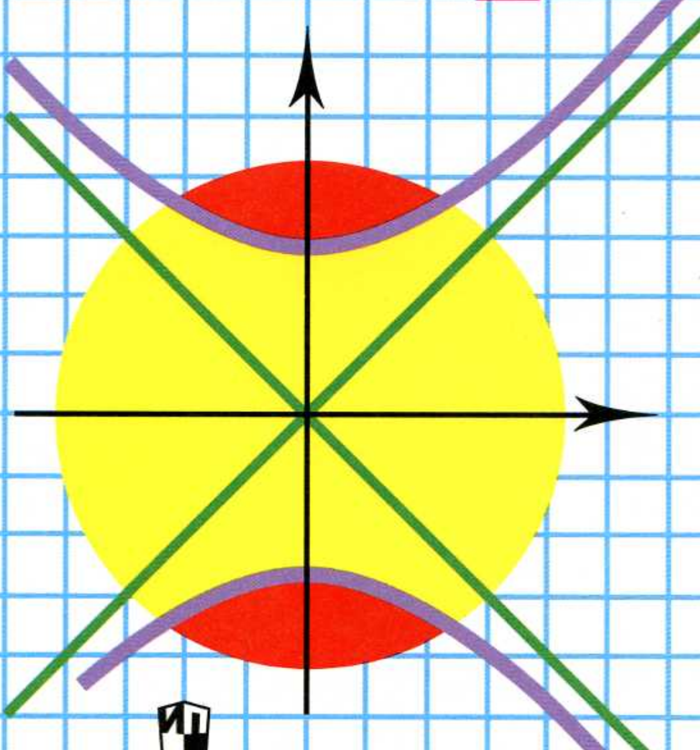
Ю. Н. Макарычев Н. Г. Миндюк

АЛГЕБРА

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

9



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Ю. Н. Макарычев Н. Г. Миндюк

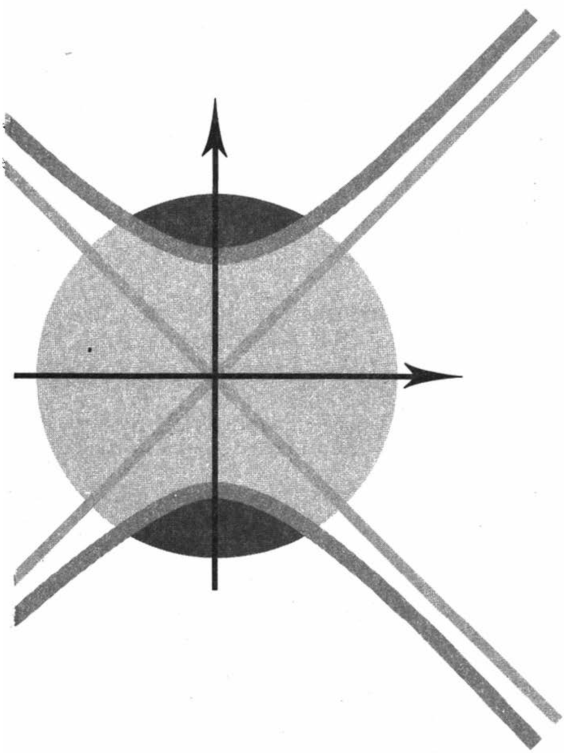
АЛГЕБРА

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

9 КЛАСС

С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

8-е издание



Москва
«Просвещение»
2012

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
М15

Рецензент:
учитель математики лицея «Москвич» *Т. Я. Додзина*

Макарычев Ю. Н.
М15 Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс: с углубл. изучением математики / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. — 8-е изд. — М. : Просвещение, 2012. — 143 с. : ил. — ISBN 978-5-09-026647-5.

Пособие содержит самостоятельные (в двух вариантах) и контрольные работы (в четырех вариантах), а также примерное планирование учебного материала.

Оно ориентировано в основном на учебный комплект, состоящий из учебника «Алгебра, 9» любого авторского коллектива и учебного пособия «Алгебра. Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса» авторов Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк.

Дидактические материалы могут быть использованы в девятых классах, работающих по учебникам, предназначенным для классов с углубленным изучением математики.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-026647-5

Предисловие

Дидактические материалы предназначены для организации самостоятельной работы учащихся девятых классов с углубленным изучением математики. Они могут быть использованы в том случае, когда обучение ведется по учебному комплекту, состоящему из учебника для общеобразовательных учреждений «Алгебра, 9» авторов Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой, под редакцией С. А. Теляковского и учебного пособия «Алгебра. Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса» авторов Ю. Н. Макарычева и Н. Г. Миндюк, под редакцией Г. В. Дорофеева.

Включенные в данную книгу работы делятся на самостоятельные (в двух вариантах) и контрольные (в четырех вариантах). Самостоятельные работы отмечены индексами С—1, С—2 и т. д., а контрольные работы — индексами К—1, К—2 и т. д. Для каждой работы указаны номера соответствующих параграфов или пунктов из учебника для общеобразовательных учреждений или из «Дополнительных глав». При этом номера пунктов или параграфов из «Дополнительных глав» отмечены буквой Д. Например, запись К—6 (§ 7; п. 31Д) означает, что контрольную работу № 6 рекомендуется предложить учащимся после того, как изучены § 7 из учебника для общеобразовательных учреждений и п. 31 из «Дополнительных глав».

Самостоятельные работы по своему содержанию достаточно объемны и по усмотрению учителя могут быть использованы как на одном, так и на нескольких уроках. Контрольные работы рассчитаны на один урок, за исключением последней работы К—13, которая рассчитана на два урока.

Самостоятельные работы завершаются заданиями повышенной трудности.

В книгу включено «Примерное планирование учебного материала», составленное для случая, когда на изучение алгебры отводится 5 ч в неделю. При этом некоторые темы из «Дополнительных глав», а значит, и соответствующие им самостоятельные работы опускаются. В случае, когда на изучение алгебры отводится больше недельных часов или когда подготовка класса позволяет интенсифицировать учебный процесс, самостоятельные работы могут быть использованы в полном объеме.

Предлагаемые дидактические материалы могут найти применение при преподавании алгебры в девятых классах с углубленным изучением математики по различным учебным пособиям. Многие из включенных в данную книгу работ могут быть использованы при преподавании алгебры в девятых классах общеобразовательных учреждений.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

(5 ч в неделю на алгебру, всего 170 ч)

1. Функции, их свойства и графики	**25 ч**
Область определения и область значений функции. Четные и нечетные функции. Монотонные функции (пп. 1, 2, 1Д, 2Д)	4 ч
Исследование функций элементарными способами (п. 4Д)	2 ч
Квадратный трехчлен (пп. 3, 4)	4 ч
Контрольная работа № 1	1 ч
Квадратичная функция и ее график (пп. 5—7)	6 ч
Построение графиков функций (п. 5Д)	3 ч
Графики функций $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x$ (п. 7Д)	2 ч
Графики функций $y = \|f(x)\|$ и $y = f(\|x\|)$ (п. 8Д)	2 ч
Контрольная работа № 2	1 ч
2. Равносильность уравнений и неравенств	**8 ч**
Высказывания и предложения с переменными. Понятие о следовании и равносильности (пп. 9Д, 10Д)	3 ч
Условия равносильности уравнений, неравенств и их систем (пп. 11Д, 12Д, 13Д)	5 ч
3. Уравнения и неравенства с одной переменной	**24 ч**
Целое уравнение и его корни (п. 10)	2 ч
Способы решения целых уравнений (п. 14Д)	4 ч
Решение дробно-рациональных уравнений (п. 15Д)	3 ч
Контрольная работа № 3	1 ч
Решение неравенств второй степени (п. 8)	3 ч
Метод интервалов. Решение рациональных неравенств (пп. 9, 16Д)	4 ч
Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля (пп. 17Д, 18Д)	3 ч
Решение иррациональных уравнений (п. 20Д)	3 ч
Контрольная работа № 4	1 ч
4. Уравнения с двумя переменными и их системы	**16 ч**
Уравнение с двумя переменными, его степень. График уравнения с двумя переменными (пп. 22Д, 23Д)	3 ч
Графическая интерпретация решения систем уравнений (пп. 12, 24Д)	2 ч

Способы решения систем уравнений (п. 25Д)	5 ч
Решение задач с помощью систем уравнений (п. 14)	5 ч
Контрольная работа № 5	1 ч
5. Неравенства с двумя переменными и их системы	**10 ч**
Линейные неравенства с двумя переменными и их системы (пп. 26Д, 27Д)	5 ч
Неравенства и системы неравенств высших степеней с двумя переменными (п. 28Д)	2 ч
Неравенства и системы неравенств с переменными под знаком модуля (п. 29Д)	2 ч
Контрольная работа № 6	1 ч
6. Последовательности	**27 ч**
Последовательности. Способы задания последовательностей (пп. 15, 30Д)	3 ч
Арифметическая прогрессия. Формулы n-го члена и суммы первых n членов (пп. 16, 17)	5 ч
Свойства арифметической прогрессии (пп. 16, 17, 31Д)	2 ч
Контрольная работа № 7	1 ч
Геометрическая прогрессия. Формулы n-го члена и суммы первых n членов (пп. 18, 19)	5 ч
Свойства геометрической прогрессии (пп. 18, 19, 31Д)	2 ч
Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $\|q\| < 1$ (п. 20)	2 ч
Метод математической индукции и его применение в задачах на последовательности (п. 32Д)	2 ч
Возрастающие и убывающие последовательности (п. 33Д)	2 ч
Ограниченные и неограниченные последовательности (п. 34Д)	2 ч
Контрольная работа № 8	1 ч
7. Степень с рациональным показателем	**14 ч**
Функция $y = x^n$ (п. 22)	2 ч
Определение и свойства корня n-й степени (пп. 23, 24)	4 ч
Контрольная работа № 9	1 ч
Определение и свойства степени с дробным показателем (пп. 25, 26)	3 ч
Преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями (п. 27)	3 ч
Контрольная работа № 10	1 ч

8. Тригонометрические выражения и их преобразования	**25 ч**
Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса и их свойства (пп. 28, 29)	5 ч
Радианная мера угла (п. 30)	2 ч
Соотношения между тригонометрическими функциями угла и их применение в преобразованиях (пп. 31, 32)	5 ч
Контрольная работа № 11	1 ч
Формулы приведения (п. 33)	3 ч
Формулы сложения и следствия из них (пп. 34—36)	8 ч
Контрольная работа № 12	1 ч
9. Повторение	**19 ч**
Контрольная работа № 13	2 ч

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ВАРИАНТ I

С—1. Четные и нечетные функции (пп. 1Д, 2Д)

1. Докажите, что f — четная функция, а g — нечетная функия, если:

а) $f(x) = 6x^4 - 5$; в) $f(x) = |x-2| + |x+2|$;

б) $g(x) = 7x^5 - x$; г) $g(x) = |x+1| - |x-1|$.

2. Является ли четной или нечетной функция φ, если:

а) $\varphi(x) = \dfrac{8}{x}$;

б) $\varphi(x) = x^3 - 5$;

в) $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 - 1$?

3. Постройте график функции f, зная, что при $x \geqslant 0$ ее значения могут быть найдены по формуле:

а) $f(x) = x - 3$ и f — четная функция;

б) $f(x) = x^2$ и f — нечетная функция.

4. Известно, что функция g четная и она обращается в нуль при $x = -4$ и $x = 3$. Укажите другие значения аргумента, при которых $g(x) = 0$.

5. Известно, что уравнение $f(x) = 0$, где f — нечетная функция с областью определения $D(f) = \boldsymbol{R}$, имеет положительные корни 2 и 3. Найдите неположительные корни уравнения.

6. Линейная функция $y = 8x + b$ является нечетной функцией. Найдите значение b.

7. Известно, что $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — четные функции. Верно ли утверждение, что четной является функция $y = q(x)$, если:

а) $q(x) = f(x) + g(x)$;

б) $q(x) = f(x) - g(x)$;

в) $q(x) = f(x) \cdot g(x)$?

8. Представьте каким-либо способом функцию $y = f(x)$ в виде суммы четной и нечетной функций, если:

а) $f(x) = 5x^6 + x^5 + x^2 + x + 4$; б) $f(x) = 5x^2$.

С—2. Монотонные функции (пп. 2, 2Д)

1. Функция f, область определения которой промежуток $[-4; 4]$, задана графиком на рисунке 1. Укажите промежутки, на которых функция f:

   а) убывает; б) возрастает.

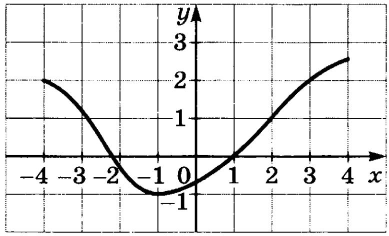


Рис. 1

2. Какая из линейных функций $y = 25x - 48$ и $y = -14x + 19$ является возрастающей, убывающей и почему?

3. Докажите, что функция $g(x) = x^2 - 1$ является убывающей на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастающей на промежутке $[0; +\infty)$.

4. Укажите промежутки возрастания и промежутки убывания функции $y = \dfrac{4x - 3}{x - 2}$.

5. Определите характер монотонности функций $y = x + 2$ и $y = x^3$. Докажите, что функция $y = x^3 + x + 2$ возрастающая.

6. Известно, что функция $y = g(x)$ является монотонной и что уравнение $g(x) = 5$ имеет корень, равный 8. Имеет ли это уравнение другие корни?

7. Известно, что функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 5)$. При каких значениях, принадлежащих этому промежутку, верно неравенство:

   а) $f(x) > f(6 - x)$; б) $f(x) < f(3 - 2x)$.

8. Известно, что функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — возрастающие. Является ли возрастающей функция $y = p(x)$, если:

   а) $p(x) = f(x) + g(x)$; б) $p(x) = f(x) - g(x)$?

9. Известно, что функция f определена на множестве $(-\infty; +\infty)$ и убывает на промежутке $(m; +\infty)$, где $m > 0$. Как изменяется эта функция на промежутке $(-\infty; -m)$, если:

   а) f — четная функция; б) f — нечетная функция?

С—3. Ограниченные и неограниченные функции (п. 3Д)

1. Приведите пример ограниченной функции, построив ее график.

2. Докажите, что функция $y = \frac{x}{x^2 + 9}$ является ограниченной, и найдите область значений функции.

3. Функция $y = |x - 5| - 1$ является ограниченной снизу. Покажите это, построив график функции. Укажите наименьшее значение функции.

4. Докажите, что функция $y = \frac{1}{x}$, где $D(y) = (-\infty; 0)$, не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значения.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:
   а) $y = x^2 + 9$, где $D(y) = [-10; 10]$;
   б) $y = x^3 + 1$, где $D(y) = [-10; 10]$.

6. Укажите значение аргумента, при котором функция $y = 6 - \sqrt{x - 4}$ принимает наибольшее значение. Существует ли наименьшее значение этой функции?

