4} + 3^{4a+2}\right)$ на 3, 4 и 317 по отдельности.

Докажем делимость на 3. Так как $a^3 - a = (a-1) \cdot a \cdot (a+1)$, то $a^3 - a$, как произведение трех подряд идущих целых чисел, делится на число 3.

Докажем делимость на 4. Рассмотрим сравнение по модулю 4: $5^{8a+4} \equiv 1^{8a+4} = 1 \pmod 4$, $\quad 3^{4a+2} \equiv (-1)^{4a+2} = 1^{4a+2} = 1 \pmod 4$. Следовательно, $5^{8a+4} + 3^{4a+2} \equiv 2 \pmod 4$. Далее, заметим, что в выражении $a^3 - a$, представляющем собой произведение $(a-1) \cdot a \cdot (a+1)$ трех подряд идущих целых чисел, одно из этих чисел обязательно четное. Поэтому произведение $\left(a^3 - a\right) \cdot \left(5^{8a+4} + 3^{4a+2}\right)$ обязательно будет делиться на 4.

Докажем делимость на 317. Рассмотрим сравнение по модулю 317:

$$5^{8a+4}=625^{2a+1}\equiv(-9)^{2a+1}\pmod{317},\ 3^{4a+2}=9^{2a+1}\pmod{317}.$$

Следовательно, $5^{8a+4}+3^{4a+2}\equiv 9^{2a+1}\cdot(-1+1)=0\pmod{317}$.

3.22. Решение. Предположим, что $k^2+k+2=(6n+3)\cdot x$. Тогда $k^2+k+2=3q$. Рассмотрим для чисел вида $3q$ таблицу сравнений по модулю 6:

q	0	1	2	3	4	5
$3q$	0	3	0	3	0	3

Таким образом, должно выполняться: $k^2+k+2\equiv 0\pmod 6$ или $k^2+k+2\equiv 3\pmod 6$. Однако

k	0	1	2	3	4	5
k^2	0	3	0	3	0	3
k^2+k+2	2	4	2	2	4	2

Значит, $k^2+k+2\not\equiv 0\pmod 6$, $k^2+k+2\not\equiv 3\pmod 6$ и предположение не верно. Утверждение доказано.

3.23. 1) Решение. Рассмотрим таблицы сравнений по модулю 5, 11 и 17:

k	0	1	2	3	4
k^2	0	1	4	4	1
k^2+k+1	1	3	2	3	1

Из таблицы видно, что $k^2+k+1\not\equiv 0\pmod 5$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
k^2+k+1	1	3	7	2	10	9	10	2	7	3	1

Из таблицы видно, что $k^2+k+1\not\equiv 0\pmod{11}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
k^2	0	1	4	9	16	8	2	15
k^2+k+1	1	3	7	13	4	14	9	6

k	8	9	10	11	12	13	14	15	16
k^2	13	13	15	2	8	16	9	4	1
k^2+k+1	5	6	9	14	4	13	7	3	1

Из таблицы видно, что $k^2+k+1 \not\equiv 0 \pmod{17}$.

3.23. 2) Решение. Без ограничения общности считаем, что $k>0$. Число k^2+k четно, следовательно, число $b=k^2+k+1$ нечетно.

При $k=3i$ число $b=9i^2+3i+1$, при $k=3i-1$ число

$$b=9i^2-6i+1+3i-1+1=9i^2+3i-6i+1.$$

В обоих случаях b дает при делении на 6 остаток 1, т.к. число $9i^2+3i$ четно и делится на 3. Итак, $b=6j+1$.

При $k=3i+1$ число

$$b=9i^2+6i+1+3i+1+1=9i^2+9i+3=3\cdot(3\cdot(i^2+i)+1).$$

Но i^2+i – четно, поэтому $b=3\cdot(6j+1)$.

Итак, для любого положительного k число b можно представить в виде $b=e\cdot(6j+1)$, где $e=1$ или $e=3$.

Теперь предположим, что утверждение неверно и $b=k^2+k+1$ наименьшее число, имеющее делители вида $6m-1$, и $q=6i-1$ – наименьший из таких делителей. Тогда $b=eqr$, где $r=6j-1$, а $e=1$ или $e=3$, причем $q\le r$.

При этом $q\le k$, т.к. при $q\ge k+1$ имеем $qr\ge(k+1)^2>k^2+k+1\ge qr$, что невозможно.

Рассмотрим число

$$b_1=(k-q)^2+(k-q)+1=b-q\cdot(2k-q+1).$$

Это число делится на q и, очевидно, меньше b. Противоречие.

3.24. Решение. $1+2+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$. Так как нас интересует последняя цифра, рассмотрим сравнение по модулю 10:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$n\cdot(n+1)$	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

Так как число $n\cdot(n+1)$ – четное, то по свойству сокращения сравнений имеем:

1) $n\cdot(n+1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,10)\ \Rightarrow\ \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,5)$. Значит, в этом случае последняя цифра числа $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ может быть 0 или 5.

2) $n\cdot(n+1)\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,10)\ \Rightarrow\ \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,5)$.Значит, в этом случае последняя цифра числа $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ может быть 1 или 6.

3) $n\cdot(n+1)\equiv 6\ (\mathrm{mod}\,10)\ \Rightarrow\ \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,5)$. Значит, в этом случае последняя цифра числа $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ может быть 3 или 8.

Итак, число вида $1+2+\ldots+n$ может заканчиваться лишь на следующие цифры: 0, 1, 3, 5, 6, 8. Утверждение доказано.

3.25. Решение. *Необходимость.* Пусть число $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ делится на 9, требуется доказать, что сумма его цифр $a_1+a_2+\ldots+a_n$ делится на 9.

Действительно,

$$10\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,9),\ 10^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,9),\ \ldots,\ 10^{n-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,9).$$

Поэтому

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot 10^1+a_n\cdot 10^0\equiv$$
$$\equiv a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n\ (\mathrm{mod}\,9).$$ Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть сумма цифр $a_1+a_2+\ldots+a_n$ числа $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ делится на 9, требуется доказать, что число $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ также делится на 9. Действительно,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \equiv$$
$$\equiv a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10^1 + a_n \cdot 10^0 = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n} \pmod 9.$$
Достаточность доказана.

3.26. Решение. *Необходимость.* Пусть число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ делится на 11, требуется доказать, что разность $(a_1 + a_3 + \ldots) - (a_2 + a_4 + \ldots)$ делится на 11 (здесь для удобства обозначений нумерация мест производится с конца числа $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$).

Действительно,
$$10 \equiv -1 \pmod{11},\ 10^2 \equiv 1 \pmod{11},\ 10^3 \equiv -1 \pmod{11},\ \ldots,$$
$$10^{n-1} \equiv (-1)^{n-1} \pmod{11}.$$

Поэтому
$$\overline{a_n \ldots a_4 a_3 a_2 a_1} = a_1 \cdot 10^0 + a_2 \cdot 10^1 + a_3 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10^3 + \ldots + a_n \cdot 10^{n-1} \equiv$$
$$\equiv a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_n \cdot (-1)^{n-1} =$$
$$= (a_1 + a_3 + \ldots) - (a_2 + a_4 + \ldots) \pmod{11}.$$ Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть разность $(a_1 + a_3 + \ldots) - (a_2 + a_4 + \ldots)$ делится на 11, требуется доказать, что число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ также делится на 11.

Действительно, $(a_1 + a_3 + \ldots) - (a_2 + a_4 + \ldots) \equiv$
$$\equiv (a_1 \cdot 10^0 + a_3 \cdot 10^2 + \ldots) + (a_2 \cdot 10^1 + a_4 \cdot 10^3 + \ldots) =$$
$$= a_1 \cdot 10^0 + a_2 \cdot 10^1 + a_3 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10^3 + \ldots + a_n \cdot 10^{n-1} =$$
$$= \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1} \pmod{11}.$$ Достаточность доказана.

3.27. Решение. Дано: $\overline{abcdef} \;\vdots\; 7$. Требуется показать, что $\overline{bcdefa} \;\vdots\; 7$.

По условию:
$$\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f \equiv$$
$$\equiv a \cdot 3^5 + b \cdot 3^4 + c \cdot 3^3 + d \cdot 3^2 + e \cdot 3 + f \pmod 7 \equiv$$
$$\equiv 5a + 4b + 6c + 2d + 3e + f \equiv 0 \pmod 7.$$

Рассмотрим число $\overline{bcdefa}$. Для него выполнено:

$$\overline{bcdefa} = b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + f \cdot 10 + a \equiv$$
$$\equiv b \cdot 3^5 + c \cdot 3^4 + d \cdot 3^3 + e \cdot 3^2 + f \cdot 3 + a \pmod 7 \equiv$$
$$\equiv 5b + 4c + 6d + 2e + 3f + a \pmod 7.$$

Тогда $5b+4c+6d+2e+3f+a =$

$$= (5a+4b+6c+2d+3e+f)-4a+b-2c+4d-e+2f \equiv$$
$$\equiv -4a+b-2c+4d-e+2f \equiv 3a+b+5c+4d+6e+2f =$$
$$= 5a-2a+4b-3b+6c-c+2d+2d+3e+3e+f+f =$$
$$= (5a+4b+6c+2d+3e+f)-2a-3b-c+2d+3e+f \equiv$$
$$\equiv -2a-3b-c+2d+3e+f \equiv$$
$$\equiv 5a+4b+6c+2d+3e+f \equiv 0 \pmod 7.$$

3.28. Решение. 1) Предположим, что число p является составным. Тогда $p = ab$, причем $1 < a < p$, $1 < b < p$.