С—4. Исследование функций элементарными способами (п. 4Д)

1. Найдите область определения функции:
   а) $y = \frac{19}{x^2 - 10x + 21}$; б) $y = \frac{\sqrt{(x - 2)(x + 9)}}{x - 5}$;
   в) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x - 2}$.

2. Найдите область значений функции:
   а) $y = \frac{8}{x^2 - 4}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 9}$.

3. Укажите область значений функции $y = \frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

4. Найдите нули функции и области положительных и отрицательных значений, если:
   а) $y = x^3 - 0{,}25x$; б) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$.

5. Найдите горизонтальные и вертикальные асимптоты графика функции, если они существуют:

а) $y = \frac{3x}{x-2}$; б) $y = \frac{x^2+16}{8x}$.

6. Изобразите схематически график функции f, зная результаты исследования этой функции:

1) $D(f) = [-4; 4]$;
2) f — непрерывная нечетная функция;
3) $E(f) = [-3; 3]$;
4) $f(x) > 0$ при $x \in (0; 4)$;
5) функция возрастает на промежутке $[0; 4]$;
6) для любых x_1 и x_2, таких, что $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 4$, выполняется неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

С—5. Квадратный трехчлен и его корни (п. 3)

1. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $x^2 - 8x - 33$; б) $6x^2 + 13x - 5$.

2. Составьте какой-нибудь квадратный трехчлен, корнями которого являются числа:

а) -3 и 9; б) $5-\sqrt{3}$ и $5+\sqrt{3}$.

3. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

а) $x^2 - 8x + 23$; б) $4x^2 + 12x - 2$.

4. Докажите, что при любом c квадратный трехчлен:

а) $c^2 - 16c + 65$ принимает положительное значение;
б) $-c^2 + 10c - 18$ принимает отрицательное значение.

5. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{4a^2 - 4a + 5}{25}$.

6. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 + 9x$ на промежутке $[3; 5]$.

С—6. Разложение квадратного трехчлена на множители (п. 4)

1. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $2x^2 - 15x + 28$; б) $-y^2 - 10y + 11$; в) $0{,}1p^2 + 0{,}3p - 1$.

2. Докажите тождество

$$\frac{(a^2+3ab-4b^2)(a-5b)}{(a^2-ab-20b^2)(a-b)} = 1.$$

3. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2-49}{a^2+4a-21}$; б) $\dfrac{3b^2-34b-24}{6b^2-14b-12}$; в) $\dfrac{2(x+y)^2-5(x+y)-3}{4x+4y-12}$.

4. Упростите выражение $\dfrac{0{,}5y^2-63}{0{,}25y^2-4{,}5y-36}-\dfrac{y+6}{y-24}$.

5. Найдите значение дроби $\dfrac{8x-168}{x^2-81x+1260}$ при $x=76$.

6. Постройте график функции $y=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}$.

С—7. Функции $y=ax^2$, $y=ax^2+n$, $y=a(x-m)^2$ и их графики (пп. 5, 6)

1. Функция f задана графиком (рис. 2). Постройте график функции:

а) $y=2f(x)$; б) $y=\dfrac{1}{2}f(x)$.

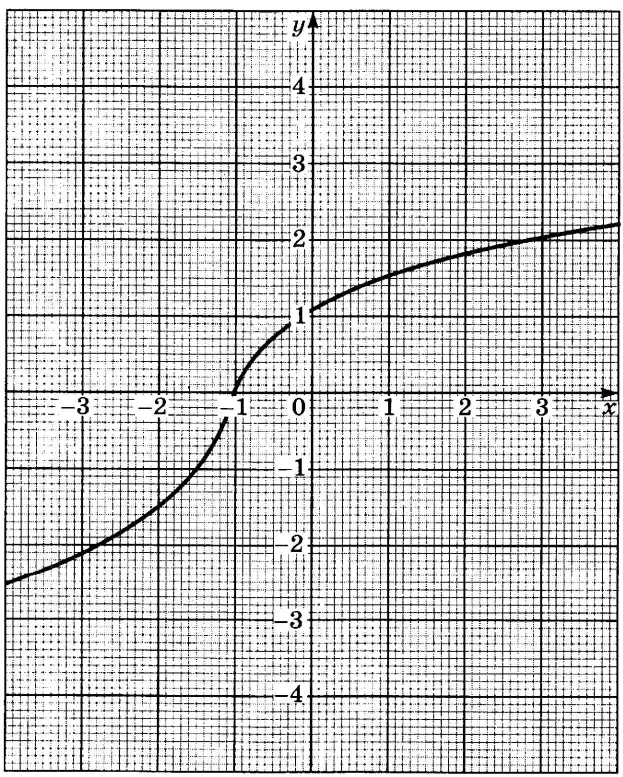


Рис. 2

2. Заполните таблицу:

x	0	1	2	3
$y = x^2$				
$y = \frac{1}{3}x^2$				

Учитывая свойства графика четной функции $y = x^2$, постройте график функции $y = \frac{1}{3}x^2$.

3. Принадлежит ли графику функции $y = 15x^2$ точка:
а) $A\ (2;\ 60)$; в) $C\ (-3;\ -135)$;
б) $B\ (-4;\ 240)$; г) $D\ (0{,}2;\ 0{,}6)$?

4. Постройте график функции:
а) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$; в) $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$;
б) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$; г) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2$.

5. Изобразите схематически график функции:
а) $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 1$; б) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 3$.

6. Постройте график функции:
а) $y = 3\sqrt{x}$; б) $y = -2\,|x|$.

С—8. Построение графика квадратичной функции (п. 7)

1. Постройте график функции:
а) $f(x) = (x - 3)^2 + 2$; б) $g(x) = (x + 2)^2 - 3$.

2. Найдите ось симметрии и координаты вершины параболы:
а) $y = x^2 + 6x - 3$; б) $y = -4x^2 + 8x - 3$.

3. Используя график функции f (задание 1а), найдите:
а) нули функции и промежутки, в которых $f(x) < 0$ и $f(x) > 0$;
б) промежутки, на которых функция возрастает, убывает;
в) область значений функции и ее наименьшее значение.

4. Найдите область значений функции:
а) $y = x^2 - 5x + 4$; б) $y = -x^2 - 6x + 1$.

5. Изобразите схематически график функции:
а) $y = \sqrt{x-3}$; б) $y = |x| - 2$.

6. Найдите значение параметра q, при котором наименьшее значение функции $y = x^2 + 16x + q$ равно -59.

С—9. Построение графиков различных функций (п. 5Д)

1. Постройте график функции
$$y = \begin{cases} x+6, \text{ если } x < -6, \\ x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ -x+6, \text{ если } x > 6. \end{cases}$$

2. Проведите исследование и постройте график функции
$$y = \sqrt{4-x^2}.$$

3. Постройте график функции $y = |x-2| + |x+2|$.

4. Найдите область определения функции
$$y = \frac{\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x^2-4}}$$
и постройте ее график.

5. Постройте график какой-нибудь возрастающей непрерывной функции f, у которой $D(f) = [-5; 5]$, $E(f) = [-3; 3]$, число -3 — наименьшее значение функции, а число 3 — наибольшее ее значение.

С—10. Графики функций $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$ (п. 7Д)

1. Постройте на координатной плоскости отрезок AB, зная координаты его концов: $A(-2; 3)$ и $B(6; -2)$. Постройте в этой же системе координат отрезок:
а) A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно оси x;
б) A_2B_2, симметричный отрезку AB относительно оси y.

2. Графиком функции g служит ломаная MKL, где $M(-2; 4)$, $K(4; -2)$, $L(8; 2)$. Постройте график функции:
а) $y = -g(x)$; б) $y = g(-x)$.

3. Постройте график функции:
а) $y = -|x+3|$; б) $y = \sqrt{-x} - 4$.

4. Докажите, что график функции $y = \frac{4 - 7x}{2}$ симметричен:

а) графику функции $y = 3{,}5x - 2$ относительно оси x;

б) графику функции $y = \frac{7x + 4}{2}$ относительно оси y.

5. Докажите, что графики функций $y = \frac{2x + 5}{2x - 5}$ и $y = \frac{2x - 5}{2x + 5}$, симметричны относительно оси y.

6. Найдите области определения функций $f(x) = \sqrt{9 - x}$, $g(x) = -\sqrt{9 - x}$ и $\varphi(x) = \sqrt{x + 9}$.

7. Известно, что область определения функции $y = g(x)$ — промежуток $[-6; 15]$. Какова область определения функции:

а) $y = -g(x)$; б) $y = g(-x)$; в) $y = -g(-x)$?

С—11. Графики функций $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$ (п. 8Д)

1. Графиком функции $y = f(x)$ служит ломаная ABC, где $A(-2; 2)$, $B(0; 3)$, $C(2; -2)$. Постройте график функции $y = |f(x)|$.

2. Ломаная KLM, где $K(-2; 3)$, $L(2; -1)$, $M(5; 2)$, — график функции $y = g(x)$. Постройте график функции $y = g(|x|)$.

3. Постройте график функции:

а) $y = |x + 2|$; б) $y = |x^2 - 5|$; в) $y = \left|\frac{4}{x} - 2\right|$.

4. Постройте график функции:

а) $y = |x| - 2$; б) $y = \frac{4}{|x|} - 2$; в) $y = ||x - 2| - 2|$.

5. Сколько корней имеют уравнения:

а) $2x - 1 = 0$ и $2|x| - 1 = 0$;
б) $x^2 - x = 0$ и $x^2 - |x| = 0$;
в) $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $x^2 - 5|x| + 6 = 0$;
г) $\sqrt{x - 5} = 1$ и $\sqrt{|x| - 5} = 1$?

6. Решите уравнение:

а) $||x - 2| - 3| = 1$; б) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$.

С—12. Высказывания и предложения с переменными (п. 9Д)

1. Из данных высказываний выберите истинные:

а) $\frac{1}{7} > 0{,}23$; в) $7\sqrt{2} < 5\sqrt{3}$;

б) $-\frac{9}{13} > -0{,}7$; г) $\sqrt{11} - 3 > \sqrt{5}$.

2. Используя прикидку результата, поставьте вместо многоточия знак < или > так, чтобы получилось истинное высказывание:

а) $(-7{,}16)^4 \cdot (-1{,}3)^5 \ldots 0$; в) $7{,}3^5 \ldots 7{,}3^7$;

б) $(-0{,}9)^7 \ldots -1$; г) $0{,}25^6 \ldots 0{,}25^8$.

3. Замените звездочку цифрой так, чтобы получилось истинное высказывание:

а) число 624* кратно 18;

б) число 15 является делителем числа 571*.

4. Укажите три пары натуральных чисел m и n, обращающих в истинное высказывание предложение:

а) сумма чисел m и n не превосходит 7;

б) разность чисел m и n равна 2;

в) произведение чисел m и n равно 6;

г) частное чисел m^2 и n^2 является натуральным числом.

5. Укажите множество натуральных значений n, при которых обращается в истинное высказывание предложение:

а) число n является делителем числа 12;

б) двузначное число n кратно 32;

в) n является наименьшим четырехзначным числом;

г) дробь $\frac{n+2}{7}$ правильная.

6. Существует ли целое значение k, при котором обращается в ложное высказывание предложение:

а) число $5k + 75$ кратно 5;

б) сумма $(k-1)^2 + (k-2)^2$ равна 0;

в) дробь $\frac{2k+3}{k+1}$ меньше 2?

7. Укажите наименьший и наибольший элемент множества натуральных чисел m, если известно, что:

а) m — двузначное число, кратное 8 или оканчивающееся цифрой 8;

б) m является делителем 45 и меньше 16;

в) m является квадратом натурального числа и не превосходит 40;

г) m является делителем числа 12 или числа 18.

С—13. Понятие о следовании и равносильности (п. 10Д)

1. Является ли второе предложение следствием первого (при положительном ответе сделайте запись, используя знак $\Rightarrow$):

а) $\angle A$ и $\angle B$ — углы при основании равнобедренного треугольника; $\angle A = \angle B$;
б) в равнобедренном $\triangle ABC$ один из углов равен $75°$; $\triangle ABC$ остроугольный;
в) AC и BD — диагонали ромба; $AC \perp BD$?

2. Следует ли второе предложение из первого, равносильны ли эти предложения (при положительном ответе сделайте запись, используя знаки $\Rightarrow$ или $\Leftrightarrow$):

а) a — натуральное число; $\dfrac{7a+2}{7}$ — дробное число;
б) p — отрицательное число; $-7p$ — положительное число;
в) число a кратно 11; число $5a$ кратно 11?

3. Равносильны ли предложения (при положительном ответе сделайте запись, используя знак $\Leftrightarrow$):

а) модуль числа a меньше 11; число a меньше 11;
б) модуль числа a больше 10; квадрат числа a больше 100;
в) числа a и b равны; квадраты чисел a и b равны?

4. Закончите запись так, чтобы предложения были равносильны:

а) $a + 15$ — целое число $\Leftrightarrow$ $21 - a$ ...;
б) запись натурального числа a оканчивается цифрой 0 $\Leftrightarrow$ натуральное число a кратно ... .

5. Вставьте пропущенную связку «и» или «или» так, чтобы полученное сложное предложение было равносильно данному:

а) $(a-2)(b-3) \Leftrightarrow a = 2$ ... $b = 3$;
б) $|x-1| = 47 \Leftrightarrow x = 48$ ... $x = -47$;
в) $(a-4)^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 4$ ... $b = 0$.

6. Замените многоточие словами «достаточно», «необходимо», «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание:

а) для того чтобы число a, где $a \in N$, делилось на 5, ..., чтобы его запись оканчивалась цифрой 0;
б) для того чтобы сумма $a + 34$, где $a \in N$, делилась на 17, ..., чтобы число a делилось на 17;
в) для того чтобы квадрат числа a был больше 4, ..., чтобы число a было больше 2.

С—14. Равносильные уравнения и уравнения-следствия (п. 11Д)

1. Является ли второе уравнение следствием первого, равносильны ли эти уравнения:

   а) $\dfrac{x-1}{17}=\dfrac{3x-4}{17}$ и $x-1=3x-4$;

   б) $\dfrac{5}{x-4}=\dfrac{x+1}{x-4}$ и $5=x+1$?

2. Дайте обоснование равносильности уравнений:

   а) $\dfrac{5x-8}{4}+x=3$ и $5x-8+4x=12$;

   б) $(15x-1)(x^2+18)=4(x^2+18)$ и $15x-1=4$.

3. Из данных уравнений выберите те, которые равносильны уравнению $x^2-5x+6=0$:

   $0{,}1x^2-0{,}5x+0{,}6=0$; $\quad x^2-4x=x-6$;

   $(x-2)(x-3)=0$; $\quad (x+2)(x-7)=0$;

   $\dfrac{x^2-5x}{x-2}=\dfrac{6}{x-2}$; $\quad \dfrac{x^2}{x+3}=\dfrac{5x-6}{x+3}$.

4. Найдите множество корней уравнения, заменив его равносильной системой или совокупностью уравнений:

   а) $(x+4)(x^2-3x-28)=0$;

   б) $(x+4)^2+(x^2-3x-28)^2=0$;

   в) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{4x-x^2}=0$.

5. При каких значениях a равносильны уравнения
$$5x+a=23 \text{ и } 3ax-20x-12=0?$$

6. При каких значениях m уравнение
$$12x^2-(5m^2-6m)x+25m^2-36=0$$
равносильно уравнению $x^2=0$?

С—15. Равносильные системы уравнений (п. 12Д)

1. Запишите систему уравнений, которая получится, если в системе $\begin{cases} x+y=7, \\ 3x-y=9 \end{cases}$ первое уравнение заменить уравнением, полученным в результате почленного сложения уравнений системы. Равносильны ли полученная система уравнений и данная? Проиллюстрируйте свой ответ с помощью графиков.

2. Запишите систему уравнений, которая получится, если в системе $\begin{cases} x=y+2, \\ x+y=6 \end{cases}$ заменить во втором уравнении пере-

менную x выражением $y + 2$. Равносильны ли полученная система уравнений и данная? Проиллюстрируйте свой ответ с помощью графиков.

3. При каких значениях a и b равносильны системы уравнений

$$\begin{cases}(a-2)x+3y=9,\\5x+(b-3)y=6\end{cases} \text{ и } \begin{cases}3x+2y=16,\\x-6y=12?\end{cases}$$

4. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases}3x+7y=26,\\2x+9y=13,\\ax+2y=9\end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases}3x+7y=26,\\2x+9y=13?\end{cases}$$

5. При каких значениях a имеет решение система уравнений

$$\begin{cases}3x+3y=a-5,\\x+3y=a+1,\\6x+5y=a-2?\end{cases}$$

6. Равносильны ли системы уравнений; является ли одна из них следствием другой (ответ обоснуйте):

$$\begin{cases}f(x, y)=5,\\h(x, y)=12\end{cases} \text{ и } \begin{cases}f^2(x, y)=25,\\h(x, y)=12?\end{cases}$$

С—16. Равносильные неравенства и неравенства-следствия (п. 13Д)

1. Дайте обоснование равносильности неравенств:
   а) $18x - 1 > 6x + 4$ и $18x - 6x > 4 + 1$;
   б) $\frac{15x-1}{6} - x > 0$ и $15x - 1 - 6x > 0$;
   в) $(x + 75)(x^2 + 17) > 16x(x^2 + 17)$ и $x + 75 > 16x$.

2. Докажите, что множеством решений неравенства является пустое множество:
   а) $5x(x - 3) - (2x + 1)(x - 8) < x^2 - 11$;
   б) $\frac{(3x+4)^2}{4} - \frac{6x-1}{2} < 3x - 2$.

3. Из данных неравенств выберите такое, из которого следуют остальные:
   а) $x < \sqrt{7}$, $x < 2{,}6$, $x < 2\frac{2}{3}$, $x < 2\sqrt{2}$;
   б) $x > \sqrt{11}$, $x \geq 3{,}3$, $x > 2\sqrt{3}$, $x > 3\frac{1}{3}$.

4. Следует ли из первого неравенства второе (при положительном ответе сделайте запись, используя знак $\Rightarrow$):

а) $|x| < 5$, $|x| < 8$;　　в) $x^2 > 9$, $x > 3$;

б) $|x| < 4$, $x < 4$;　　г) $x < 7$, $x^2 < 49$?

5. Составьте неравенство вида $x^2 + px + q < 0$, равносильное двойному неравенству $-1 < x < 8$.

6. Докажите неравенство:

а) $x^2 + y^2 > 12x + 6y - 50$;　　б) $\dfrac{a^2b^2 + a^2 + b^2}{2} \geqslant 3ab - 2$.

С—17. Целое уравнение и его корни (п. 10)

1. Определите степень уравнения и число его корней:

а) $x^2 - 8x - 9 = 0$;　　г) $x^3 - x = 0$;

б) $2x^2 - x + 7 = 0$;　　д) $x^4 = 16$;

в) $x^2 - 4x + 4 = 0$;　　е) $x^5 + x^4 = x^2 + x$.

2. Составьте какое-нибудь целое уравнение:

а) второй степени, имеющее корни -3 и 6;

б) третьей степени, имеющее корни 1, 3 и 7;

в) четвертой степени, имеющее корни -1, 2 и 5.

3. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, зная лишь один из его корней:

а) $x_1 = 5 - \sqrt{2}$;　　б) $x_1 = 3 + \sqrt{7}$;　　в) $x_1 = \dfrac{7}{\sqrt{11} - 2}$.

4. Решите уравнение, разложив левую его часть на множители:

а) $x^3 - 4x = 0$;　　в) $2y^3 - 8y^2 + 3y - 12 = 0$;

б) $5x^4 - 125 = 0$;　　г) $y^4 - 6y^3 + 9y^2 = 4y^2 - 24y + 36$.

5. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $2\,(x^2 + 1)^2 - 5\,(x^2 + 1) + 3 = 0$;

б) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;

в) $\dfrac{x - 1}{x} + \dfrac{x}{x - 1} = 2{,}5$;

г) $\dfrac{x^2 - 5}{x} + \dfrac{x}{x^2 - 5} = 4{,}25$.

6. Решите уравнение:

а) $y^4 - 9y^2 + 18 = 0$;　　б) $y^4 - 17y^2 + 16 = 0$.

7. При каких значениях параметра c уравнение
$$x^4 - 6x^2 + c = 0:$$
а) не имеет корней; б) имеет два корня; в) имеет четыре корня?

8. Составьте биквадратное уравнение, зная, что один из его корней равен $\sqrt{11}$, а другой $1 - \sqrt{2}$.

С—18. Способы решения целых уравнений (п. 14Д)

1. Объясните, почему уравнение:
а) $2x^5 + 4x^3 + 16x - 35 = 0$ не имеет отрицательных корней;
б) $x^6 + 7x^4 + 3x^2 + 17 = 0$ не имеет корней.

2. Почему уравнение $x^3 - 6x^2 + 5x - 2 = 0$ не имеет целых корней?

3. Найдите целые корни уравнения:
а) $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$;
б) $x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0$;
в) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$;
г) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$.

4. Решите уравнение:
а) $x^3 - 2x^2 - 29x + 30 = 0$; б) $x^3 - 8x^2 + 9x - 2 = 0$.

5. Решите уравнение, используя введение новой переменной:
а) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 5040$;
б) $(y - 1)(y - 2)(y - 3)(y - 4) = 360$.

6. Решите симметрическое уравнение:
а) $x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 6x + 1 = 0$;
б) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0$.

7. Решите уравнение, используя свойство монотонности функции:
а) $x^5 + 7x + 8 = 0$;
б) $x^3 + x - 30 = 0$;
в) $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$;
г) $6x^6 + 4x^2 - 10 = 0$.

8. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^2 - 2|x| - 1$ с прямой $y = 2$.

9. Решите уравнение относительно x:
а) $ax^2 - 5x = 0$; б) $x^2 - 2x + b = 0$.

С—19. Дробно-рациональные уравнения (п. 15Д)

1. Решите уравнение:
а) $\frac{1}{x} + \frac{4}{x - 3} = \frac{5}{x - 2}$; б) $\frac{20 - 4y}{y^2 - 3y} - \frac{4}{y^2 + 3y} + \frac{y - 10}{y^2 - 9} = 0$.

2. Сумма двух взаимно обратных обыкновенных дробей равна $\frac{58}{21}$. У первой дроби числитель на 4 меньше знаменателя. Найдите эти дроби.

3. Решите уравнение методом замены переменной:
$$\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2+27\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2=12.$$

4. Найдите рациональные корни уравнения:
$$\frac{x^4-4x^2+1}{x^2}=\frac{5x}{8(x^2+1)}.$$

5. Решите уравнение
$$\frac{4}{x-2}+\frac{3}{x-4}=\frac{2}{x-6}+\frac{1}{x-8}.$$

6. Решите уравнение, предварительно выделив из дроби целую часть:

а) $\frac{x^2-3x+1}{x-3}+\frac{x^2+3x+7}{x+3}=10;$

б) $\frac{x^2+4x+9}{x+2}+\frac{x^2-4x+9}{x-2}=12.$

С—20. Решение неравенств второй степени с одной переменной (п. 8)

1. Решите неравенство:

а) $x^2+x-6<0;$ в) $6x^2-13x+6\leqslant 0;$

б) $x^2+x-6\geqslant 0;$ г) $-4x^2+23x-15>0.$

2. Найдите множество решений неравенства:

а) $x^2<9;$ б) $0{,}5x^2\geqslant 8;$ в) $5x>x^2;$ г) $\frac{1}{2}x^2\leqslant 1.$

3. Решите неравенство:

а) $6x^2-8x+5<5x^2-3x-1;$ б) $4x-7<2x^2-9x+8.$

4. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{25x^2-10x};$ б) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-6x-7}}.$

5. Найдите множество целых решений неравенства:

а) $x^2-x-12\leqslant 0;$ б) $x^2-2x-15<0.$

6. Докажите, что при любом значении x верно неравенство $4x^2-20x+26>0.$

С—21. Решение неравенств методом интервалов (п. 9)

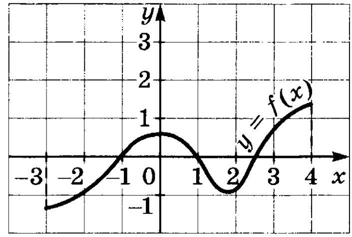


Рис. 3

1. Укажите промежутки (рис. 3), в которых функция f принимает:

   а) положительные значения;
   б) отрицательные значения.

2. Начертите координатную прямую и отметьте на ней точки, в которых функция $y = (x + 3)(x - 1)(x - 4)$ обращается в нуль.

   Отметьте знаком «+» промежутки, в которых функция принимает положительные значения, и знаком «−» промежутки, в которых функция принимает отрицательные значения.

3. Решите методом интервалов неравенство:

   а) $(x + 3)(x - 5) < 0$;
   б) $(x - 4)(x + 6) > 0$;
   в) $(x + 1)(x - 1)(x - 3) > 0$;
   г) $(x + 3)(x + 1)(x - 4) < 0$.

4. Решите неравенство:

   а) $(x - 3)(x - 8)(x - 10) > 0$;
   б) $(x + 12)(x + 4)(x - 5) \leqslant 0$;
   в) $x(x + 1)(x - 2)(x - 8) \leqslant 0$;
   г) $(x + 6)(x + 3)(x - 6)(x - 9) > 0$.

5. Найдите область определения функции:

$$y = \sqrt{x(x+7)(x-7)(x-10)}.$$

6. Докажите, что неравенства

$$\frac{x-5}{x+3} < 0 \quad \text{и} \quad (x-5)(x+3) < 0$$

   равносильны.

7. Решите неравенство:

   а) $\dfrac{x-1}{x+6} < 0$;
   б) $\dfrac{x-8}{x-16} > 0$;
   в) $\dfrac{6x+7{,}2}{x-10} \leqslant 0$;
   г) $\dfrac{9x-198}{29x} \geqslant 0$.

С—22. Решение рациональных неравенств (п. 16Д)

1. Решите неравенство:

   а) $(x - 2)(x^2 - 9) \leqslant 0$;
   б) $(x^2 - 25)(x - 3)^2 \geqslant 0$;
   в) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 8x - 9) < 0$;
   г) $(x^3 - 27)(x^2 + 14x + 48) > 0$.

2. Докажите, что равносильны неравенства:

а) $(x-8)^3 < 0$ и $x - 8 < 0$; б) $\frac{(2x+5)^6}{2x+5} \geqslant 0$ и $2x + 5 > 0$.

3. Решите неравенство:

а) $\frac{x^4 - 8x^2 - 9}{(x-1)^3} \leqslant 0$; б) $\frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 + 6x + 8} \geqslant 0$.

4. Составьте неравенство, решения которого образуют множество:

а) $(-5; 1) \cup (9; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (1; 5) \cup (7; +\infty)$.

5. Докажите, что множество решений неравенства:

а) $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81 \leqslant 0$ состоит из одного числа;

б) $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 \geqslant 0$ есть множество действительных чисел.

6. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(x^2 - 7x + 18)(x - 1)}.$$

7. Найдите целые решения неравенства

$$x(x-6)(x^2-9) \leqslant 0.$$

С—23. Расстояние между точками координатной прямой (п. 17Д)

1. Найдите расстояние d между точками:

а) $A(-3)$ и $B(5)$; б) $C(-15)$ и $D(0)$; в) $K(-100)$ и $L(300)$.

2. Начертите координатную прямую, отметьте на ней точку C — середину отрезка, концами которого служат точки A и B, и найдите ее координаты, если:

а) $A(0)$ и $B(6)$; в) $A(-3)$ и $B(5)$;
б) $A(-14)$ и $B(0)$; г) $A(-7)$ и $B(5)$.

3. Запишите в виде равенства или неравенства, используя знак модуля, утверждение, что расстояние между точками $P(x)$ и $K(8)$ координатной прямой:

а) равно 1; в) больше 1; д) меньше 3;
б) меньше 1; г) равно 3; е) больше 3.

4. Запишите неравенство вида $a < x < b$, равносильное неравенству:

а) $|x - 3| < 2$; б) $|x + 2| < 1$; в) $|x - 1{,}5| < 0{,}02$.

5. Запишите неравенство вида $|x - a| \leqslant k$, равносильное неравенству:

а) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; б) $0{,}2 \leqslant x \leqslant 0{,}3$; в) $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$.

6. Покажите, используя координатную прямую, что если число a является решением неравенства $|x - b| > 1$, то a является решением неравенства $x < b - 1$ или неравенства $x > b + 1$.

7. Решите уравнение и неравенства:
а) $|x - 5| = 2$, $|x - 5| < 2$, $|x - 5| > 2$;
б) $|x + 4| = 1$, $|x + 4| < 1$, $|x + 4| > 1$.

С—24. Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля (п. 18Д)

1. Решите уравнение:
а) $|x| = 5$;
б) $|x - 3| = 2$;
в) $|3x - 7| = 1$;
г) $|11 - 2x| = 3$.

2. Найдите корни уравнения:
а) $|x^2 - 9| = 7$; б) $|x^2 - 3x| = 2$.

3. Решите уравнение:
а) $|x^2 - 5x + 2| = x + 9$; б) $|2x^2 + 7x - 5| = 4x + 4$.

4. Найдите точки пересечения графика функции $y = |x + 3| + |x - 2|$ с прямой:
а) $y = 6$; б) $y = 5$; в) $y = 3$.

5. Решите уравнение:
а) $|x - 2| + |x + 2| = 6$;
б) $|x - 2| + |x + 2| = 4$;
в) $|x - 2| + |x + 2| = 1$;
г) $|x| + |x + 3| + |x - 3| = 8$;
д) $|x| + |x + 3| + |x - 3| = 6$;
е) $|x| + |x + 3| + |x - 3| = 3$.

6. Решите уравнение:
а) $3x^2 - 2|x - 1| - 10 = 0$; б) $x^2 - \dfrac{x - 5}{|x - 5|} = 15$.