При $a \neq b$ оба числа a и b входят множителями в $(p-1)!$, поэтому $(p-1)! \equiv 0 \pmod p$. Противоречие с условием $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Если же $a = b$, то $p = a^2$, где $a \geq 2$.

При $a = 2$ имеем: $p = 4$, $(p-1)! \equiv -2 \pmod p$. Это противоречит условию $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

При $a > 2$ имеем: $p > 2a$, т.е. $p-1 \geq 2a$. Значит, оба числа a и $2a$ входят множителями в $(p-1)!$, так что $(p-1)!$ делится на $a \cdot 2a$ и потому делится на $a^2 = p$. Итак, $(p-1)! \equiv 0 \pmod p$, что противоречит условию $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$. ■

2) Пусть p – простое число. Докажем, что числа $2, 3, \ldots, (p-2)$ можно разбить на пары таким образом, что произведение чисел каждой пары будет сравнимо с единицей по модулю p. Итак, покажем, что для любого a найдется такое b, что: $a \cdot b \equiv 1 \pmod p$, где a, b из набора чисел $2, 3, \ldots, (p-2)$. Действительно, т.к. $НОД(a, p) = 1$, то

$1 = ax + py$, причем можно считать, что $x < p$ (Подумайте, почему?!). Отсюда $ax = -py + 1$, или $ax \equiv 1 \pmod{p}$. Положим $b = x$. Итак, $1 \cdot \underbrace{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2)}_{\equiv 1 \pmod{p}} \cdot (p-1) \equiv p - 1 \equiv -1 \pmod{p}$, так как только у числа $(p-1)$ нет «пары». ■

3.29. Решение. Число 2003 – простое. Тогда

$$98! \cdot 1904! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1904 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 98 \equiv$$

$$\equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1904 \cdot (-2002) \cdot (-2001) \cdot \ldots \cdot (-1905) =$$

$$= (-1)^{98} \cdot 2002! \overset{\substack{\text{теорема}\\\text{Вильсона}\\\downarrow}}{\equiv} -1 \pmod{2003}.$$

Следовательно, $98! \cdot 1904! + 1 \equiv 0 \pmod{2003}$.

3.30. Решение. Число 2003 – простое. Тогда

$$97! \cdot 1905! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1905 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 97 \equiv$$

$$\equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1905 \cdot (-2002) \cdot (-2001) \cdot \ldots \cdot (-1906) =$$

$$= (-1)^{97} \cdot 2002! = -(2002!) \overset{\substack{\text{теорема}\\\text{Вильсона}\\\downarrow}}{\equiv} 1 \pmod{2003}.$$

Следовательно, $97! \cdot 1905! - 1 \equiv 0 \pmod{2003}$.

3.31. Решение. Все числа, которые получаются в результате этих действий – целые. Вначале $x = 3$, а значит, $x \equiv 3 \pmod{7}$. Докажем, что все получающиеся числа будут сравнимы с 3 по модулю 7. Действительно, если $x \equiv 3 \pmod{7}$, то $2x + 4 \equiv 2 \cdot 3 + 4 \equiv 3 \pmod{7}$, $3x + 8 \equiv 3 \cdot 3 + 8 \equiv 3 \pmod{7}$ и $x^2 + 5x \equiv 3^2 + 5 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{7}$. Так как $2002 \not\equiv 3 \pmod{7}$, то число 2002 получить с помощью этих действий невозможно.

4.2. Ответ: **1)** $d = 3$, $3 = 321 \cdot (-21) + 843 \cdot 8$;

2) $d = 6$, $6 = 852 \cdot 55 + 822 \cdot (-57)$;

3) $d = 1$, $1 = 23521 \cdot (-7192) + 75217 \cdot 2249$;

4) $d = 17$, $17 = 867 \cdot (-9) + 391 \cdot 20$;

5) $d = 1$, $1 = 945 \cdot 64 + 307 \cdot (-197)$.

4.3. Ответ: **1)** $\frac{11}{16}$, т.к. $НОД(21120, 30720) = 1920$;

2) $\frac{17}{19}$, т.к. $НОД(9061, 10127) = 533$;

3) $\frac{13}{9}$, т.к. $НОД(377, 261) = 29$;

4) $\frac{23}{27}$, т.к. $НОД(4853, 5697) = 211$.

4.4. 1) Решение. Алгоритм Евклида для нахождения $НОД(a, a+b)$:

$$a + b = a \cdot 1 + b.$$

На следующем шаге будет производиться деление с остатком числа a на число b, при этом будет найден $НОД(a, b)$. Значит, $НОД(a, b) = НОД(a, a+b)$.

4.4. 2) Решение. Алгоритм Евклида: $a - b = a \cdot 1 - b$.

Но $НОД(a, b) = НОД(a, -b)$.

4.5. Указание. Пусть у чисел $a+b$ и ab существует общий делитель d, $|d| > 1$. Тогда d будет делителем чисел $a \cdot (a+b) = a^2 + ab$ и $b \cdot (a+b) = b^2 + ab$. Значит, d будет делителем чисел a^2 и b^2.

4.6. Решение. Пусть $d = НОД(a+b, a-b)$. Тогда d делит сумму и разность чисел $a+b$ и $a-b$, т.е. $d \mid (2a)$ и $d \mid (2b)$. Если d нечетно, т.е. взаимно просто с 2, то $d \mid a$ и $d \mid b$, откуда $d = 1$. Если d четно, т.е. $d = 2d_1$, тогда $d_1 \mid a$ и $d_1 \mid b$. Отсюда $d_1 = 1$ и потому $d = 2$.

Если оба числа a и b нечетны, например, $a = 9$, $b = 5$, то $НОД(a+b\,,\,a-b) = 2$.

4.7. Указание. $a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab$, но

$$НОД(a+b\,,\,ab) = 1 \text{ (см. задачу 4.5).}$$

4.8. Решение. Алгоритм Евклида:

$$13a + 8b = (5a+3b)\cdot 2 + (3a+2b),$$
$$5a + 3b = (3a+2b)\cdot 1 + (2a+b),$$
$$3a + 2b = (2a+b)\cdot 1 + (a+b),$$
$$2a + b = (a+b)\cdot 1 + a,$$
$$a + b = a\cdot 1 + b.$$

4.12. Решение. Пусть $НОД(c\,,\,b) = d$, $НОД(ac\,,\,b) = d_1$. Тогда существуют такие целые числа u, v, x, y, что $uc + vb = d$, $xac + yb = d_1$. Кроме того, по условию $НОД(a\,,\,b) = 1$, т.е. существуют такие целые числа p и q, что $pa + qb = 1$. Так как каждое из чисел b и c делится на d, то равенство $xac + yb = d_1$ показывает, что d_1 делится на d. С другой стороны,

$$d = uc + vb = uc\cdot(pa+qb) + vb = ac\cdot(up) + b\cdot(ucq+v),$$

откуда видно, что d делится на d_1. Следовательно, $d_1 = d$.

4.15. Решение. Применим алгоритм Евклида:

$$18a + 5b = (11a+2b)\cdot 1 + (7a+3b),$$
$$11a + 2b = (7a+3b)\cdot 1 + (4a-b),$$
$$7a + 3b = (4a-b)\cdot 1 + (3a+4b),$$
$$4a - b = (3a+4b)\cdot 1 + (a-5b),$$
$$3a + 4b = (a-5b)\cdot 3 + 19b.$$

Значит, $НОД(11a+2b\,,18a+5b) = НОД(a-5b\,,19b)$.

Далее, т.к. числа a и b взаимно просты, то числа $a-5b$ и b также взаимно просты (действительно, по алгоритму Евклида $a - 5b = b\cdot(-5) + a$). И потому

$$НОД(a-5b\,,19b) = НОД(a-5b\,,19) \text{ (см. задачу 4.12).}$$

Теперь ясно, что если $a-5b$ делится на 19, то $d=19$, если нет, то $d=1$.

4.17. 2) Решение. Умножим первое число на 4. Тогда

$$НОД(12n^2-20,\,4n-1)=НОД(12n^2-20-3n\cdot(4n-1),\,4n-1)=$$
$$=НОД(3n-20,\,4n-1)=НОД(n+19,\,4n-1)=НОД(n+19,\,77).$$

Следовательно, $НОД(4\cdot(3n^2-5),\,4n-1)$ может быть равен 1, 7, 11 или 77. Так как число 4 взаимно просто со всеми этими числами, то $НОД(3n^2-5,\,4n-1)$ также может быть равен 1, 7, 11 или 77.

4.18. Решение. Числа $A=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ и $B=2n+1$ связаны, как легко проверить, соотношением $B^2-8A=1$. Если теперь $d=НОД(A,\,B)$, то левая часть этого соотношения делится на d, и потому $d=1$.

4.19. Указание. Пусть $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=m$. Из равенства $ad+bc=mbd$ следует, что $b\mid d$ и $d\mid b$.

4.20. Указание. Пусть m – наибольшее целое число, для которого $2^m\le n$. Покажите, что $2^{m-1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$ имеет вид $\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2}$, где b – нечетно, и воспользуйтесь задачей 4.19.

4.21. Решение. Из условия задания следует, что $НОД(a,\,b)=1$. Предположим, что дробь $\dfrac{2a+b}{5a+3b}$ сократима, т.е. существует $d=НОД(2a+b,\,5a+3b)$, $d\ne1$. Но тогда тот же делитель d должны иметь числа $2\cdot(5a+3b)-5\cdot(2a+b)=b$ и $3\cdot(2a+b)-(5a+3b)=a$. Это противоречит несократимости дроби a/b.

4.22. 1) Решение. Предположим, что дробь сократима и $d = НОД(2n^2 - 1, 2n + 1)$, $d \neq 1$. Тогда d является делителем числа $c = (2n+1)^2 - 2 \cdot (2n^2 - 1) - 2 \cdot (2n+1)$, но

$$c = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 2 - 4n - 2 = 1.$$

Следовательно, $d = 1$. Противоречие.

4.22. 2) Решение. Предположим, что дробь сократима и

$$d = НОД(n^2 + n - 1, n^2 + 2n), \ d \neq 1.$$

Тогда d является делителем числа

$$c = ((n^2 + 2n) - (n^2 + n - 1))^2 - (n^2 + 2n),$$

но $c = 1$. Следовательно, $d = 1$. Противоречие.

4.24. 1) Решение. Пусть эти числа $2k - 1$ и $2k + 1$; число d является их наибольшим общим делителем. Тогда d будет делителем числа $(2k+1) - (2k-1) = 2$. Однако $НОД(2, 2k-1) = 1$, $НОД(2, 2k+1) = 1$. Следовательно, $d = 1$.

4.24. 2) Решение. Пусть эти числа $2k$ и $2k + 2$; число d является их наибольшим общим делителем. Очевидно, что $d \geq 2$. Тогда d будет делителем числа $(2k+2) - 2k = 2$. Следовательно, $d = 2$.

4.28. Указание. Запишем $a = 36a_1$, $b = 36b_1$. Тогда $a_1 + b_1 = 12$ и остается найти все разложения числа 12 в сумму двух взаимно простых слагаемых.

4.32. Указание. Пусть $n = mq + r$. Согласно тождеству

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

число $2^{mq} - 1$ делится на $2^m - 1$. Пусть $2^{mq} - 1 = (2^m - 1) \cdot x$. Тогда

$$2^n - 1 = (2^m - 1) \cdot 2^r \cdot x + (2^r - 1).$$

Следовательно, $НОД(2^n - 1, 2^m - 1) = НОД(2^m - 1, 2^r - 1)$. Будем продолжать этот процесс, следуя алгоритму Евклида.

4.34. Указание. Пусть a и b – исходные числа и $a \geq b$. В процессе игры на доске появится остаток r от деления a на b, остаток от деления b на r и т.д.

5.2. Решение. $30720 = 21120 \cdot 1 + 9600$, $21120 = 9600 \cdot 2 + 1920$, $9600 = 1920 \cdot 5$. Итак,

$НОД(21120, 30720) = 1920$, $НОК(21120, 30720) = 337920$.

Кроме того, $337920 = 21120 \cdot 16$, $337920 = 30720 \cdot 11$.

5.3. Решение. $1620 = 192 \cdot 8 + 84$, $192 = 84 \cdot 2 + 24$, $84 = 24 \cdot 3 + 12$, $24 = 12 \cdot 2$. Итак,

$НОД(192, 1620) = 12$, $НОК(192, 1620) = 25920$.

Тогда $\dfrac{7}{192} + \dfrac{187}{1620} = \dfrac{7 \cdot 135 + 187 \cdot 16}{25920} = \dfrac{3937}{25920}$. Дробь $\dfrac{3937}{25920}$ несократима (Проверьте!).

5.4. Решение. $НОК(2, 3, 4, 5, 6) = 60$, следовательно, искомое число должно давать остаток 1 при делении на 60. Наименьшее из натуральных чисел, бóльших двух, дающее при делении на 60 остаток 1 есть число 61.

5.9. Решение. Числа n и $n+1$ взаимно просты, поэтому

$$НОК(n, n+1) = n \cdot (n+1).$$

Найдем теперь $НОД(n \cdot (n+1), n+2)$. Так как $n+1$ и $n+2$ взаимно просты, то $НОД(n \cdot (n+1), n+2) = НОД(n, n+2)$ (см. упражнения §4). Если n – нечетно, то $НОД(n, n+2) = 1$, а если n – четно, то $НОД(n, n+2) = 2$ (см. упражнения §4). Таким образом,

$$НОК(n, n+1, n+2) = \begin{cases} n \cdot (n+1) \cdot (n+2), & n - \text{нечетное}, \\ \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{2}, & n - \text{четное}. \end{cases}$$

5.16. Решение. Имеются две возможности: $n = 2n_1$ и $n = 2n_1 + 1$.

Если $n = 2n_1$, то, рассмотрев набор чисел

$$1, 2, \ldots, n_1, n_1 + 1, \ldots, 2n_1, 2n_1 + 1, 2 \cdot (n_1 + 1), \ldots, 4n_1,$$

можно заметить, что

$$НОК(n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, 2n) = НОК(n + 1, n + 2, \ldots, 2n).$$

(Действительно, числа $n_1+1, n_1+2, \dots, 2n_1$ в два раза меньше соответствующих чисел $2n_1+2, 2n_1+4, \dots, 4n_1$, входящих в набор $n+1, n+2, \dots, 2n$).

Если $n = 2n_1 + 1$, то, рассмотрев набор чисел

$$1, 2, \dots, n_1, n_1+1, \dots, 2n_1+1, 2\cdot(n_1+1), \dots, 2\cdot(2n_1+1),$$

можно заметить, что

$$НОК(n_1+1, n_1+2, \dots, 2n) = НОК(n+1, n+2, \dots, 2n).$$

(Действительно, числа $n_1+1, n_1+2, \dots, 2n_1+1$ в два раза меньше соответствующих чисел $2n_1+2, 2n_1+4, \dots, 4n_1+2$, входящих в набор $n+1, n+2, \dots, 2n$).

Для n_1 вновь имеются две возможности: $n_1 = 2n_2$ и $n_1 = 2n_2+1$. Тогда можно (аналогично рассмотренным выше случаям) заметить, что

$$НОК(n_2+1, n_2+2, \dots, 2n) = НОК(n+1, n+2, \dots, 2n).$$

И так далее.

В итоге получим конечную убывающую последовательность натуральных чисел $n > n_1 > n_2 > n_3 > \dots$.

Причем для каждого n_i из этой последовательности будет выполняться:

$$НОК(n_{i+1}+1, n_{i+2}+2, \dots, 2n) = НОК(n+1, n+2, \dots, 2n).$$

При $n_i = 1$ получим

$$НОК(2, \dots, 2n) = НОК(n+1, n+2, \dots, 2n),$$

а значит, наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ совпадает с наименьшим общим кратным чисел $n+1, n+2, \dots, 2n$.

5.17. Решение. $a\cdot b = НОД(a, b)\cdot НОК(a, b)$, поэтому $a\cdot b = 6\cdot 90 = 540$. Но $a = 6m$, $b = 6n$, поэтому $36\cdot m\cdot n = 540$, или $m\cdot n = 15$. С учетом симметрии возможны два случая:

1) $m = 1$, $n = 15$; 2) $m = 3$, $n = 5$.

Первый случай невозможен, т.к. одно из чисел будет делиться на другое. Во втором случае получаются числа 18 и 30.

6.1. Ответ: 1) $a = 2^6 \cdot 5^6$; **2)** $a = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$; **3)** $a = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$.

6.2. 1) Решение. Найдем каноническое разложение числа $92\,772\,757$. Для каждого простого $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\ \ldots$ последовательно проверяем, делится ли $92\,772\,757$ на p. Первым простым делителем $92\,772\,757$ является 7: $\quad 92\,772\,757 = 7 \cdot 13\,253\,251$.

Будем теперь искать аналогичным образом простой делитель $13\,253\,251$. При этом очевидно, что перебор можно начинать с 7, поскольку уже установлено, что 2, 3 и 5 не делят исходное число. Проверка показывает, что $13\,253\,251 = 11 \cdot 1\,204\,841$. Продолжая этот процесс, находим:

$$1\,204\,841 = 11 \cdot 109\,531,\ 109\,531 = 17 \cdot 6\,443,\ 6\,443 = 17 \cdot 379.$$

Число 379 является простым. Следовательно, $92\,772\,757 = 7 \cdot 11^2 \cdot 17^2 \cdot 379$.