7. Постройте график функции $y = ||x| - 4|$ и решите уравнение:
а) $||x| - 4| = 5$;
б) $||x| - 4| = 4$;
в) $||x| - 4| = 2$;
г) $||x| - 4| = 0$.

С—25. Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля (п. 19Д)

1. Решите неравенство:
а) $|x| \leqslant 3$;
б) $|x| > 3$;
в) $|x - 5| < 2$;
г) $|x - 5| \geqslant 2$;
д) $|5x + 4| \leqslant 7$;
е) $|9 - 5x| > 1$.

2. Найдите множество решений неравенства:
а) $|x^2 - 3| < 2$; б) $|x^2 + 7x| \leqslant 8$; в) $|x^2 - 7x + 13| \geqslant 1$.

3. Постройте график функции $y = |x + 3| + |x - 3|$ и, используя график, решите неравенство:

а) $|x + 3| + |x - 3| > 8$; б) $|x + 3| + |x - 3| \leqslant 10$.

4. Решите неравенство:

а) $|1{,}5x - 2| + |1{,}5x + 2| < 6$;

б) $|1{,}5x - 2| + |1{,}5x + 2| \geqslant 8$.

5. Решите неравенство:

$5x^2 - 4|x - 2| \leqslant 20$.

6. Найдите целые решения неравенства

$$|x(x - 2)(x - 4)| < 15.$$

7. Найдите множество решений неравенства

$$|x + 1| < \frac{1}{x + 1}.$$

С—26. Решение иррациональных уравнений (п. 20Д)

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x - 3} = x - 5$; в) $\sqrt{5x - 6} = 3x - 4$;

б) $\sqrt{x - 3} = 5 - x$; г) $\sqrt{3x + 1} = 9 - x$.

2. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $\sqrt{x - 6} = 4 - x$; б) $\sqrt{2x - 7} + 2x = \sqrt{56 - 16x}$.

3. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{x^2 - 16} = 8 - x$; б) $\sqrt{3 - 2x - x^2} = 3 - x$.

4. Используя свойства монотонных функций, решите уравнение:

а) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 6} + \sqrt{x + 13} = 9$;

б) $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{3x + 1} + \sqrt{10x - 1} = 14$.

5. Используя свойства монотонных и четных функций, решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 21} = 9$;

б) $\sqrt{x^4 + 3x^2 - 3} + \sqrt{x^2 + 5} = 8$.

6. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x - 3} = 3$; б) $\sqrt{5x + 2} - \sqrt{5x - 2} = 2$.

7. Найдите корни уравнения

$$\sqrt{x - 4} + \sqrt{3x + 1} = \sqrt{19 - 3x} + \sqrt{14 - x}.$$

8. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $\sqrt{x^2 - x - 12} + \sqrt{x^2 - x - 20} = 4$;

б) $\dfrac{x+4}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{x+9}{3}$;

в) $\sqrt{\dfrac{7x}{x+3}} + \sqrt{\dfrac{x+3}{7x}} = \dfrac{5}{2}$.

9. Решите уравнение:

а) $(x-5)\sqrt{\dfrac{x+7}{x-4}} = 0$; б) $(x^2 - 4)\sqrt{6 + x - x^2} = 0$.

С—27. Решение иррациональных неравенств (п. 21Д)

1. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x} < 5$; б) $\sqrt{x} > 5$; в) $\sqrt{3x-4} < 1$; г) $\sqrt{3x-4} > 1$.

2. Найдите множество решений неравенства:

а) $\sqrt{x^2 - 5x - 6} < 2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{4x - x^2} > 1$.

3. Используя свойства монотонных функций (см. Указание к С—26, № 7), решите неравенства

$$\sqrt{x-2} < 8 - x \quad \text{и} \quad \sqrt{x-2} > 8 - x.$$

4. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x+1} < x$; в) $\sqrt{5x+6} < 2x - 1$;

б) $\sqrt{2x+1} > x$; г) $\sqrt{5x+6} > 2x - 1$.

5. Докажите, что множество решений неравенства $\sqrt{f(x)} > a$ при $a < 0$ совпадает с областью определения функции f.

6. Решите неравенство:

а) $\sqrt{24 - 5x - x^2} > -1$; б) $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} > -5$.

7. Решите неравенство, введя новую переменную:

а) $\sqrt{x-2} - \dfrac{12}{\sqrt{x-2}} \leqslant 1$; б) $x^2 - x - \sqrt{x^2 - x - 6} > 0$.

8. Найдите множество решений неравенства:

а) $(x-3)\sqrt{5-2x} < 0$; б) $(x^2 - 1)\sqrt{9 - x^2} > 0$.

С—28. Уравнение с двумя переменными и его степень (п. 22Д)

1. Определите степень уравнения:

а) $7x^4 - 2x^2y^3 - y^4 + 5 = 0$;

б) $(x + y - 1)^2 - (x - y)^2 = 4xy + 1$.

2. Является ли пара чисел (–2; 3) решением уравнения:
а) $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^2 = 76$; б) $8x^2 - 5y^2 = 32$?

3. Найдите множество решений уравнения
$$x^4 - 4x^2 - 6y^2 + y^4 + 13 = 0.$$

4. Найдите множество целых решений уравнения
$$x + 3y = xy.$$

5. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 3 дает в остатке 1, а при делении на 4 дает в остатке 2.

6. Из двузначного числа вычли число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, и получили 36. Найдите данное двузначное число.

С—29. График уравнения с двумя переменными (п. 23Д)

1. Какой кривой (гиперболой, окружностью, параболой) является множество точек, если уравнение этой кривой имеет вид:
а) $(x - 2)^2 + (x - 5)^2 = 36$; б) $x^2 - y^2 = 18$; в) $x = y^2 - 3$?

2. Что представляет собой множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y^2 = 4x^2$? Постройте график этого уравнения.

3. Докажите, что графиком уравнения $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 20$ является окружность. Укажите координаты центра окружности и длину ее радиуса.

4. Как следует переместить на координатной плоскости гиперболу $y = \frac{12}{x}$, чтобы ее уравнение приняло вид $x^2 - y^2 = 24$?

5. Как следует переместить на координатной плоскости параболу $y = x^2$, чтобы ее уравнение приняло вид $x = y^2$?

6. Докажите, что графиком уравнения:
а) $x^2 - y^2 = 6$ является гипербола;
б) $x = y^2 - 5y$ является парабола.

7. Постройте график уравнения:
а) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$; в) $x^2 - y^2 = 10$;
б) $x = (y - 2)^2$; г) $x^2 - 9y^2 = 0$.

С—30. Графический способ решения систем уравнений (пп. 12, 24Д)

1. Является ли пара чисел (6; 7) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + xy = 78, \\ y^2 - xy = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 85, \\ 6x - 3y = 15? \end{cases}$

2. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y - x = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ x^2 + (y - 3)^2 = 25. \end{cases}$

3. Изобразите схематически графики уравнений и определите, сколько решений имеет система:

а) $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ x = y^2 - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ (x - 6)^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

4. Докажите, что система уравнений не имеет решений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - 2x = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2x - 1, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$

5. Решите графически с помощью системы уравнений кубическое уравнение

$$x^3 - 4x + 3 = 0.$$

С—31. Способы решения систем уравнений с двумя переменными (пп. 13, 25Д)

1. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 40, \\ x = 3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - xy + 8y^2 = 32, \\ x - 2y = -3; \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 17, \\ xy = 72; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 15; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75, \\ x^2 - xy + y^2 = 25. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (2x - 5)(y + 3) = 0, \\ 4x^2 - 2xy + y^2 = 49; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2 + 2xy - 3x - y = 0, \\ 4x^2 - 2y^2 + 4x + 3y = 3. \end{cases}$

4. Найдите множество решений системы уравнений, в левой части которых однородные многочлены:

а) $\begin{cases} x^2 - 2xy - 15y^2 = 0, \\ 3x^2 - xy + 6y^2 = 36; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 2x^2 + 6xy - 9y^2 = 11. \end{cases}$

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3xy + y^2 = 16, \\ x^2 - 2xy - 7y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43. \end{cases}$

6. Решите систему уравнений, используя введение новых переменных:

а) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 11, \\ 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 36; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 133, \\ x + \sqrt{xy} + y = 19. \end{cases}$

7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{8}{x+y} + \dfrac{8}{x-y} = 5, \\ \dfrac{16}{x+y} + \dfrac{10}{x-y} = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-5}} - \dfrac{5}{\sqrt{y+1}} = 1, \\ \dfrac{2}{\sqrt{x-5}} + \dfrac{4}{\sqrt{y+1}} = 3. \end{cases}$

С—32. Решение задач с помощью систем уравнений (п. 14)

1. Из города A в город B автомобиль ехал 2 ч. На обратном пути он ехал со скоростью на 15 км/ч большей, чем из A в B, и затратил на этот путь на 20 мин меньше, чем первоначально. Найдите расстояние между городами и скорость автомобиля на пути из A в B и на обратном пути.

2. Лодка проплыла от одной пристани до другой по течению реки за 18 мин. На обратный путь она затратила 24 мин. Найдите собственную скорость лодки и расстояние между пристанями, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

3. Два комбайна, работая совместно, могут убрать урожай с участка за 24 ч. Если бы каждый комбайн работал отдельно, то первому, чтобы убрать урожай с половины участка, потребовалось бы столько же времени, сколько второму с $\frac{1}{3}$ участка. За сколько часов смог бы убрать каждый комбайн весь урожай, работая отдельно?

4. Два куска латуни имеют массу 30 кг. Первый кусок содержит 5 кг чистой меди, а второй кусок — 4 кг. Сколько меди содержится в каждом куске, если известно, что второй кусок содержит на 15% меди больше, чем первый?

5. Равнодействующая двух сил, направленных под прямым углом, равна 17 Н. Если каждую из сил уменьшить на 3 Н, то равнодействующая уменьшится на 4 Н. Найдите величину составляющих сил.

6. Вкладчик положил деньги в банк и получил через год 525 р. Если бы вклад был на 100 р. меньше, а банк выплачивал бы процент вдвое больший, то вкладчик получил бы 440 р. Какова была сумма вклада и какой процент выплачивал банк?

С—33. Линейные неравенства с двумя переменными (п. 26Д)

1. Известно, что F — множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $6x - 5y < 11$. Принадлежит ли множеству F точка:
   а) $A\ (0{,}5;\ 0)$; б) $B\ (2;\ 0)$; в) $C\ (5;\ 5)$; г) $D\ (17;\ 10)$?

2. Постройте прямую $y = 0{,}5x + 1$. Покажите штриховкой множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geqslant 0{,}5x + 1$.

3. Изобразите на координатной плоскости множество P, если:
   а) $P = \{(x;\ y) \mid x$ — любое число, $y > -5\}$;
   б) $P = \{(x;\ y) \mid x \leqslant 3,\ y$ — любое число$\}$.

4. Постройте прямую, проходящую через начало координат и точку $A\ (2;\ 1)$. Задайте неравенством открытую полуплоскость, расположенную выше этой прямой.

5. Постройте прямую $x - 2y + 4 = 0$ и определите знак выражения $x - 2y + 4$ в каждой из образовавшихся открытых полуплоскостей.

6. Задайте неравенством открытую полуплоскость, которая выше прямой AB, проходящей через точки $A\ (1;\ 0)$ и $B\ (2;\ 1)$.

7. При каких значениях a множество решений неравенства $2x + ay + 4 > 0$ изображается открытой полуплоскостью, расположенной выше прямой $2x + ay + 4 = 0$?

С—34. Система линейных неравенств с двумя переменными (п. 27Д)

1. Пусть P — множество точек плоскости, задаваемое системой неравенств
$$\begin{cases} 0{,}3 + 0{,}5y - 1 > 0, \\ 2x - 3y < 14. \end{cases}$$
   Принадлежит ли множеству P точка:
   а) $A\ (10;\ 8)$; б) $B\ (2;\ -1)$?

2. Изобразите на координатной плоскости множество $C = A \cap B$, если

$$A = \{(x;\ y) \mid y \geqslant 0{,}5x\},\quad B = \{(x;\ y) \mid y \leqslant x + 2\}.$$

3. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} y \geqslant -x+2, \\ y \leqslant 2x+2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - x - 3 \leqslant 0, \\ y - x + 5 \geqslant 0. \end{cases}$

4. Укажите какую-нибудь пару значений k и b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 3x+4, \\ y \geqslant kx+b \end{cases}$$

задает на координатной плоскости: а) полосу; б) угол.

5. Изобразите на координатной плоскости множество $M = K \cap P$, если $K = \{(x;\ y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ y$ — любое число$\}$, $P = \{(x;\ y) \mid x$ — любое число, $-3 \leqslant y \leqslant 6\}$.

6. Постройте треугольник, задаваемый системой неравенств

$$\begin{cases} y - 2x \geqslant 0, \\ y \leqslant 0{,}5x + 4{,}5, \\ y + 2{,}5x + 4{,}5 \geqslant 0, \end{cases}$$

и найдите координаты его вершин.

7. Задайте системой неравенств фигуру, закрашенную на рисунке 4.

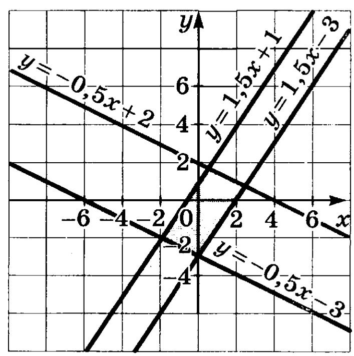


Рис. 4

С—35. Вычисление площадей многоугольников (п. 27Д)

1. Изобразите на координатной плоскости треугольник, который задает система неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ 2x + y - 4 \leqslant 0, \end{cases}$$

и определите его площадь.

2. Постройте треугольник, задаваемый системой неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 5, \\ y \geqslant 3, \\ x + y \leqslant 12, \end{cases}$$

и определите его площадь.

3. Задайте системой неравенств треугольник ABC, изображенный на рисунке 5, и определите его площадь.

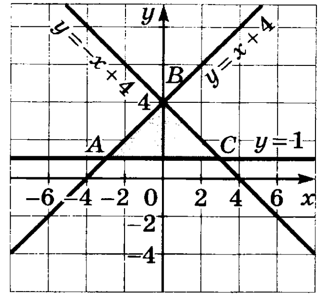


Рис. 5

4. Постройте прямоугольник, задаваемый на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} -4{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5, \\ -2 \leqslant y \leqslant 4, \end{cases}$$

и определите его площадь.

5. Постройте четырехугольник, вершинами которого являются точки A (–4; 0), B (0; 5), C (4; 0), D (0; –5). Задайте этот четырехугольник системой неравенств и определите его площадь.

6. Постройте четырехугольник, который задает на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x + y \leqslant 7, \\ x - 5 \leqslant 0, \end{cases}$$

и определите его площадь.

С—36. Неравенства высших степеней с двумя переменными (п. 28Д)

1. Известно, что F — множество точек координатной плоскости, заданное неравенством $2x^2 + 3y - 6 > 0$. Принадлежит ли множеству F точка:

а) A (6; –40); в) C (–2; 8);
б) B (0,1; –0,2); г) $D(\sqrt{2}; \sqrt{2})$?