6.2. Ответ: 1) $92\,772\,757 = 7 \cdot 11^2 \cdot 17^2 \cdot 379$;

2) $82\,798\,848 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 11^3$; **3)** $64\,984\,829 = 7^2 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 353$;

4) $97\,363\,981 = 11^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 331$; **5)** $29\,520\,491 = 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 383$.

6.3. 1) Решение. $a = 72 = 2^3 \cdot 3^2$, $b = 135 = 3^3 \cdot 5$.

Далее, $72 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0$, $135 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^1$.

Тогда $d = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 9$, $h = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 1080$.

6.3. Ответ: 1) $d = 3^2 = 9$, $h = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 1080$;

2) $d = 3^5 \cdot 13^1 \cdot 101^1$, $h = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 13^3 \cdot 101^2 \cdot 113^1$;

3) $d = 7^1 \cdot 11^1$, $h = 2^1 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 19^2 \cdot 23^1 \cdot 29^4$.

6.5. Решение. $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11 \cdot (a + b)$. Так как $\overline{ab} + \overline{ba}$ должно быть полным квадратом, то $a + b = 11 \cdot x^2$, где $x \in \boldsymbol{N}$. Число $\overline{ab} + \overline{ba}$ не превосходит 198 ($\overline{ab} + \overline{ba} = 198$ при $a = b = 9$). Отсюда $11^2 \cdot x^2 \le 198$; неравенство выполняется лишь при $x = 1$. Итак, $a + b = 11$, а множество пар $(a\,;b)$, являющихся решением, будет следующим: $(2\,;9)$, $(3\,;8)$, $(4\,;7)$, $(5\,;6)$, $(6\,;5)$, $(7\,;4)$, $(8\,;3)$, $(9\,;2)$.

6.6. Указание: $(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)=7\cdot 13$.

6.14. Указание. Переберите делители числа 288, бо́льшие 60.

6.22. Указание. Кратность, с которой p входит в $n!$, равна $S_1+S_2+\dots$, где S_k – количество чисел, не превосходящих n и делящихся на p^k. Покажите, что $S_k=\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$.

6.26. Решение. Пусть $c=p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\gamma_k}$ – каноническое разложение c. Так как $НОД(a,b)=1$, то каждое простое p_i входит либо в разложение a, либо в разложение b, но не в оба одновременно. Без ограничения общности можно считать, что $p_1,\dots,p_s$ входят в разложение a, а $p_{s+1},\dots,p_k$ – в разложение b. Пусть

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s},\ b=p_{s+1}^{\beta_{s+1}}\cdot p_{s+2}^{\beta_{s+2}}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}.$$

Тогда

$$p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}\cdot p_{s+1}^{\beta_{s+1}}\cdot p_{s+2}^{\beta_{s+2}}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}=p_1^{n\gamma_1}\cdot p_2^{n\gamma_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n\gamma_k}.$$

Из единственности канонического разложения получаем, что $\alpha_i=n\gamma_i$ и $\beta_j=n\gamma_j$. Поэтому достаточно положить

$$x=p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{\gamma_s},\ y=p_{s+1}^{\gamma_{s+1}}\cdot p_{s+2}^{\gamma_{s+2}}\cdot\ldots\cdot p_k^{\gamma_k}.$$

6.29. Решение. Обозначим делители числа a через $a_1, a_2, \dots, a_m$, делители числа b через $b_1, b_2, \dots, b_n$. Тогда ab делится на любое произведение $a_1b_1, a_1b_2, \dots, a_1b_n, a_2b_1, a_2b_2, \dots, a_2b_n, \dots, a_mb_n$ и других делителей оно не имеет. Количество делителей ab, как легко видеть, равно mn. (Заметим, что среди этих произведений окажутся и сами числа $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$, т.к. среди делителей чисел a и b содержится 1.)

6.31. Решение. Пусть $A=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}$ данное число, записанное в каноническом виде. Тогда количество его натуральных делителей

$N=(k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_s+1)$. Число N будет нечетным тогда и только тогда, когда числа $k_1, k_2, \ldots, k_s$ являются четными. Но тогда число A является полным квадратом некоторого натурального числа.

6.32. Решение. Имеем $\sigma(n)=(1+p)\cdot(1+q)=48$. Несложный перебор простых чисел показывает, что решениями этого уравнения являются $p=3$, $q=11$ и $p=5$, $q=7$. Следовательно, $n=33$ или $n=35$.

6.37. Указание. Пусть $n=N!$. Тогда числа $1, 2, \ldots, N$ являются делителями n и поэтому $\frac{\sigma(n)}{n}\geq 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}$. Известно, что сумма $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}$ стремится к бесконечности при возрастании N.

7.1. 1) Решение. Так как $НОД(3,6)=3$ и 22 не делится на 3, то уравнение не имеет целочисленных решений.

7.1. 2) Решение. Так как $НОД(6,9)=3$ и 2 не делится на 3, то уравнение не имеет целочисленных решений.

7.1. 3) Решение. $9=5\cdot1+4$, $5=4\cdot1+1$.
$1=5-4=5-(9-5)=2\cdot5-1\cdot9$, $5\cdot2+9\cdot(-1)=1$, отсюда $5\cdot4+9\cdot(-2)=2$. Частное решение: $(x_0\,;y_0)=(4;-2)$. Общее решение: $\begin{cases}x=4-9t,\\ y=-2+5t,\end{cases}$ где $t\in\mathbf{Z}$.

7.1. 4) Решение. $11=7\cdot1+4$, $7=4\cdot1+3$, $4=3\cdot1+1$.

$$1=4-3=4-(7-4)=2\cdot4-7=2\cdot(11-7)-7=2\cdot11-3\cdot7,$$

$7\cdot(-3)+11\cdot 2=1$, отсюда $7\cdot(-39)+11\cdot 26=13$. Частное решение: $(x_0\,;\,y_0)=(-39;\,26)$. Общее решение: $\begin{cases} x=-39-11t, \\ y=26+7t, \end{cases}$ где $t\in\mathbf{Z}$.

7.1. 5) Решение. Подбором находим частное решение: $(x_0\,;\,y_0)=(-29;\,29)$. Общее решение: $\begin{cases} x=-29+4t, \\ y=-29+3t, \end{cases}$ где $t\in\mathbf{Z}$.

7.1. 6) Решение. Подбором находим частное решение: $(x_0\,;\,y_0)=(2;\,3)$. Общее решение: $\begin{cases} x=2-12t, \\ y=3+11t, \end{cases}$ где $t\in\mathbf{Z}$.

7.1. 7) Уравнение равносильно уравнению $9x-2y=3$. Подбором находим частное решение: $(x_0\,;\,y_0)=(1;\,3)$. Общее решение: $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=3+9t, \end{cases}$ где $t\in\mathbf{Z}$.

7.3. Решение. Так как $НОД(200\,,3)=1$, уравнение разрешимо в целых числах. Подбором находим частное решение: $(a_0\,;b_0)=(10;1)$. Тогда общее решение: $\begin{cases} a=10-3t, \\ b=1+200t, \end{cases}$ где $t\in\mathbf{Z}$. В силу того, что необходимо найти натуральные числа a и b, удовлетворяющие уравнению $200a+3b=2003$, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 10-3t>0, \\ 1+200t>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t<\dfrac{10}{3}, \\ t>-\dfrac{1}{200}. \end{cases}$$

Так как $t\in\mathbf{Z}$, то системе неравенств удовлетворяют только четыре значения *t*: $t_1=0$, $t_2=1$, $t_3=2$ и $t_4=3$. При $t_1=0$ получаем решение $(a_1\,;b_1)=(10;1)$. При $t_2=1$ получаем решение

$(a_2\,; b_2) = (7; 201)$. При $t_3 = 2$ получаем решение $(a_3\,; b_3) = (4; 401)$. При $t_4 = 3$ получаем решение $(a_4\,; b_4) = (1; 601)$.

7.4. Решение. Пусть x – количество монет по 2 копейки, y – количество монет по 3 копейки. Условие задачи приводит к уравнению $2x + 3y = 20$, причем $x \geq 0$, $y \geq 0$. Одним из решений этого уравнения является $(x_0\,; y_0) = (-20; 20)$. Все решения находятся по формулам: $\begin{cases} x = -20 - 3t\,, \\ y = 20 + 2t\,, \end{cases}$ где $t \in \boldsymbol{Z}$. При этом $\begin{cases} -20 - 3t \geq 0\,, \\ 20 + 2t \geq 0. \end{cases}$ Значит, $-10 \leq t \leq -7$, т.е. $t = -10\,, -9\,, -8\,, -7$, и поэтому возможны лишь четыре способа размена, которые осуществляются согласно найденным значениям t.

При $t = -10$: $(x\,; y) = (10\,; 0)$; при $t = -9$: $(x\,; y) = (7\,; 2)$; при $t = -8$: $(x\,; y) = (4\,; 4)$; при $t = -7$: $(x\,; y) = (1; 6)$.