2. Постройте график функции $y = x^2 - 2$. Задайте неравенством область, расположенную выше графика.

3. Выделите на координатной плоскости множество точек, которое задает неравенство $y \geqslant (x - 4)^2$.

4. Постройте график функции $y = (x - 1)(x - 4)$. Определите знак произведения $(x - 1)(x - 4)$ в каждой из образовавшихся областей.

5. Задайте неравенством:

а) круг с центром в точке A (2; 1) и радиусом, равным 5;

б) множество точек плоскости, расположенных вне круга с центром в начале координат и радиусом, равным 8.

6. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 \leqslant 49$;

б) $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 \leqslant 0$.

7. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy - 1 \geqslant 11$.

С—37. Системы неравенств высших степеней с двумя переменными (п. 28Д)

1. Зная, что P — множество точек координатной плоскости, заданное системой неравенств

$$\begin{cases} xy + 4 > 0, \\ y^3 + x < 6, \end{cases}$$

определите, принадлежит ли множеству P точка:

а) $A\ (-1;\ 2)$; в) $C\ (-1{,}5;\ -2)$;

б) $B\ (-1;\ 3)$; г) $D\ (\sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

2. Изобразите множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 81, \\ y \geqslant x^2 - 9. \end{cases}$$

3. Изобразите фигуру, заданную системой неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ xy \geqslant 0. \end{cases}$

Найдите ее площадь (с точностью до 0,1).

4. При каком условии система $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 64, \\ x^2 + y^2 \geqslant b^2 \end{cases}$ задает:

а) кольцо; б) окружность; в) пустое множество?

5. Изобразите множество $P = A \cap B$, если

$A = \{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 25\}$,

$B = \{(x;\ y) \mid (x - 3)^2 + (y - 4)^2 \leqslant 16\}$.

6. Среди точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + 3x - 4, \\ y - x - 1 \leqslant 0, \end{cases}$$

найдите точку с наибольшей ординатой и точку с наименьшей ординатой.

7. Задайте системой неравенств множество точек, показанное на рисунке 6.
Задайте системой неравенств оставшуюся часть круга.

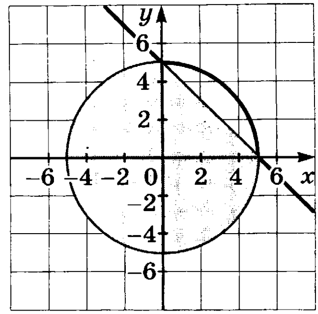


Рис. 6

С—38. Неравенства с переменными под знаком модуля (п. 29Д)

1. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, которое задает неравенство:

а) $y \geqslant |x - 1|$;   б) $y \geqslant \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$.

2. Выделите на координатной плоскости множество точек, которое задает неравенство:

а) $y \geqslant |x^2 - 4x + 3|$;   б) $y \geqslant x^2 + 5|x|$.

3. Изобразите на координатной плоскости множество P, если:

а) $P = \{(x;\ y) \mid 1 \leqslant |x| \leqslant 2,\ y$ — любое число$\}$;

б) $P = \{(x;\ y) \mid x$ — любое число, $3 \leqslant |y| \leqslant 4\}$.

4. Изобразите фигуру, которую задает на координатной плоскости неравенство $|x| + |y| \leqslant 2$, и определите ее площадь.

5. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, которое задает неравенство

$$|y| \leqslant x^2 + 4.$$

6. Выделите на координатной плоскости множество точек, которое задает неравенство

$$x^2 + y^2 - 6|x| - 4y \leqslant 12.$$

Укажите три какие-либо точки, принадлежащие этому множеству.

С—39. Системы неравенств с переменными под знаком модуля (п. 29Д)

1. Постройте фигуру, которую задает система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant |x|, \\ y \leqslant 12, \end{cases}$$

и найдите ее площадь.

2. Покажите на координатной плоскости фигуру, которую задает система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant |x|, \\ y \leqslant 0{,}6x + 1{,}6, \end{cases}$$

и определите ее площадь.

3. Выделите на координатной плоскости множество точек, которое задает система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant |x^2 - 3|, \\ y \leqslant 2x. \end{cases}$$

Укажите координаты точки с наименьшей ординатой и точки с наибольшей ординатой.

4. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} 2 \leqslant |x| \leqslant 4, \\ 1 \leqslant |y| \leqslant 5. \end{cases}$$

5. Изобразите на координатной плоскости фигуру, которую задает система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ y \geqslant |x|, \end{cases}$$

и определите ее площадь (с точностью до 0,1).

6. Покажите на координатной плоскости множество точек, которое задает система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant |x - 2|, \\ (x - 2)^2 + y^2 \leqslant 4. \end{cases}$$

7. Постройте фигуру, которую задает система неравенств

$$\begin{cases} |x - y| \leqslant 1, \\ |x + y| \leqslant 1, \end{cases}$$

и определите ее площадь.

С—40. Последовательности (пп. 15, 30Д)

1. Последовательность (c_n) задана формулой n-го члена:

а) $c_n = n^2 - 2n$; б) $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Найдите c_7, c_{10}, c_{100}, c_{n+1}.

2. Вычислите первые пять членов последовательности (a_n) и изобразите их точками на координатной прямой, если:

а) $a_n = -n$; б) $a_n = 1{,}5n$; в) $a_n = n^2 - 10$.

3. Последовательность (b_n) задана формулой:

а) $b_n = 2n - 3$; б) $b_n = \frac{1}{5}n^2$; в) $b_n = (-1)^n \cdot 5$.

Найдите первые пять членов этой последовательности и изобразите их точками на координатной плоскости. Где расположены эти точки?

4. Выпишите первые пять членов последовательности (b_n), если:

а) $b_1 = 4$, $b_{n+1} = b_n + 3$;
б) $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ $(n > 2)$.

5. Выпишите первые пять членов последовательности (u_n) натуральных чисел, дающих при делении на 5 остаток 2, взятых в порядке возрастания. Задайте эту последовательность формулой n-го члена.

6. Последовательность (a_n) задана формулой
$a_n = n^2 - 24n + 126$.
Является ли членом последовательности указанное число и если да, то каков номер этого члена:
а) 5; б) 7; в) 101; г) 126?

7. Укажите номера отрицательных членов последовательности (b_n), если
$$b_n = n^2 - 7n + 6,$$
и вычислите эти члены.

С—41. Формула n-го члена арифметической прогрессии (п. 16)

1. В арифметической прогрессии $a_5 = -2$, $a_8 = 10$. Найдите a_1 и d.

2. Найдите обозначенные буквами члены арифметической прогрессии
$$a_1,\ a_2,\ 15,\ a_4,\ a_5,\ 33,\ a_7,\ \ldots .$$

3. Артель изготовила в январе 118 изделий, а в каждый следующий месяц она изготавливала на 8 изделий больше, чем в предыдущий. Сколько изделий изготовила артель в марте; в декабре?

4. Встретится ли среди членов арифметической прогрессии
$$9{,}2,\ 8{,}7,\ 8{,}2,\ \ldots$$
число:
а) 7,2; б) 0; в) −0,8?

5. Между числами 8 и 26 вставьте пять чисел, которые вместе с данными числами составят арифметическую прогрессию.

6. Найдите номер первого положительного члена арифметической прогрессии

$$-4{,}5,\quad -4{,}1,\quad -3{,}7,\ \dots .$$

7. В арифметической прогрессии $a_5 = 4a_1$. Докажите, что $\frac{a_8}{a_3} = 2{,}5$.

8. Могут ли быть членами одной арифметической прогрессии (не обязательно соседними) числа:

а) $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{192}$; б) 5, $\sqrt{5}$, 10?

С—42. Формула суммы первых *n* членов арифметической прогрессии (п. 17)

1. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии

$$15{,}4,\quad 13{,}8,\quad 12{,}2,\ \dots .$$

2. Найдите сумму:

а) всех двузначных чисел, больших 50;

б) всех натуральных чисел, кратных 6 и не превышающих 70.

3. Найдите сумму первых двенадцати членов арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = 3$, $a_{15} = 31$; б) $a_5 = 6$, $a_{12} = 27$.

4. Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии

$$6{,}5,\quad 5,\quad 3{,}5\ \dots .$$

5. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, в которой $S_3 = 42$, $S_7 = 140$.

6. Из пункта A выехал велосипедист со скоростью 15 км/ч. Спустя 3 ч вслед ему отправился мотоциклист, который в первый час проехал 20 км, а в каждый следующий час проезжал на 1 км больше, чем в предыдущий. Сколько часов потребовалось мотоциклисту, чтобы догнать велосипедиста?

7. Решите уравнение, в котором слагаемые в сумме, записанной в левой части, составляют арифметическую прогрессию:

а) $2 + 5 + 8 + \dots + x = 155$;

б) $56 + 50 + 44 + \dots + x = 280$.

8. В арифметической прогрессии (a_n) найдите a_1 и d, если известно, что $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$ и $S_5 = 40$.

С—43. Свойства арифметической прогрессии (пп. 16, 17, 31Д)

1. Является ли арифметической прогрессией последовательность (a_n), заданная формулой:

   а) $a_n = 1{,}3n + 2$; б) $a_n = n(n-1)$; в) $a_n = \frac{n+4}{3}$?

   При положительном ответе укажите первый член и разность прогрессии.

2. Четыре числа составляют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа, если известно, что сумма первых трех из них равна 6, а сумма трех последних равна 12.

3. Найдите натуральное число, которое в 6 раз меньше суммы предшествующих ему натуральных чисел.

4. Является ли арифметической прогрессией последовательность (c_n), сумма первых n членов которой вычисляется по формуле:

   а) $S_n = 4n^2 + 2n$; б) $S_n = 2n^2 + 3$?

   При положительном ответе укажите первый член и разность прогрессии.

5. Изобразите на координатной плоскости первые пять членов арифметической прогрессии 0, 2, 4, ... Напишите уравнение прямой, на которой лежат построенные точки.

6. Пусть (c_n) — некоторая последовательность, а (S_n) — последовательность сумм первых n ее членов. Докажите, что если члены последовательности (c_n) изображаются на координатной плоскости точками, принадлежащими прямой $y = 2x + 3$, то члены последовательности (S_n) изображаются точками, принадлежащими параболе $y = x^2 + 4x$.

С—44. Формула *n*-го члена геометрической прогрессии (п. 18)

1. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

   а) b_5, если $b_1 = 72$, $q = \frac{1}{3}$; б) b_1, если $b_6 = -\frac{1}{81}$, $q = -\frac{1}{9}$.

2. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), в которой:

   а) $b_8 = 172$, $b_{11} = 2\frac{11}{16}$; б) $b_{12} = -1458$, $b_{15} = 54$.

3. Определите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что разность между ее пятым

и третьим членами равна 360, а разность между четвертым и вторым членами равна 180.

4. Между числами 75 и $\frac{3}{125}$ вставьте три числа так, чтобы они вместе с данными числами составили геометрическую прогрессию.

5. Второй и пятый члены геометрической прогрессии соответственно равны 24,5 и 196. Найдите члены прогрессии, заключенные между ними.

6. Геометрическая прогрессия состоит из девяти членов. Сумма первых трех членов равна 21, а сумма последующих трех членов равна 168. Найдите сумму последних трех членов.

7. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 140, а сумма средних членов равна 60. Найдите эти числа.

С—45. Формула суммы первых *n* членов геометрической прогрессии (п. 19)

1. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии:

   а) $18, -6, 2, \ldots$; б) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots$.

2. Последовательность (a_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

   а) S_6, если $a_1 = 256$, $q = \frac{1}{4}$; б) S_4, если $a_1 = 5$, $q = -2$.

3. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (b_n), в которой:

   а) $b_4 = 9$, $b_5 = 27$; б) $b_3 = \frac{1}{2}$, $b_5 = 2$, $q > 0$.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (a_n), если известно, что $\frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} = 3$ и сумма первых трех членов прогрессии равна 26.

5. Найдите первый член геометрической прогрессии, в которой:

   а) $q = \frac{3}{4}$, $S_4 = 350$; б) $q = 2$, $S_6 = 441$.

6. В геометрической прогрессии (a_n):

   а) найдите q и n, если $a_1 = 7$, $a_n = 567$, $S_n = 847$;

   б) найдите n и a_n, если $a_1 = 64$, $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = 43$.

7. Разность между пятым и третьим членами геометрической прогрессии равна 240, а между четвертым и вторым членами равна 60. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

С—46. Свойства геометрической прогрессии (пп. 18, 19, 31Д)

1. Найдите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n) и изобразите их на координатной плоскости, если известно, что $b_6 = 4$, $b_8 = 16$ и $q < 0$, где q — знаменатель прогрессии.

2. Является ли геометрической прогрессией последовательность (a_n), заданная формулой:

   а) $a_n = 3^{n+5}$; б) $a_n = -2 \cdot 5^n$; в) $a_n = 2^n - 3$?

3. В геометрической прогрессии с положительными членами $S_2 = 8$, $S_3 = 26$. Найдите S_5.

4. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 49. Если из первого числа вычесть 1, второе оставить без изменения, а из третьего вычесть 6, то полученные числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

5. Найдите четыре целых числа, из которых первые три составляют арифметическую прогрессию, а последние три составляют геометрическую прогрессию, причем сумма средних чисел равна 20, а сумма крайних чисел равна 22.

6. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма их квадратов равна 91. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

С—47. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$ (п. 20)

1. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, проверив предварительно, что ее знаменатель удовлетворяет условию $|q| < 1$:

   а) $\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$; б) 0,7, −0,07, 0,007, … .

2. Найдите первые два члена бесконечной геометрической прогрессии по известным знаменателю q и сумме S:

   а) $q = -\frac{2}{7}$, $S = 14$; б) $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $S = \sqrt{2} + 1$.

3. Представьте в виде обыкновенной дроби число:

   а) 0,(4); б) 0,(12); в) 0,2(6); г) 0,14(3).

4. Второй член бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q, где $|q| < 1$, равен 21, а сумма прогрессии равна 112. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

5. Известно, что сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q, где $|q| < 1$, равна 81, а сумма первых трех членов этой прогрессии равна 78. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

6. Сторона квадрата равна 16 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата, середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего и т. д. Найдите сумму площадей всех таких квадратов.

С—48. Применение метода математической индукции в задачах на последовательности (п. 32Д)

1. Последовательность (a_n) задана формулой
$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$
Докажите, что сумма первых n членов этой последовательности может быть вычислена по формуле $S_n = \frac{n}{2n+1}$.

2. Последовательность задана рекуррентным способом:
$$b_1 = 2,\ \ b_{n+1} = b_n + 10n + 5.$$
Докажите, что эта последовательность может быть задана формулой $b_n = 5n^2 - 3$.

3. Докажите, что если $b_1 = 5$, $b_{n+1} = 2b_n - 3$, то последовательность (b_n) может быть задана формулой $b_n = 2^n + 3$.

4. Докажите, что любой член последовательности (a_n) делится на 6, если:
а) $a_n = n^3 + 35n$; б) $a_n = n^3 + 23n$.

5. Последовательность (c_n) задана формулой $(c_n) = 5^n - 1$. Докажите, что все члены последовательности кратны 4.

6. Докажите, что при делении на 6 любого члена последовательности
$$13,\ 13^2,\ 13^3,\ \ldots,\ 13^n,\ \ldots$$
в остатке получается 1.

7. Выведите формулу суммы первых n членов последовательности

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}, \ldots$$

и докажите ее справедливость, пользуясь методом математической индукции.

С—49. Возрастающие и убывающие последовательности (п. 33Д)

1. Является ли возрастающей или убывающей последовательность (x_n), в которой член x_n равен:

а) остатку от деления n на 8;

б) числу, противоположному n?

2. Найдите первые пять членов последовательности (u_n), заданной формулой $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Докажите, что последовательность (u_n) возрастающая.

3. Найдите первые пять членов последовательности (b_n), где $b_n = \frac{3n+5}{n}$. Выскажите предположение о характере изменения членов последовательности. Проведите доказательство.

4. Выясните, является ли возрастающей или убывающей последовательность (a_n), если:

а) $a_n = -6n + 4$; б) $a_n = 7^n$; в) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

5. Укажите наименьший и наибольший члены последовательности (c_n), если они существуют, зная, что:

а) $c_n = 12n - 1$; б) $c_n = \frac{5}{n}$; в) $c_n = n^2 + 2$.

6. При каких значениях a последовательность (u_n), где $u_n = \frac{4n+a}{n+1}$, является:

а) возрастающей; б) убывающей?

С—50. Ограниченные и неограниченные последовательности (п. 34Д)

1. Является ли ограниченной сверху или ограниченной снизу последовательность:

а) двузначных чисел, взятых в порядке возрастания;

б) натуральных степеней числа 2, взятых в порядке возрастания;

в) остатков, полученных от деления номера члена последовательности на 4?

2. Докажите, что последовательность (c_n), где $c_n = \frac{n+2}{n+5}$, является возрастающей и ограниченной сверху.

3. Докажите, что последовательность (x_n), где $x_n = \frac{n+8}{n+3}$, является убывающей и ограниченной снизу.

4. Является ли ограниченной последовательность (c_n), если:

а) $c_n = \frac{5n+2}{n}$; б) $c_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n$; в) $c_n = 2n - 3$?

5. Докажите, что последовательность (u_n), где $u_n = n^2 - 8n + 17$, ограничена снизу и не ограничена сверху.

6. Укажите, если возможно, какой-либо числовой промежуток $(a; c)$, где a и c — некоторые числа, которому принадлежат все члены последовательности (b_n), если:

а) $b_n = \frac{n}{n+6}$; б) $b_n = \frac{5n^2}{n^2+1}$; в) $b_n = \frac{1}{5^n}$.

С—51. Сходящиеся последовательности (п. 35Д)

1. Является ли сходящейся последовательность:

а) $3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots$;

б) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$;

в) $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n^2}, \ldots$?

2. К какому числу сходится последовательность (c_n), если:

а) $c_n = 12 + \frac{1}{n}$; б) $c_n = 15 - \frac{1}{n^2}$; в) $c_n = \frac{1}{7n}$?

3. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Укажите наименьший из номеров членов последовательности, для которых выполняется неравенство $|x_n - 2| < 0{,}1$.

4. Вычислите первые шесть членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = \frac{3n+1}{n}$, и изобразите их точками на координатной прямой. Какое предположе-

ние о пределе последовательности (a_n) можно сделать? Проведите доказательство.

5. Пользуясь определением предела, докажите, что:

а) $\lim \frac{4n+1}{n} = 4$; б) $\lim \frac{n}{5n+1} = \frac{1}{5}$.

6. Последовательность (a_n) получается путем отбрасывания в бесконечной периодической десятичной дроби 0,666... всех десятичных знаков после запятой, кроме одного, кроме двух, кроме трех и т. д., т. е.

$a_1 = 0{,}6,\ a_2 = 0{,}66,\ a_3 = 0{,}666,\ \ldots,\ a_n = 0,\underbrace{66\ldots6}_{n \text{ раз}},\ \ldots$.

Докажите, что $\lim a_n = \frac{2}{3}$.

С—52. Функция $y = x^n$ (п. 22)

1. Постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{4}x^4$; б) $y = \frac{1}{4}(x-2)^4$.

2. Зная, что $f(x) = x^{80}$, сравните:

а) $f(2)$ и $f(5)$; в) $f(-58)$ и $f(58)$;

б) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ и $f\left(\frac{3}{7}\right)$; г) $f\left(-\frac{2}{5}\right)$ и $f\left(-\frac{5}{8}\right)$.

3. Пусть $g(x) = x^{73}$. Сравните:

а) $g(12)$ и $g(15)$; в) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $g\left(\frac{1}{2}\right)$;

б) $g(-2)$ и $g(-5)$; г) $g\left(\frac{3}{4}\right)$ и $g\left(-\frac{3}{4}\right)$.

4. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x^{100} = 2$; б) $x^{99} = 2$; в) $x^{48} = -2$?

5. Изобразите схематически график функции:

а) $y = |x^3|$; б) $y = \frac{1}{2}|x^4 - 1|$.

6. Решите уравнение: а) $x^3 = 4x$; б) $x^4 = 4x$.

7. Принадлежит ли графику функции $y = x^{10}$ точка:

а) $A(2;\ 1024)$; б) $B\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{1024}\right)$; в) $C(-6;\ 6\ 046\ 674)$?

С—53. Определение корня n-й степени (п. 23)

1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{0{,}36}$; б) $\sqrt[3]{729}$; в) $\sqrt[3]{-216}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0016}$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{39\frac{1}{16}}$; б) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}-\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$.

3. Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{20}$; в) $\sqrt[4]{0,5}$; г) $\sqrt[4]{1,6}$.

4. Сравните числа:

а) $\sqrt{0,5}$ и $\sqrt[3]{0,5}$; в) $\sqrt{1,2}$ и $\sqrt[3]{1,2}$;
б) $\sqrt[3]{0,5}$ и $\sqrt[4]{0,5}$; г) $\sqrt[3]{1,2}$ и $\sqrt[4]{1,2}$.

5. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt[4]{x}$; б) $y=\sqrt[3]{|x|}$; в) $y=\sqrt[4]{x-1}$; г) $y=\sqrt[4]{1-x}$.

6. Найдите корни уравнения $\sqrt[3]{|x|-2}=1$.

7. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt[4]{x+3}$; в) $y=\sqrt{x-x^2}$;
б) $y=\sqrt[5]{x+3}$; г) $y=\sqrt[3]{x^2-x}$.

8. Решите уравнение:

а) $x^3=7$; б) $x^6=4$; в) $x^8-x^4-20=0$.

9. Постройте график уравнения: а) $x=\sqrt{y}$; б) $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}$.

С—54. Свойства арифметического корня (п. 24)

1. Докажите тождество:

а) $\sqrt{a^2}=|a|$; б) $\sqrt[3]{b^3}=b$; в) $\sqrt[4]{c^4}=|c|$.

2. Представьте выражение в виде одночлена:

а) $\sqrt{16a^4b^2}$, если $b\geqslant 0$; в) $\sqrt[4]{81a^4b^{12}}$, если $a\geqslant 0$, $b<0$;
б) $\sqrt{9a^2b^8}$, если $a\leqslant 0$; г) $\sqrt[5]{32a^{12}b^{15}}$.

3. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{625\cdot 0,0016}$; в) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$;
б) $\sqrt[5]{\frac{3^{10}\cdot 5^5}{4^5}}$; г) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{5})^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{5}}$.

4. Представьте выражение в виде произведения, вынеся из-под знака корня множитель:

а) $\sqrt{3a^4}$; б) $\sqrt[3]{27b^2}$; в) $\sqrt[4]{80c^5}$; г) $\sqrt[4]{-49x^5}$, где $x<0$.

5. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\sqrt{\dfrac{5a}{16}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{a^6}{27b^4}}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{32x^5}{y^4}}$, где $y < 0$; г) $\sqrt[5]{\dfrac{a^5b^{10}}{243c^{15}}}$.

6. Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, если $a \geqslant 0$; б) $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$, если $a \leqslant 0$.

7. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{4x^3}$, если $x < 0$; б) $\sqrt[4]{5a^4b^{12}}$, если $a < 0$, $b < 0$.

8. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^6}}$, где $a \geqslant 0$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$; г) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16b^6}}$, где $b < 0$.

9. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 0$; б) $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 20 = 0$; в) $\sqrt{x} + 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0$.

10. Представьте выражение $\sqrt{\dfrac{1}{a} + \dfrac{5}{a^2}}$ в виде дроби и найдите значение выражения при:

а) $a = 4$; б) $a = -4$.

С—55. Определение степени с дробным показателем (п. 25)

1. Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

а) $21^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $18^{-\frac{1}{4}}$; в) $3x^{\frac{1}{3}}$; $-5y^5$; $(6d)^{0,25}$;

б) $x^{\frac{2}{3}}$; $y^{-\frac{3}{5}}$; $p^{\frac{4}{9}}$; г) $(x-2)^{\frac{1}{2}}$; $(x+3)^{-\frac{1}{4}}$; $(y-5)^{1,5}$.

2. Замените арифметический корень степенью с дробным показателем:

а) $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt{5^{-1}}$; $\sqrt[3]{6^{-2}}$; $\sqrt[7]{4^2}$;

б) $\sqrt[3]{x^2}$; $\sqrt[5]{y^3}$; $\sqrt[6]{8c^3}$; г) $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[8]{y^3}$; $\sqrt[5]{(a+y)^2}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $16^{\frac{1}{2}}$; б) $125^{\frac{2}{3}}$; в) $3 \cdot 16^{-\frac{1}{2}}$; г) $4 \cdot \left(1\dfrac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$.

4. Найдите область определения функции:

а) $y = (x-3)^{\frac{1}{4}}$; б) $y = (x+5)^{\frac{1}{3}}$.

5. Постройте график функции:

а) $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}$; б) $y = (x-2)^{\frac{1}{3}}$.

6. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$; б) $1{,}5^{\frac{1}{2}}$; $1{,}5^{\frac{1}{4}}$; $1{,}5^{\frac{1}{5}}$; $1{,}5^{\frac{1}{3}}$.

7. Оцените значение выражения $x^{\frac{1}{4}}$, если:

а) $0 < x < 16$; б) $1 < x < 81$; в) $0{,}0001 < x < 1$.

С—56. Свойства степени с рациональным показателем (п. 26)

1. Представьте в виде степени:

а) $x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$; в) $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{2}{3}}$; г) $\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^0$.

2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2 a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{15}}}{a^{\frac{4}{15}}}$; б) $\dfrac{b^{0,5} b^{1,5} \cdot \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{0,75}}{b^{2,8} b^{-3,2}}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $0{,}5^{-0,5} \cdot 4^{0,25} - 32^{0,4} \cdot 16^{-0,75}$; б) $\dfrac{125^{\frac{1}{3}} \cdot 625^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-0,75}}{0{,}5^{-0,25} \cdot 0{,}25^{-0,5}}$.

4. Представьте выражение в виде квадрата и в виде куба, если $b > 0$:

а) b^5; б) b; в) $b^{\frac{1}{2}}$; г) $b^{\frac{1}{5}}$.

5. Решите уравнение:

а) $x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 6 = 0$; б) $y - 21y^{\frac{1}{3}} - 20 = 0$.

6. Постройте график функции:

а) $y = \left|(x+1)^{\frac{1}{2}} - 1\right|$; б) $y = (|x| - 2)^{\frac{1}{2}}$.

7. Представьте выражение в виде суммы квадратов:

$$a^{\frac{2}{3}} + 4a^{\frac{1}{2}} + 6a^{\frac{1}{3}} + 4a^{\frac{1}{6}} + 2.$$

8. Постройте график уравнения:

а) $x = y^{\frac{1}{3}}$; б) $x^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$.

С—57. Преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями (п. 27)

1. Разложите на множители:

а) $x - 2x^{\frac{1}{2}}$; б) $y^{0,5} + 3y^{0,25}$; в) $a^{\frac{2}{3}} - 4b^{\frac{2}{3}}$; г) $c^{\frac{3}{4}} + 8d^{\frac{3}{4}}$.

2. Представьте выражение в виде степени с натуральным показателем:

а) $a^{\frac{1}{2}} + 4a^{\frac{1}{4}} + 4$;

б) $x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{2}{5}}y^{0,1} + 10x^{0,3}y^{\frac{1}{5}} - 10x^{\frac{1}{5}}y^{0,3} + 5x^{0,1}y^{\frac{2}{5}} - y^{\frac{1}{2}}$.

3. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a - 9x}{a^{0,5} + 3x^{0,5}}$; в) $\dfrac{b - y}{b^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}}$; д) $\dfrac{x - 3x^{0,8}}{5x^{0,5} - 15a^{0,3}}$;

б) $\dfrac{x^{1,5} + 27}{x - 3x^{0,5} + 9}$; г) $\dfrac{a - b}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}}$; е) $\dfrac{3x^{\frac{1}{2}} + 6}{x - x^{\frac{1}{2}} - 6}$.

4. Представьте выражение в виде степени с основанием b:

а) $b\sqrt{b\sqrt[3]{b}}$; б) $\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}$; в) $\sqrt[4]{b^2\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}$.

5. Докажите, что значение выражения

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot (4 + \sqrt{8})^{\frac{1}{3}} \cdot (3 - 2\sqrt{2})^{\frac{1}{6}}$$

является целым числом.

6. Упростите выражение:

а) $\dfrac{b^{\frac{1}{2}} - 4}{b - 2b^{\frac{1}{2}} - 8} \cdot \left(\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{2b^{\frac{1}{2}} - 8} - \dfrac{b + 16}{2b - 32} + \dfrac{4}{b + 4b^{\frac{1}{2}}} \right)$;

б) $\dfrac{a^{\frac{6}{7}} + a^{\frac{5}{7}} + a^{\frac{4}{7}} + a^{\frac{3}{7}}}{a^{\frac{3}{7}} + a^{\frac{2}{7}} + a^{\frac{1}{7}} + 1}$.

7. Постройте график функции:

а) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; б) $y = \left|\sqrt{|x|} - 3\right|$.

С—58. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса (п. 28)

1. Найдите значение выражения:

а) $7 \sin 0° + 4 \cos 90° - \text{tg } 45°$;
б) $3 \cos 180° + 2 \sin 180° + \text{tg } 0°$;
в) $5 \text{ tg } 360° + 2 \sin 90° - 3 \cos 270°$.

2. Верно ли неравенство:

а) $\sin 60° + \sin 45° > 1$; в) $\sin 45° + \sin 60° > 2$;
б) $\cos 60° - \cos 45° < 0$; г) $\sin 90° - \sin 30° < \dfrac{3}{4}$?