7.5. Решение. Пусть x – количество книг в библиотеке.

Так как $НОД(5\,, 6\,, 7) = 1$, $НОК(5\,, 6\,, 7) = 210$, то получаем равенство $x = 210k + 1$, одновременно удовлетворяющее условиям связывания в пачки по 5, по 6 или по 7 книг. Кроме того, $x = 11m$.

Получаем диофантово уравнение $11m = 210k + 1$, или $11m - 210k = 1$. Подобрав частное $(m_0\,; k_0) = (-19\,; -1)$, найдем общее решение уравнения: $\begin{cases} m = -19 + 210t\,, \\ k = -1 + 11t\,, \end{cases}$ где $t \in \boldsymbol{Z}$. Очевидно, что $m > 0$ и $k > 0$. Отсюда получаем систему неравенств: $\begin{cases} -19 + 210t > 0\,, \\ -1 + 11t > 0. \end{cases}$ Таким образом, $t \in \boldsymbol{N}$.

- При $t = 1$: $m = 191$, $x = 11 \cdot 191 = 2101 < 5000$.
- При $t = 2$: $m = 401$, $x = 11 \cdot 401 = 4411 < 5000$.

Значения t, когда $t \geq 3$, не подходят, т.к. в этих случаях $x > 5000$.

7.7. 1) Решение. Умножим первое уравнение системы на (-4), а второе уравнение на 3 и сложим оба уравнения. Получим диофантово уравнение $3y - 26z = 8$, которое разрешимо в целых числах. Частное решение уравнения: $(y_0\,; z_0) = (72\,; 8)$. Общее решение уравнения: $\begin{cases} y = 72 + 26t, \\ z = 8 + 3t, \end{cases}$ где $t \in \mathbf{Z}$. Если из второго уравнения системы вычесть первое, то получим:

$$x + 2y - 7z = 3,\ x + 144 + 52t - 56 - 21t = 3,\ x = -85 - 31t.$$

7.7. 2) Решение. Умножим первое уравнение системы на (-4), а второе уравнение на 3 и сложим оба уравнения. Получим диофантово уравнение $7y - 2z = 8$, которое разрешимо в целых числах. Частное решение уравнения: $(y_0\,; z_0) = (2\,; 3)$. Общее решение уравнения: $\begin{cases} y = 2 + 2t, \\ z = 3 + 7t, \end{cases}$ где $t \in \mathbf{Z}$. Если из второго уравнения системы вычесть первое, то получим: $x + 3y - z = 3$, $x + 6 + 6t - 3 - 7t = 3$, $x = t$.

7.7. 3) Решение. Умножим первое уравнение системы на 2 и сложим оба уравнения. Получим диофантово уравнение $9x + 18z = 25$, которое не имеет целочисленных решений.

7.8. Решение. Пусть в системе сравнений $\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{b_1}, \\ x \equiv a_2 \pmod{b_2}; \end{cases}$ числа b_1 и b_2 взаимно просты; докажем, что система имеет решения.

Действительно, $\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{b_1}, \\ x \equiv a_2 \pmod{b_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b_1 \cdot n + a_1, \\ x = b_2 \cdot k + a_2. \end{cases}$

Отсюда $b_1 \cdot n + a_1 = b_2 \cdot k + a_2$, или $b_1 \cdot n - b_2 \cdot k = a_2 - a_1$. Так как $НОД(b_1, b_2) = 1$, диофантово уравнение $b_1 \cdot n - b_2 \cdot k = a_2 - a_1$

разрешимо в целых числах. Таким образом, существуют целые числа n_0 и k_0, что $\begin{cases} n = n_0 + b_2 t, \\ k = k_0 + b_1 t, \end{cases}$ где $t \in \mathbf{Z}$.

Тогда $\begin{cases} x = b_1 n_0 + b_1 b_2 t + a_1, \\ x = b_2 k_0 + b_1 b_2 t + a_2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv b_1 n_0 + a_1 \ (\operatorname{mod} b_1 b_2), \\ x \equiv b_2 k_0 + a_2 \ (\operatorname{mod} b_1 b_2). \end{cases}$

Так как числа n_0 и k_0 – решения уравнения $b_1 \cdot n - b_2 \cdot k = a_2 - a_1$, то $b_1 \cdot n_0 + a_1 = b_2 \cdot k_0 + a_2$. Итак, система сравнений разрешима.

Обратное утверждение неверно. Действительно, рассмотрим систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv -1 \ (\operatorname{mod} 20), \\ x \equiv 5 \ (\operatorname{mod} 6). \end{cases}$ Данная система, как легко видеть, имеет решение: $x \equiv 59 \ (\operatorname{mod} 60)$. Однако числа 20 и 6 не взаимно просты.

7.9. Решение. Индукция по n.

При $n = 2$ утверждение теоремы доказано в предыдущей задаче.

Допустим, что $n > 2$, для $n - 1$ утверждение верно и $x \equiv r \ (\operatorname{mod} b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1})$.

Если b_n взаимно просто с каждым из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, то (см. § 1, лемма 4) b_n взаимно просто с произведением $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$.

Поэтому система сравнений $\begin{cases} x \equiv r \ (\operatorname{mod} b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}), \\ x \equiv a_n \ (\operatorname{mod} b_n); \end{cases}$ разрешима в целых числах. Теорема доказана.

7.10. 1) Решение. Так как числа 7 и 9 взаимно просты, система разрешима в целых числах. Имеем: $\begin{cases} x \equiv 2 \ (\operatorname{mod} 7), \\ x \equiv 5 \ (\operatorname{mod} 9); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7n + 2, \\ x = 9k + 5. \end{cases}$

Получаем диофантово уравнение: $7n + 2 = 9k + 5 \Leftrightarrow 7n - 9k = 3$.

Частное решение уравнения: $(n_0\,;k_0)=(3;2)$. Общее решение уравнения: $\begin{cases} n=3+9t, \\ k=2+7t, \end{cases}$ где $t\in\mathbf{Z}$. Отсюда $x=23+63t$, или $x\equiv 23\ (\mathrm{mod}\ 63)$.

7.10. 2) Решение. Так как числа 10 и 13 взаимно просты, система разрешима в целых числах. Имеем: $\begin{cases} x\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 10), \\ x\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 13); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10n+3, \\ x=13k+2. \end{cases}$

Получаем диофантово уравнение:

$$10n+3=13k+2 \qquad \Leftrightarrow \quad 13k-10n=1.$$

Частное решение уравнения: $(k_0\,;n_0)=(-3;-4)$. Общее решение уравнения: $\begin{cases} k=-3+10t, \\ n=-4+13t, \end{cases}$ где $t\in\mathbf{Z}$. Отсюда $x=-37+130t$, или $x\equiv 93\ (\mathrm{mod}\ 130)$.

7.11. Решение. *1 способ.* Предположим, что подобный многочлен

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$

существует и $a_n\,, a_{n-1}\,, \ldots\,, a_1\,, a_0\in\mathbf{Z}$ его коэффициенты. Из условия $f(1)=1$, $f(5)=2$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0 = 1, \\ 5^n\cdot a_n + 5^{n-1}\cdot a_{n-1}+\ldots+5\cdot a_1+a_0 = 2. \end{cases}$$

Вычтя из второго уравнения системы первое, получим диофантово уравнение $(5^n-1)\cdot a_n+(5^{n-1}-1)\cdot a_{n-1}+\ldots+(5-1)\cdot a_1=1$, которое должно быть разрешимо в целых числах.

Числа вида 5^k $(k=1,2,\ldots,n)$ нечетны, а числа вида 5^k-1 $(k=1,2,\ldots,n)$ четны. Поэтому коэффициенты диофантова уравнения имеют наибольший общий делитель d такой, что $d\neq 1$. Так как правая часть уравнения не делится на d, уравнение не имеет целочисленных решений. Получили противоречие, которое показывает, что допущенное предположение неверно и подобного многочлена $f(x)$ с целочисленными коэффициентами не существует.

2 способ. Для многочлена $f(x)$ с целочисленными коэффициентами должно выполняться условие $f(a+b) \equiv f(a) \pmod b$. В данном случае условие не выполнено при $a=1$, $b=4$.

7.12. 1) Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 5x = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2}{5}\pi k, \end{cases} \text{ где } n, k \in \mathbf{Z}.$$

Получаем диофантово уравнение:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi k \Leftrightarrow k - 4n = 1.$$

Частное решение уравнения: $(k_0; n_0) = (1; 0)$. Общее решение уравнения: $\begin{cases} k = 1 + 4t, \\ n = t, \end{cases}$ где $t \in \mathbf{Z}$. Отсюда $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi t$, где $t \in \mathbf{Z}$.

7.12. 2) Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin 7x = -1, \\ \cos 2x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2}{7}\pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases} \text{ где } n, k \in \mathbf{Z}.$$

Получаем диофантово уравнение:

$$-\frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}\pi n = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow 2n - 7k = 4.$$

Частное решение уравнения: $(n_0; k_0) = (2; 0)$. Общее решение уравнения: $\begin{cases} n = 2 + 7t, \\ k = 2t, \end{cases}$ где $t \in \mathbf{Z}$. Отсюда $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi t$, где $t \in \mathbf{Z}$.