3. Может ли синус угла принимать значение, равное:

а) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; б) $\sqrt{3}-1$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; г) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

4. Известно, что $\alpha = 30°$. Найдите:

а) $\sin \alpha$; б) $\sin 2\alpha$; в) $2 \sin \alpha$; г) $\sin^2 \alpha$.

5. Найдите значение выражения:

а) $\sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha + 3 \sin (\alpha + 30°)$ при $\alpha = 60°$;
б) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 2\alpha$ при $\alpha = 45°$;
в) $\sin 2\alpha + 2 \sin \alpha - \sin (\alpha + 30°)$ при $\alpha = 30°$.

6. Укажите наименьшее и наибольшее значения выражения:

а) $5 + \sin x$; б) $4 \cos x + 1$; в) $2 + \cos^2 x$.

7. Укажите три каких-либо значения α, при которых:

а) $\sin \alpha = 0$; б) $\cos \alpha = 1$; в) $\sin \alpha = -1$.

С—59. Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса (п. 29)

1. Определите знак выражения:

а) $\sin 115° \cdot \cos 205°$; в) $\sin 206° + \cos 110°$;
б) $\cos 91° \cdot \operatorname{ctg} 105°$; г) $\cos 127° - \sin 127°$.

2. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha < 0$; б) $\sin \alpha > 0$ и $\operatorname{tg} \alpha > 0$?

3. Найдите значение выражения:

а) $2 \sin (-30°) + \cos (-60°) - 4 \operatorname{tg} (-45°)$;
б) $\sqrt{3} \sin (-60°) - 4 \cos (-60°) + 6\sqrt{3} \operatorname{ctg} (-30°)$.

4. Вычислите:

а) $4 \sin 390° + 2 \cos 420° - \operatorname{tg} 765°$;
б) $5 \sin 450° - 3 \cos 720° + 6 \operatorname{tg} 405°$.

5. Известно, что $90° < \alpha < 180°$. Сравните с нулем значение выражения:

а) $\sin \alpha \cos^2 \alpha$; б) $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$; в) $\sin \alpha - \cos \alpha$.

6. Зная, что $\sin \alpha = a$, найдите:

а) $1 + \sin (-\alpha)$; б) $\sin (\alpha + 720°)$; в) $\sin (360° - \alpha)$.

7. Какой координатной четверти принадлежит угол α, если

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 1{,}01?$$

Ответ обоснуйте.

С—60. Радианная мера угла (п. 30)

1. Найдите радианную меру угла, равного:
а) $60°$; б) $72°$; в) $75°$; г) $150°$; д) $210°$.

2. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:
а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{7}{6}\pi$; г) $1\frac{2}{3}\pi$; д) 3π.

3. Углы треугольника пропорциональны числам 1, 2, 7. Найдите их радианную меру.

4. Имеет ли смысл выражение:
а) $\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{-\cos\alpha}$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;
б) $\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{-2\sin\alpha}}$, если $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$?

5. Определите знак выражения:
а) $\sin\frac{6\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$;
б) $\sin\frac{7\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$;
в) $\sin 1\cdot\cos 2$;
г) $\sin\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{8}$;
д) $\sin\frac{7\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{3}$;
е) $\sin 2+\cos\frac{\pi}{5}$.

6. Верно ли, что:
а) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}<1{,}5$; б) $\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}<0{,}75$?

7. Найдите значение выражения:
а) $7\cos\frac{\pi}{2}-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+3\sin\frac{\pi}{6}-4\cos\pi$;
б) $\frac{5\sin^2\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{6}}{3\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;
в) $\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{3\sin\frac{\pi}{6}-\cos(-\pi)}$;
г) $\frac{4\sin\frac{\pi}{6}-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{\cos(-\pi)-\cos 0}$.

С—61. Выражение тригонометрических функций угла через одну из них (п. 31)

1. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если известно, что:

а) $\sin\alpha = -\frac{9}{41}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
б) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
в) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
г) $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}4$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Используя калькулятор,вычислите (с точностью до 0,1) значения тригонометрических функций угла β, если известно, что:

а) $\sin\beta = 0{,}7$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;
б) $\cos\beta = -0{,}9$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;
в) $\operatorname{tg}\beta = 2{,}1$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;
г) $\operatorname{ctg}\beta = -7{,}3$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

3. Могут ли:

а) синус и косинус некоторого угла равняться соответственно $\frac{a}{1+a}$ и $\frac{\sqrt{1+2a}}{1+a}$, где $a > -\frac{1}{2}$;

б) тангенс и котангенс некоторого угла равняться соответственно $\frac{2b}{\sqrt{17}-1}$ и $\frac{8}{b\sqrt{17}+b}$, где $b \neq 0$?

4. Зная, что $\sin\alpha = 1 - a^2$ и $90° < \alpha < 180°$, найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. Укажите область допустимых значений a.

5. Известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = b$. Выразите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через b.

6. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{6}$, найдите значение выражения

$$\frac{6\sin\alpha + 5\cos\alpha}{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}.$$

С—62. Применение основных тригонометрических формул в преобразованиях (пп. 31, 32)

1. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}^2\beta$;
б) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$;
в) $\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha$;
г) $\operatorname{ctg}^2\beta + \cos^2\beta - \frac{1}{\sin^2\beta}$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\alpha + \cos\alpha)$, если $\sin\alpha = -0{,}3$;
б) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$;

в) $\dfrac{5\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}2$.

3. Укажите наименьшее и наибольшее значения выражения:
а) $3\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$; б) $3 - \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$.

4. Докажите, что при всех допустимых значениях α верно равенство:
а) $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \cos\alpha = 1$; б) $\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} = 0$.

5. Зная, что $\sin\alpha = \dfrac{1}{7}$, найдите значение выражения:
а) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha\cos^4\alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}$.

6. Докажите тождество:
а) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = -\cos^2\alpha$;
б) $\dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = -2\operatorname{tg}\alpha$.

7. Верно ли, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2$, если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$?

С—63. Преобразование тригонометрических выражений (п. 32)

1. Упростите выражение:
а) $\dfrac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$;
б) $\dfrac{(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

2. Известно, что $\sin\alpha = b$. Выразите через b:
а) $\cos^2\alpha$; б) $\cos^4\alpha$; в) $\cos^6\alpha$.

3. Докажите тождество:
а) $\dfrac{2\cos^4\alpha + 6\sin^2\alpha}{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha + 1} = 2$; б) $\dfrac{1 - (\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

4. Зная, что $\sin\alpha - \cos\alpha = 1{,}2$, найдите:
а) $\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$.

5. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = 0{,}3$, найдите:
а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha$.

6. Докажите, что
$$\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = 2\operatorname{ctg}\alpha \text{ при } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

7. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $3\cos^4\alpha - 3\sin^4\alpha$; б) $\dfrac{0{,}5 - 0{,}5\cos^4\alpha}{1+\cos^2\alpha}$.

С—64. Формулы приведения (п. 33)

1. Вычислите:

а) $\sin 420°$; д) $\sin\dfrac{7\pi}{6}$; и) $\sin(-210°)$;

б) $\cos 150°$; е) $\cos\dfrac{5\pi}{6}$; к) $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$;

в) $\operatorname{tg} 135°$; ж) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}$; л) $\operatorname{tg}(-225°)$;

г) $\operatorname{ctg} 405°$; з) $\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$; м) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

2. Замените тригонометрической функцией угла α:

а) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; г) $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $\cos(\pi-\alpha)$; д) $\cos(\alpha-2\pi)$;

в) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$; е) $\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\cos 420° + 2\sin 750° - 3\operatorname{tg} 225°$;

б) $\sin\dfrac{2\pi}{3} - \cos\dfrac{13\pi}{6} + 6\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$;

в) $3\operatorname{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + 4\cos\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right) - 8\operatorname{tg}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

4. Упростите выражение:

а) $1 + \sin(\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha+\pi)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

5. Докажите тождество:

а) $\sin(\pi-\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha) - \dfrac{1}{\cos(2\pi-\alpha)} = -\cos\alpha$;

б) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\alpha-2\pi)\sin(\alpha-2\pi)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = \sin^2\alpha$.

6. Зная, что $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$, найдите тригонометрические функции смежного угла, если:

а) α — острый угол; б) α — тупой угол.

7. Известно, что A, B и C — углы треугольника. Верно ли, что:

а) $\sin(A + B) = \sin C$; б) $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$?

С—65. Формулы сложения (п. 34)

1. Вычислите с помощью формул сложения:

а) $\sin 105°$; б) $\cos\frac{5\pi}{12}$; в) $\sin(-15°)$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\sin 11° \cos 19° + \sin 19° \cos 11°$;

б) $\cos 41°30' \cos 18°30' - \sin 41°30' \sin 18°30'$;

в) $\sin\frac{13\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} - \cos\frac{13\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}$.

3. Найдите:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, если $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

4. Зная, что $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, найдите:

а) $\sin(\alpha + \beta)$; б) $\cos(\alpha - \beta)$.

5. Пользуясь формулами сложения, проверьте, что:

а) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$.

6. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{6}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$, найдите:

а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

7. Известно, что $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{9}{41}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\cos\beta$.

С—66. Применение формул сложения в преобразованиях (п. 34)

1. Упростите выражение:

а) $\cos 7\alpha \cos 2\alpha - \sin 7\alpha \sin 2\alpha$;

б) $\cos\left(\frac{2\pi}{5} - \alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{5} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{5} - \alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{5} + \alpha\right)$;

в) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$.

2. Косинусы двух углов треугольника равны соответственно $\frac{12}{13}$ и $\frac{3}{5}$. Найдите косинус третьего угла.

3. Докажите тождество:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha=\cos\alpha$;

б) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\sin^2\beta=\sin^2\alpha$;

в) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$.

4. Докажите, что:

а) $\cos 10^\circ\cos 20^\circ+\cos 70^\circ\cos 80^\circ=\cos 10^\circ$;

б) $\sin 25^\circ\sin 72^\circ-\sin 18^\circ\sin 65^\circ=\sin 7^\circ$.

5. Зная, что $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2}{3}$, найдите:

а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$.

6. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=1\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=9$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Определите величину угла $\alpha+\beta$.

С—67. Формулы двойного угла (п. 35)

1. Вычислите:

а) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$;

б) $4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;

в) $6\sin 75^\circ\cos 75^\circ$;

г) $\cos^2 165^\circ-\sin^2 165^\circ$;

д) $\sqrt{2}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sqrt{2}\sin^2\frac{\pi}{8}$;

е) $(\sin 195^\circ-\cos 195^\circ)^2$.

2. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3. Известно, что $\cos\alpha=\frac{24}{25}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найдите $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}$; б) $\dfrac{\cos 116^\circ}{\sin 58^\circ+\cos 58^\circ}$; в) $\dfrac{\sin 110^\circ}{\cos 35^\circ}$.

5. Упростите выражение:

а) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$;

б) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$;

в) $4\cos^4\alpha+\sin^2 2\alpha$;

г) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\cos 2\alpha$.

6. Докажите тождество:

а) $(1 + \cos 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha = \sin 2\alpha$;

б) $\cos 2\alpha - (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + 2\sin^2\alpha = \sin^2\alpha$;

в) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

7. Существует ли угол α, для которого:

а) $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{5}{9}$; б) $2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = 2{,}06$?

С—68. Применение формул двойного угла в преобразованиях (п. 35)

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $6\cos^4\alpha - 6\sin^4\alpha$; б) $1 - 8\sin\alpha\cos\alpha$.

2. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\dfrac{7}{25}$. Определите синус и косинус угла при вершине.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\sin^2\alpha}$; б) $\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{12}}$;

в) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)-\sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

4. Найдите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{2}{7}$;

б) $\sin\alpha$, если $\sin\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{6}$.

5. Зная, что $\sin\alpha = a$, выразите $\sin 3\alpha$ через a.

6. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$; б) $\dfrac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

7. Докажите, что:

а) $8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = 1$;

б) $\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{4\pi}{5} = -\dfrac{1}{4}$.

С—69. Формулы суммы и разности тригонометрических функций (п. 36)

1. Представьте в виде произведения:
   а) $\sin 46° - \sin 14°$; в) $\cos (60° + \alpha) - \cos \alpha$;
   б) $\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{12}$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

2. Найдите значение выражения:
   а) $\frac{\cos 78° - \cos 12°}{\sin 78° - \sin 12°}$; б) $\frac{\sin 126° + \sin 114°}{\cos 126° + \cos 114°}$.

3. Преобразуйте в произведение:
   а) $\sin 18° + \cos 64°$; в) $\sin 104° - \cos 24°$;
   б) $\cos 6° + \sin 86°$; г) $\cos 48° - \sin 16°$.

4. Упростите выражение:
   а) $\frac{\cos 53° - \cos 17°}{\sin 53° + \sin 17°}$; б) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}$;
   в) $\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha + \sin 13\alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \cos 13\alpha}$.

5. Верно ли, что:
   а) $\cos 135° + \cos 87° + \cos 15° + \cos 93° = \cos 75°$;
   б) $\sin 23° + \sin 91° + \sin 37° - \sin 89° = \cos 7°$?

6. Докажите, что:
   а) $\sin 26° + \sin 34° - \cos 4° = 0$;
   б) $\cos 87° + \cos 33° - \cos 27° = 0$.

7. Докажите тождество:
   а) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha - \beta) = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$;
   б) $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{ctg} \alpha$.

ВАРИАНТ II

С—1. Четные и нечетные функции (пп. 1Д, 2Д)

1. Докажите, что g — четная, а f — нечетная функция, если:
   а) $g(x) = 9x^6 + 5$; в) $g(x) = |x + 8| + |x - 8|$;
   б) $f(x) = 8x^7 - x^3$; г) $f(x) = |x + 7| - |x - 7|$.

2. Является ли четной или нечетной функция φ, если:

а) $\varphi(x) = x^5 + 1$;

б) $\varphi(x) = \frac{19}{x}$;

в) $\varphi(x) = x^4 + 5x^2 - 3$?

3. Постройте график функции g, зная, что при $x \geqslant 0$ ее значения могут быть найдены по формуле:

а) $g(x) = x + 0{,}5$ и g — четная функция;

б) $g(x) = \sqrt{x}$ и g — нечетная функция.

4. Известно, что функция f четная и она принимает значения, равные нулю, при $x = -8$ и $x = 11$. Укажите другие значения аргумента, при которых $f(x) = 0$.

5. Известно, что уравнение $g(x) = 0$, где g — нечетная функция с областью определения $D(f) = \boldsymbol{R}$, имеет положительные корни 5 и 7. Найдите неположительные корни уравнения.

6. Функция $y = x^2 + bx - 6$, где b — некоторое число, является четной функцией. Найдите значение b.

7. Известно, что $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — нечетные функции. Верно ли утверждение, что нечетной является функция $y = q(x)$, если:

а) $q(x) = f(x) + g(x)$; б) $q(x) = f(x) - g(x)$;

в) $q(x) = f(x) \cdot g(x)$?

8. Представьте каким-либо способом функцию $y = f(x)$ в виде суммы четной и нечетной функций, если:

а) $f(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1$; б) $f(x) = 3x$.