7.12. 3) Решение. $\cos 6x \cdot \sin\frac{5}{6}x = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin\frac{41x}{6} - \sin\frac{31x}{6} = 2$. Последнее уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin\frac{41x}{6} = 1, \\ \sin\frac{31x}{6} = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{41} + \frac{12}{41}\pi n, \\ x = -\frac{3\pi}{31} + \frac{12}{31}\pi k, \end{cases} \text{ где } n, k \in \mathbf{Z}.$$

Получаем диофантово уравнение:

$$\frac{3\pi}{41} + \frac{12}{41}\pi n = -\frac{3\pi}{31} + \frac{12}{31}\pi k \;\Leftrightarrow\; 41k - 31n = 18.$$

Частное решение уравнения: $(k_0; n_0) = (-54; -72)$. Общее решение уравнения: $\begin{cases} k = -54 + 31t, \\ k = -72 + 41t, \end{cases}$ где $t \in \mathbf{Z}$. Отсюда

$x = -21\pi + 12\pi t$, где $t \in \mathbf{Z}$, или $x = 3\pi + 12\pi l$, где $l \in \mathbf{Z}$.

7.13. Решение. *1 способ.* Найдем $h = НОК(2, 3, 4, 5, 6)$; $h = 60$. Пусть x – искомое число, тогда $x = 60k + 1$, $x = 7n$. Получаем диофантово уравнение $7n - 60k = 1$.

Так как $НОД(7, 60) = 1$, уравнение разрешимо. Подбором находим частное решение $(n_0; k_0) = (43; 5)$. Тогда общее решение примет вид: $\begin{cases} n = 43 + 60t, \\ k = 5 + 7t, \end{cases}$ где $t \in \mathbf{Z}$. Число x – натуральное, поэтому $n > 0$. Отсюда $40 + 60t > 0$, следовательно, $t > -\frac{43}{60}$. Таким образом, $t \geq 0$, $t \in \mathbf{Z}$. Причем, чем меньше t, тем меньше n, а значит, тем меньше x.

При $t = 0$: $n = 43$, $x = 301$.

2 способ. Найдя $НОК(2, 3, 4, 5, 6) = 60$, получаем систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{7}, \\ x \equiv 1 \pmod{60}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60x \equiv 0 \pmod{420}, \\ 7x \equiv 7 \pmod{420}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x \equiv -56 \pmod{420}, \\ 7x \equiv 7 \pmod{420}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \equiv -56 \pmod{420}, \\ 3x \equiv 63 \pmod{420}. \end{cases}$$

Отсюда $x \equiv -119 \pmod{420}$, или $x \equiv 301 \pmod{420}$. Итак, $x = 301 + 420t$. Так как нам требуется наименьшее натуральное x, то $x = 301$.

7.14. Решение. *1 способ.* Пусть x – искомое число, тогда $x = 6k + 5$. Очевидно, что $x = 6k + 5$ дает при делении на 2 остаток 1, при делении на 3 – остаток 2. Далее, по условию $x = 5n + 4$. Получаем диофантово уравнение: $6k + 5 = 5n + 4 \Leftrightarrow 5n - 6k = 1$.

Так как $НОД(5, 6) = 1$, уравнение разрешимо. Подбором находим частное решение $(n_0; k_0) = (-1; -1)$. Тогда общее решение примет вид: $\begin{cases} n = -1 + 6t, \\ k = -1 + 5t, \end{cases}$ где $t \in \mathbf{Z}$. Отсюда $x = -1 + 30t$, $t \in \mathbf{Z}$.

Далее, по условию $x = 4m + 3$. Вновь получаем диофантово уравнение: $4m + 3 = 30t - 1 \Leftrightarrow 15t - 2m = 2$.

Так как $НОД(15, 2) = 1$, уравнение разрешимо. Подбором находим частное решение $(t_0; m_0) = (0; -1)$. Тогда общее решение примет вид: $\begin{cases} t = 2l, \\ k = -1 + 15l, \end{cases}$ где $l \in \mathbf{Z}$. Отсюда $x = -1 + 60l$, $l \in \mathbf{Z}$. Так как x – наименьшее натуральное число, то $x = 59$.

2 способ. Из условия задачи получаем систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2, \\ x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 3 \pmod 4, \\ x \equiv 4 \pmod 5, \\ x \equiv 5 \pmod 6. \end{cases}$$

Из первых двух сравнений следует, что $x \equiv 5 \pmod 6$. Таким образом, необходимо решить систему: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4, \\ x \equiv 4 \pmod 5, \\ x \equiv 5 \pmod 6. \end{cases}$

Найдем вначале x, удовлетворяющее условиям: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4, \\ x \equiv 4 \pmod 5. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} 5x \equiv 15 \pmod{20}, \\ 4x \equiv 16 \pmod{20}. \end{cases}$ Отсюда, вычтя из первого сравнения второе, получим $x \equiv -1 \pmod{20}$. Итак, осталось решить систему:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 6, \\ x \equiv -1 \pmod{20}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x \equiv 50 \pmod{60}, \\ 3x \equiv -3 \pmod{60}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x \equiv 53 \pmod{60}, \\ 3x \equiv -3 \pmod{60}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \equiv 56 \pmod{60}, \\ 3x \equiv -3 \pmod{60}. \end{cases}$$

Отсюда, в очередной раз вычтя из первого сравнения второе, получим $x \equiv 59 \pmod{60}$. Итак, $x = 59 + 60l$, $l \in \mathbf{Z}$. Так как x – наименьшее натуральное число, то $x = 59$.

7.15. Решение. Наименьшее положительное решение этого уравнения: $(x_1 ; y_1) = (3; 2)$. Согласно теореме 15 решения $(x_2 ; y_2)$, $(x_3 ; y_3)$ ищутся из условия $x_n + y_n\sqrt{2} = \left(x_1 + y_1\sqrt{2}\right)^n$. Итак: $x_2 + y_2\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 = 17 + 12\sqrt{2}$, т.е. $(x_2 ; y_2) = (17; 12)$;

$x_3 + y_3\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^3 = 27 + 54\sqrt{2} + 72 + 16\sqrt{2} = 99 + 70\sqrt{2}$, т.е. $(x_3 ; y_3) = (99; 70)$.

7.16. Решение. Из теоремы 15 следует, что любое положительное решение уравнения $x^2 - Ay^2 = 1$ можно найти по формуле $x_n + y_n\sqrt{A} = \left(x_1 + y_1\sqrt{A}\right)^n$, где $(x_1\,;\,y_1)$ – наименьшее положительное решение данного уравнения. Тогда $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{A} = (x_n + y_n\sqrt{A})\cdot(x_1 + y_1\sqrt{A})$. Отсюда, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим рекуррентные соотношения: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n x_1 + Ay_n y_1\,, \\ y_{n+1} = x_n y_1 + y_n x_1\,. \end{cases}$

7.17. Решение. В уравнении $x^2 - 2y^2 = 1$ $(x_1\,;\,y_1) = (3\,;\,2)$, поэтому рекуррентные формулы примут вид $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n\,, \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n\,. \end{cases}$

При $n = 1$ $\begin{cases} x_2 = 3x_1 + 4y_1\,, \\ y_2 = 2x_1 + 3y_1\,; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 17\,, \\ y_2 = 12\,. \end{cases}$

При $n = 2$ $\begin{cases} x_3 = 3x_2 + 4y_2\,, \\ y_3 = 2x_2 + 3y_2\,; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 99\,, \\ y_3 = 70\,. \end{cases}$

7.18. 1) Решение. В уравнении $x^2 - 3y^2 = 1$ $(x_1\,;\,y_1) = (2\,;\,1)$, поэтому рекуррентные формулы примут вид $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n\,, \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n\,. \end{cases}$

7.18. 2) Решение. В уравнении $x^2 - 8y^2 = 1$ $(x_1\,;\,y_1) = (3\,;\,1)$, поэтому рекуррентные формулы примут вид $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 8y_n\,, \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n\,. \end{cases}$

7.19. Решение. Операция $*$ является *алгебраической*, т.е. «произведение» двух решений $(x\,;\,y)$ и $(x'\,;\,y')$ вновь является решением уравнения $x^2 - Ay^2 = 1$ (Проделайте выкладки самостоятельно!). Кроме того, очевидно, что операция $*$ *коммутативна*.

Проверим *ассоциативность* операции $*$.

$$(x\,;\,y)*((x'\,;\,y')*(x''\,;\,y''))=(x\,;\,y)*(x'x''+Ay'y''\,;\,x'y''+y'x'')=$$
$$=(x\cdot(x'x''+Ay'y'')+Ay\cdot(x'y''+y'x'')\,;\,x\cdot(x'y''+y'x'')+y\cdot(x'x''+Ay'y''))=$$
$$=(xx'x''+Axy'y''+Ayx'y''+Ayy'x''\,;\,xx'y''+xy'x''+yx'x''+Ayy'y'').$$

$$((x\,;\,y)*(x'\,;\,y'))*(x''\,;\,y'')=(xx'+Ayy'\,;\,xy'+yx')*(x''\,;\,y'')=$$
$$=((xx'+Ayy')\cdot x''+A\cdot(xy'+yx')\cdot y''\,;\,(xx'+Ayy')\cdot y''+(xy'+yx')\cdot x'')=$$
$$=(xx'x''+Axy'y''+Ayx'y''+Ayy'x''\,;\,xx'y''+xy'x''+yx'x''+Ayy'y'').$$

Ассоциативность выполнена.

Существование *единичного элемента* $(e_1\,;\,e_2)$.

С одной стороны должно выполняться $(x\,;\,y)*(e_1\,;\,e_2)=(x\,;\,y)$, но $(x\,;\,y)*(e_1\,;\,e_2)=(xe_1+Aye_2\,;\,xe_2+ye_1)$.

Получаем систему $\begin{cases} x=xe_1+Aye_2\,, \\ y=xe_2+ye_1\,. \end{cases}$ Данная система равносильна $\begin{cases} x\cdot(1-e_1)=Aye_2\,, \\ y\cdot(1-e_1)=xe_2\,. \end{cases}$ Так как эти равенства должны выполняться для любых x и y, то $e_1=1$, $e_2=0$. Итак, $(e_1\,;\,e_2)=(1\,;\,0)$.

Обратный элемент для каждой пары $(x\,;\,y)$ (назовем его $(x^*\,;\,y^*)$) будем искать из условия $(x\,;\,y)*(x^*\,;\,y^*)=(e_1\,;\,e_2)$.

Тогда $(xx^*+Ayy^*\,;\,xy^*+yx^*)=(1\,;\,0)$. Получаем систему $\begin{cases} xx^*+Ayy^*=1, \\ yx^*+xy^*=0. \end{cases}$ Умножим первое уравнение системы на y, второе уравнение – на x, затем вычтем из второго уравнения первое. Имеем $(x^2-Ay^2)\cdot y^*=-y$, откуда $y^*=-y$. Тогда $x^*=x$. Итак, для каждого элемента $(x\,;\,y)$ существует обратный: $(x^*\,;\,y^*)=(x\,;-y)$.

Таким образом, решения уравнения Пелля $x^2-Ay^2=1$ при $x\geq 0$ образуют группу относительно операции $*$:

$$(x\,;\,y)*(x'\,;\,y')=(xx'+Ayy'\,;\,xy'+yx').$$

Покажем, что данная группа изоморфна группе целых чисел по сложению $(\boldsymbol{Z}\,;+)$. Действительно, изоморфизм устанавливается непосредственно:

$$(1;0)\leftrightarrow 0,$$
$$\left[\begin{array}{l}(x_1\,;\,y_1)\leftrightarrow 1,\\(x_1\,;-y_1)\leftrightarrow -1,\end{array}\right.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left[\begin{array}{l}(x_n\,;\,y_n)\leftrightarrow n,\\(x_n\,;-y_n)\leftrightarrow -n,\end{array}\right.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Здесь $(x_1\,;\,y_1)$ – наименьшее положительное решение уравнения $x^2-Ay^2=1$, $(x_2\,;\,y_2)$ – второе по величине положительное решение уравнения, $(x_3\,;\,y_3)$ – третье и т.д.

9.1. 1) Решение. $\varphi(1764)=\varphi(2^2\cdot 3^2\cdot 7^2)=$

$$=2^1\cdot(2-1)\cdot 3^1\cdot(3-1)\cdot 7^1\cdot(7-1)=504.$$

9.1. 2) Решение. $\varphi(2000)=\varphi(2^4\cdot 5^3)=2^3\cdot(2-1)\cdot 5^2\cdot(5-1)=800$.

9.1. 3) Решение. $\varphi(261360)=\varphi(2^4\cdot 3^3\cdot 5^1\cdot 11^2)=$

$$=2^3\cdot(2-1)\cdot 3^2\cdot(3-1)\cdot 5^0\cdot(5-1)\cdot 11^1\cdot(11-1)=63360.$$

9.4. 1) Решение. Так как $605=5\cdot 121$, то произвольное натуральное число, не превосходящее числа 605 и имеющее с этим числом наибольший общий делитель, равный 5, имеет вид $5n$, где n – натуральное число, не превосходящее числа 121 и взаимно простое с этим числом.

9.4. 2) Решение. Указанные числа можно представить в виде $24x$ ($x\in\boldsymbol{N}$), при этом $24x\le 1680$. Имеем: $\textit{НОД}(1680\,,24x)=24$. Так как $1680=24\cdot 70$, то должно выполняться: $\textit{НОД}(70\,,x)=1$.

При этом $x \le 70$. Количество таких чисел x, а значит, и искомых чисел, равно $\varphi(70) = \varphi(2\cdot 5\cdot 7) = 1\cdot 4\cdot 6 = 24$.

9.5. Решение. Если a – натуральное число, не превосходящее числа m и взаимно простое с m, то $m - a$ также является натуральным числом, не превосходящим числа m и взаимно простым с m. Так как из $a_1 \ne a_2$ следует, что $m - a_1 \ne m - a_2$, это означает, что если a принимает без повторений все значения из приведенной системы вычетов по модулю m, выбранной из полной системы вычетов $1, 2, \ldots, m$ по этому модулю, то и $m - a$ будет принимать без повторений все значения из той же приведенной системы вычетов. Поэтому, сложив $\varphi(m)$ слагаемых вида $a + (m - a)$ (где a пробегает упомянутую приведенную систему вычетов), мы получим удвоенную сумму всех чисел, не превосходящих числа m и взаимно простых с m. Так как каждое из этих слагаемых равно m, требуемый результат теперь очевиден.

9.6. Решение. Имеем $n > 1$. Пусть n задано в каноническом виде:

$$n = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}.$$

Тогда

$$p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s} =$$
$$= 2\cdot p_1^{k_1-1}\cdot p_2^{k_2-1}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s-1}\cdot(p_1-1)\cdot(p_2-1)\cdot\ldots\cdot(p_s-1)$$

и, следовательно,

$$p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_s = 2\cdot(p_1-1)\cdot(p_2-1)\cdot\ldots\cdot(p_s-1).$$

Так как произведение $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_s$ четно, то одно из чисел (например, p_1) должно равняться 2.

При $s > 1$ получаем

$$p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_s = (p_2-1)\cdot(p_3-1)\cdot\ldots\cdot(p_s-1),$$

что невозможно, т.к. правая часть меньше левой. Следовательно, $s = 1$.

Тогда $n = 2^k$ ($k \in \boldsymbol{N}$).

9.7. Решение. Рассмотрим вначале случай, когда числа a и p не являются взаимно простыми (то есть a делится на p). Тогда $a \equiv 0 \pmod{p}$, а, следовательно, $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Пусть $НОД(a, p) = 1$, тогда числа

$$1 \cdot a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$$

имеют разные остатки при делении на p.

Действительно, если допустить $i \cdot a \equiv j \cdot a \pmod{p}$, где $i, j = 1, 2, \ldots, p-1$, то, в силу $НОД(a, p) = 1$, $i \equiv j \pmod{p}$, т.е. $i = j$.

Отметим, что отличных от нуля остатков от деления на p ровно $p-1$ штук, поэтому числа $1 \cdot a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$ образуют полную систему вычетов по модулю p.

Перемножим отдельно числа $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$ и $1 \cdot a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$. Тогда

$$(p-1)! \cdot a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p-1)! \cdot a^{p-1} - (p-1)! \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p-1)! \cdot (a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Так как $(p-1)! \not\equiv 0 \pmod{p}$, следовательно,

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Отсюда $a^p \equiv a \pmod{p}$ ■

9.8. 1) Решение. Так как 101 простое число (Проверьте!), то, согласно малой теореме Ферма, $100^{100} \equiv 1 \pmod{101}$.

9.8. 2) Решение. По малой теореме Ферма $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, откуда возведением в квадрат получаем $2^{24} \equiv 1 \pmod{13}$. Следовательно, $2^{30} = 2^{24} \cdot 2^6 \equiv 2^6 = 64 \equiv -1 \equiv 12 \pmod{13}$.

9.8. 4) Решение. Пусть r – остаток от деления числа 21^{83} на 24. Тогда должно выполняться сравнение $r \equiv 21^{83} \pmod{24}$, правая часть которого и модуль делятся на 3. Поэтому и число r должно делиться на 3, $r = 3r_1$. После сокращения обеих частей и модуля предыдущего сравнения на 3, получаем $r_1 \equiv 7 \cdot 21^{82} \pmod 8$. Так как числа 21 и 8 взаимно просты и $\varphi(8) = 4$, по теореме Эйлера $21^4 \equiv 1 \pmod 8$, откуда получаем $7 \cdot 21^{82} \equiv (-1) \cdot 21^2 \equiv (-1) \cdot 5^2 \equiv 7 \pmod 8$.

9.8. 5) Решение. Имеем: $НОД(120, 385) = 5$. Пусть x – остаток от деления 120^{422} на 385. Сравнение $120^{422} \equiv x \pmod{385}$ показывает, что $x = 5y$ при некотором $y \in \boldsymbol{Z}$. Условие $120^{422} \equiv 5y \pmod{385}$, согласно свойству сравнений, означает $24 \cdot 120^{421} \equiv y \pmod{77}$.

Числа 120 и 77 взаимно просты,

$$\varphi(77) = \varphi(7 \cdot 11) = \varphi(7) \cdot \varphi(11) = 6 \cdot 10 = 60.$$

Поэтому, согласно теореме Эйлера, $120^{60} \equiv 1 \pmod{77}$.

Так как $421 = 60 \cdot 7 + 1$, то $120^{421} \equiv 120 \equiv 43 \pmod{77}$ и, следовательно, $24 \cdot 120^{421} \equiv 24 \cdot 43 \equiv 31 \pmod{77}$.

Поэтому $120^{422} \equiv 155 \pmod{385}$.

9.8. 8) Указание. Найдите остаток от деления на 132 отдельно каждого слагаемого.

9.9. Решение. $n^7 - n = n \cdot (n^3 - 1) \cdot (n^3 + 1) =$

$$= (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n^2 + n + 1) \cdot (n^2 - n + 1).$$

Число $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ делится на 2 и на 3. Так как 2 и 3 взаимно просты, число $n^7 - n$ делится на 6.

Покажем, что $n^7 - n$ делится на 7. Действительно, согласно малой теореме Ферма, $n^7 \equiv n \pmod 7$. Отсюда $n^7 - n \equiv 0 \pmod 7$, т.е. $n^7 - n$ делится на 7. Так как 6 и 7 взаимно просты, число $n^7 - n$ делится на 42.

9.10. Указание. Возведите в куб обе части сравнения $a^4 \equiv 1 \pmod 5$.
9.11. Указание. Воспользуйтесь равенством

$a^p - b = (a^p - a) + (a - b)$ и примените малую теорему Ферма.

9.12. 1) Указание. Если число a не делится на 7, то из малой теоремы Ферма следуют сравнения $a^{6m} \equiv 1 \pmod 7$ и $a^{6n} \equiv 1 \pmod 7$. Сложив эти сравнения почленно, получаем $a^{6m} + a^{6n} \equiv 2 \pmod 7$, что противоречит условию.
9.13. Указание. С помощью малой теоремы Ферма докажите делимость данного числа на 5 и на 13.
9.14. 1) Указание. Так как числа a и b взаимно просты, то оба они на 11 делиться не могут. Если одно из них делится на 11, а другое не делится, то утверждение очевидно. Если оба числа a и b не делятся на 11, из малой теоремы Ферма следует, что число $4a^{10} - b^{10}$ на 11 не делится. Остается заметить, что $4a^{10} - b^{10} = (2a^5 + b^5)(2a^5 - b^5)$.

9.15. 1) Решение. Число $2^n - 9$ делится на 7 тогда и только тогда, когда имеет место сравнение $2^n \equiv 9 \pmod 7$, которое равносильно сравнению $2^n \equiv 2 \pmod 7$. По малой теореме Ферма имеем сравнение $2^6 \equiv 1 \pmod 7$. Поэтому, если число n представить в виде $n = 6q + r$, где $0 \le r < 6$, то выполняется сравнение $2^n = (2^6)^q \cdot 2^r \equiv 2^r \pmod 7$, откуда следует, что сравнение $2^n \equiv 2 \pmod 7$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо сравнение $2^r \equiv 2 \pmod 7$. Непосредственная проверка показывает, что среди чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $0 \le r < 6$, последнему сравнению удовлетворяют лишь 1 и 4. Таким образом, исходное сравнение имеет место тогда и только тогда, когда число n имеет вид $n = 6q + 1$ или $n = 6q + 4$. Так как в первом случае $n = 3 \cdot (2q) + 1$, а во втором $n = 3 \cdot (2q + 1) + 1$, окончательно имеем $n = 3k + 1$.

9.16. Решение. По условию $q-1=(p-1)k$ для некоторого натурального числа k. Пусть целое число a взаимно просто с произведением pq. Тогда оно взаимно просто с каждым из чисел p и q, и потому, в силу малой теоремы Ферма, выполнены сравнения $a^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$ и $a^{q-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,q)$. После возведения обеих частей первого из них в k-ю степень, получаем $a^{q-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$. Таким образом, число $a^{q-1}-1$ делится на два взаимно простых числа p и q, а потому делится и на произведение этих чисел. Это и означает, что $a^{q-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,pq)$.

9.17. Решение. По малой теореме Ферма справедливы сравнения $a^{p}\equiv a\,(\mathrm{mod}\,p)$, $a^{q}\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)$. Умножив обе части и модуль каждого из них на числа q и p соответственно, получим сравнения $qa^{p}\equiv qa\,(\mathrm{mod}\,pq)$ и $pa^{q}\equiv pa\,(\mathrm{mod}\,pq)$. Сложив последние два сравнения почленно, придем к требуемому.

9.18. Решение. Действительно, согласно малой теореме Ферма, имеем: $p^{q-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,q)$, $q^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$, то есть имеет место делимость $(p^{q-1}-1)\,\vdots\,q$, $(q^{p-1}-1)\,\vdots\,p$. Поэтому $(p^{q-1}-1)(q^{p-1}-1)\,\vdots\,pq$, т.е. $p^{q-1}q^{p-1}-(p^{q-1}+q^{p-1})+1$ делится на pq, а значит, $(p^{q-1}+q^{p-1})-1$ делится на pq.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Айерлэнд К., Роузен. М.*** Классическое введение в современную теорию чисел. – М.: Мир, 1987.
2. ***Бардушкин В.В., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А.*** Делимость чисел и решение уравнений в целых числах (теория и задачи с решениями). – М.: МГИЭТ(ТУ), 1999.
3. ***Бенуа Д.Г., Михайлов А.Б.*** Делимость целых чисел. – СПб.: ГДТЮ (лаборатория непрерывного математического образования), 1998.
4. ***Болтянский В.Г., Левитас Г.Г.*** Делимость чисел и простые числа //В кн. «Дополнительные главы по курсу математики 7 – 8»//. – М.: Просвещение, 2-е издание, 1974, с. 5 – 69.
5. ***Боревич З.И., Шафаревич И.Р.*** Теория чисел. – М.: Наука, 1972.
6. ***Бухштаб А.А.*** Теория чисел. – М.: Учпедгиз, 1960.
7. ***Виноградов И.М.*** Основы теории чисел. – М.: Наука, 1972.
8. ***Воробьев Н.Н.*** Признаки делимости (популярные лекции по математике). – М.: Наука, 1980.
9. ***Галкин Е.*** Задачи с целыми числами. – М.: «Математика», 1999 – 2000.
10. ***Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б.*** Введение в теорию чисел. – М.: изд-во МГУ, 2-е издание, 1995.
11. ***Гельфанд А.О.*** Решение уравнений в целых числах (популярные лекции по математике). – М.: Наука. 1983.
12. ***Дэвенпорт Г.*** Высшая арифметика. – М.: Наука, 1965.
13. ***Курант Р., Роббинс Г.*** Что такое математика? – М.: Просвещение, 2-е издание, 1967.
14. ***Ляпин Е.С., Евсеев А.Е.*** Алгебра и теория чисел. – М.: Просвещение, часть 1, 1974.
15. ***Малинин В.*** Решение уравнений в натуральных и целых числах. – М.: «Математика», 2001, №№ 21 – 22.
16. ***Молдаванский Д.И.*** Целые числа. Основы теории делимости. – Иваново: изд-во Ивановского областного института повышения квалификации и переподготовки педагогических кадров, 2001.
17. ***Оре О.*** Приглашение в теорию чисел (библиотечка «Квант»). – М.: Наука, 1980.
18. ***Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И.*** Алгебра и анализ элементарных функций. – М.: Наука, 1980.
19. ***Соловьев Ю.П.*** Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма. – Соросовский образовательный журнал, 1998, № 2, с. 135 – 138.
20. ***Федотов М.В., Хайлов Е.Н.*** Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. Задачи устного экзамена по математике. – М.: ВМиК МГУ, 2002.
21. ***Хассе Г.*** Лекции по теории чисел. – М.: И.Л., 1953.
22. ***Шмидт Р.А.*** Задачи по алгебре. – СПб.: 1991.

Бардушкин *Владимир Валентинович*
Кожухов *Игорь Борисович*
Прокофьев *Александр Александрович*
Фадеичева *Татьяна Петровна*

Основы теории делимости чисел

Решение уравнений в целых числах

Факультативный курс

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор и верстка авторов

ЛР № от
Подписано в печать с оригинал-макета
Формат
Усл. печ. л.
Уч. – изд. л.
Тираж экз.
Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии МГИЭТ(ТУ).
103498, Москва, МГИЭТ(ТУ).