С—2. Монотонные функции (пп. 2, 2Д)

1. Функция g, область определения которой промежуток $[-3; 3]$, задана графиком на рисунке 7. Укажите промежутки, на которых функция g:

а) убывает;

б) возрастает.

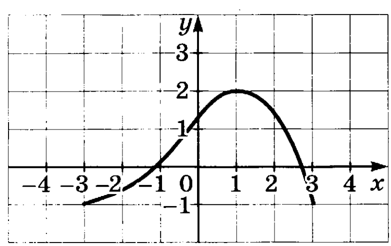


Рис. 7

2. Какая из линейных функций $y = 37 - x$ и $y = 43x + 9$ является возрастающей, убывающей и почему?

3. Докажите, что функция $f(x) = 6 - x^2$ является возрастающей на промежутке $[-\infty; 0]$ и убывающей на промежутке $[0; +\infty]$.

4. Укажите промежутки возрастания и промежутки убывания функции $y = \dfrac{5x - 11}{x - 1}$.

5. Определите характер монотонности функций $y = -x + 8$ и $y = -x^3$. Докажите, что функция $y = 8 - x - x^3$ убывающая.

6. Известно, что уравнение $f(x) = 13$, где f — монотонная функция, имеет корень, равный -2. Имеет ли это уравнение другие корни?

7. Известно, что функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $(-3; +\infty)$. При каких значениях x, принадлежащих этому промежутку, верно неравенство:

а) $f(x) > f(8 - x)$;

б) $f(x) < f(3x - 10)$?

8. Известно, что функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — убывающие. Является ли убывающей функция $y = p(x)$, если:

а) $p(x) = f(x) + g(x)$;

б) $p(x) = f(x) - g(x)$?

9. Известно, что функция f определена на множестве $(-\infty; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(m; +\infty)$, где $m > 0$. Как изменяется эта функция на промежутке $(-\infty; -m)$, если:

а) f — четная функция; б) f — нечетная функция?

С—3. Ограниченные и неограниченные функции (п. 3Д)

1. Приведите пример ограниченной функции, построив ее график.

2. Докажите, что функция $y = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$ является ограниченной. Найдите область значений функции.

3. Функция $y = 2 - |x - 3|$ является ограниченной сверху. Покажите это, построив график функции. Укажите наибольшее значение функции.

4. Докажите, что функция $y = \dfrac{1}{x - 1}$, где $D(y) = (1; +\infty)$, не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значения.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = x^2 - 4$, где $D(y) = [-5; 5]$;

б) $y = x^3 - 6$, где $D(y) = [-5; 5]$.

6. Укажите значение аргумента, при котором функция $y = \sqrt{x+2} - 4$ принимает наименьшее значение. Существует ли наибольшее значение функции?

С—4. Исследование функций элементарными способами (п. 4Д)

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{10}{x^2 - 9}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{x - 7}$; в) $y = \sqrt{x+2} + \dfrac{1}{x}$.

2. Найдите область значений функции:

а) $y = \dfrac{6}{x^2 + 1}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 16}$.

3. Укажите область значения функции

$$y = \frac{x^8 + 2x^4 + 2}{x^4 + 1}.$$

4. Найдите нули функции и области положительных и отрицательных значений, если:

а) $y = x^3 - 36x$; б) $y = \sqrt{x^2 + 5x - 14}$.

5. Найдите горизонтальные и вертикальные асимптоты графика функции, если они существуют:

а) $y = \dfrac{4x}{x - 3}$; б) $y = \dfrac{x^2 + 36}{12x}$.

6. Изобразите схематически график функции g, зная результаты исследования этой функции:

1) $D(g) = [-5; 5]$;

2) g — непрерывная четная функция;

3) $E(g) = [-2; 2]$;

4) $g(4) = 0$; $g(x) < 0$ при $x \in [0; 4)$; $g(x) > 0$ при $x \in (4; 5]$;

5) функция возрастает на промежутке $[0; 5]$;

6) для любых x_1 и x_2, таких, что $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 5$, выполняется неравенство $g\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) > \dfrac{g(x_1) + g(x_2)}{2}$.

С—5. Квадратный трехчлен и его корни (п. 3)

1. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $x^2 - 5x - 24$; б) $12x^2 + x - 35$.

2. Составьте какой-нибудь квадратный трехчлен, корнями которого являются числа:

а) -8 и 7; б) $4-\sqrt{5}$ и $4+\sqrt{5}$.

3. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

а) $x^2-10x+8$; б) $9x^2+12x+29$.

4. Докажите, что при любом a квадратный трехчлен:

а) $a^2-14a+51$ принимает положительное значение;
б) $-a^2+8a-21$ принимает отрицательное значение.

5. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{108+36b-b^2}{144}$.

6. Найдите наименьшее значение функции $y=x^2+5x$ на промежутке $[-3; 0]$.

С—6. Разложение квадратного трехчлена на множители (п. 4)

1. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $3a^2+20a-63$;
б) $-b^2+2b+15$;
в) $\dfrac{1}{14}c^2-c-28$.

2. Докажите тождество

$$\frac{(x^2-6xy-16y^2)(x-3y)}{(x^2-11xy+24y^2)(x+2y)}=1.$$

3. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2-144}{x^2-x-156}$; б) $\dfrac{4y^2-19y-30}{12y^2-13y-35}$;

в) $\dfrac{3(a-b)^2-17(a-b)-6}{5a-5b-30}$.

4. Упростите выражение

$$\frac{x^2+3x-30}{0{,}5x^2-4{,}5x-18}-\frac{x+8}{x-12}.$$

5. Найдите значение дроби

$$\frac{7y-105}{y^2-55y+600} \text{ при } y=89.$$

6. Постройте график функции $y=\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{4-x^2}$.

С—7. Функции $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$ и их графики (пп. 5, 6)

1. Функция g задана графиком (рис. 8). Постройте график функции:

а) $y = 2g(x)$; б) $y = \frac{1}{3} g(x)$.

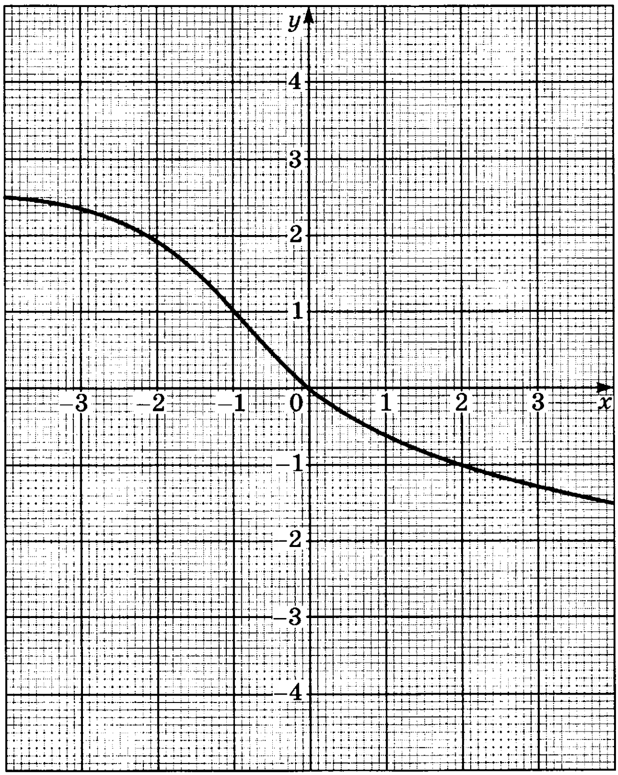


Рис. 8

2. Заполните таблицу:

x	0	1	2	3	4
$y = x^2$					
$y = \frac{1}{4}x^2$					

Учитывая свойства графика четной функции $y = x^2$, постройте график функции $y = \frac{1}{4}x^2$.

3. Принадлежит ли графику функции $y = -20x^2$ точка:
   а) $A\ (2; -80)$; в) $C\ (-4; -320)$;
   б) $B\ (-3; 180)$; г) $D\ (0{,}4; -0{,}32)$?

4. Постройте график функции:
   а) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$; в) $y = \frac{1}{3}(x+1)^2$;
   б) $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$; г) $y = \frac{1}{3}(x-2)^2$.

5. Изобразите схематически график функции:
   а) $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 1$; б) $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 - 2$.

6. Постройте график функции:
   а) $y = -2\sqrt{x}$; б) $y = 3|x|$.

С—8. Построение графика квадратичной функции (п. 7)

1. Постройте график функции:
   а) $g(x) = (x+2)^2 - 1$; б) $f(x) = (x-4)^2 + 1$.

2. Найдите ось симметрии и координаты вершины параболы:
   а) $y = x^2 - 4x + 5$; б) $y = -6x^2 + 4x - 5$.

3. Используя график функции g (задание 1а), найдите:
   а) нули функции и промежутки, в которых $g(x) < 0$ и $g(x) > 0$;
   б) промежутки возрастания и убывания функции;
   в) область значений функции и ее наименьшее значение.

4. Найдите область значений функции:
   а) $y = x^2 - 7x + 3$; б) $y = -x^2 + 8x - 5$.

5. Изобразите схематически график функции:
   а) $y = \sqrt{x-4}$; б) $y = |x| + 2$.

6. Найдите значение параметра q, при котором наименьшее значение функции $y = x^2 + 12x + q$ равно -21.

С—9. Построение графиков различных функций (п. 5Д)

1. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -x-3, & \text{если } x < -2, \\ -x^2+3, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x-3, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

2. Проведите исследование и постройте график функции
$$y = \sqrt{x^2 - 4}.$$

3. Постройте график функции $y = |x + 3| + |x - 3|$.

4. Найдите область определения функции $\dfrac{\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+3}}{\dfrac{1}{x^2-9}}$ и постройте ее график.

5. Постройте график какой-нибудь убывающей непрерывной функции g, у которой $D(g) = [-4; 4]$, $E(g) = [-5; 5]$, число 5 — наибольшее значение функции, а число -5 — наименьшее ее значение.

С—10. Графики функций $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$ (п. 7Д)

1. Постройте в системе координат отрезок KL, если известно, что $K(-2; 2)$ и $L(6; 2)$. Постройте в этой же системе координат отрезок:

   а) K_1L_1, симметричный отрезку KL относительно оси x;
   б) K_2L_2, симметричный отрезку KL относительно оси y.

2. Графиком функции f служит ломаная ABC, где $A(-4; -1)$, $B(1; 5)$, $C(4; 5)$. Постройте график функции:

   а) $y = -f(x)$; б) $y = f(-x)$.

3. Постройте график функции:

   а) $y = -|x - 2|$; б) $y = \sqrt{-x} - 3$.

4. Докажите, что график функции $y = \dfrac{5x-3}{2}$ симметричен:

   а) графику функции $y = 1{,}5 - 2{,}5x$ относительно оси x;
   б) графику функции $y = -\dfrac{5x+3}{2}$ относительно оси y.

5. Докажите, что графики функций $y = \dfrac{x-3}{x+3}$ и $y = \dfrac{x+3}{x-3}$ симметричны относительно оси y.

6. Найдите области определения функций $f(x) = \sqrt{x - 10}$, $g(x) = -\sqrt{x-10}$ и $\varphi(x) = \sqrt{-x-10}$.

7. Известно, что область определения функции $y = f(x)$ — промежуток $[-10; 5]$. Какова область определения функции:

   а) $y = -f(x)$; б) $y = f(-x)$; в) $y = -f(-x)$?

С—11. Графики функций $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$ (п. 8Д)

1. Графиком функции $y = g(x)$ является ломаная KLM, где $K(-3; 4)$, $L(0; -2)$, $M(3; 4)$. Постройте график функции $y = |g(x)|$.

2. Ломаная ABC, где $A(-6; 2)$, $B(-2; -2)$, $C(2; 2)$, — график функции $y = f(x)$. Постройте график функции $y = f(|x|)$.

3. Постройте график функции:

   а) $y = |x + 3|$; б) $y = |x^2 - 7|$; в) $y = \left|\frac{6}{x} - 4\right|$.

4. Постройте график функции:

   а) $y = |x| - 4$; б) $y = \frac{6}{|x|} - 4$; в) $y = ||x - 1| - 1|$.

5. Сколько корней имеют уравнения:

   а) $5x - 2 = 0$ и $5|x| - 2 = 0$;
   б) $x^2 - 6x = 0$ и $x^2 - 6|x| = 0$;
   в) $x^2 - 10x + 21 = 0$ и $x^2 - 10|x| + 21 = 0$;
   г) $\sqrt{x - 7} = 2$ и $\sqrt{|x| - 7} = 2$?

6. Решите уравнение:

   а) $||x - 3| - 2| = 1$; б) $x^2 - 6|x| + 5 = 0$.

С—12. Высказывания и предложения с переменными (п. 9Д)

1. Из данных высказываний выберите истинные:

   а) $\frac{2}{9} > 0{,}21$; в) $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$;
   б) $-\frac{3}{7} < -0{,}43$; г) $\sqrt{10} > \sqrt{6} - 2$.

2. Используя прикидку результата, поставьте вместо многоточия знак < или > так, чтобы получилось истинное высказывание:

   а) $(-11{,}8)^9 \cdot (-1{,}1)^6 \ldots 0$; в) $6{,}2^{11} \ldots 6{,}2^9$;
   б) $(-1{,}3)^7 \ldots -1$; г) $0{,}14^3 \ldots 0{,}14^5$.

3. Замените звездочку цифрой так, чтобы получилось истинное высказывание:

   а) число 512* кратно 12;
   б) число 45 является делителем числа 571*.

4. Укажите три пары натуральных чисел m и n, обращающих в истинное высказывание предложение:

а) сумма чисел m и n меньше 8;
б) разность чисел m и n равна 7;
в) произведение чисел m и n равно 18;
г) частное чисел m^2 и $2n$ является натуральным числом.

5. Укажите множество натуральных значений n, при которых обращается в истинное высказывание предложение:

а) число n является делителем числа 15;
б) двузначное число n кратно 19;
в) n является наибольшим трехзначным числом;
г) дробь $\frac{3+n}{5}$ правильная.

6. Существует ли целое значение k, при котором является ложным высказывание:

а) $121k + 77$ кратно 11;
б) сумма $(k-1)^2 + (k^2-1)^2$ равна 0;
в) дробь $\frac{6k+13}{k+2}$ меньше 6?

7. Укажите наименьший и наибольший элементы множества натуральных чисел m, если известно, что:

а) m — двузначное число, кратное 9 или оканчивающееся цифрой 9;
б) m является делителем 54 и меньше 15;
в) m является квадратом натурального числа и не превосходит 70;
г) m является делителем числа 10 или числа 15.

С—13. Понятие о следовании и равносильности (п. 10Д)

1. Является ли второе предложение следствием первого (при положительном ответе сделайте запись, используя знак $\Rightarrow$):

а) $\angle A$ и $\angle D$ — углы при нижнем основании равнобедренной трапеции; $\angle A = \angle D$;
б) в равнобедренном $\triangle ABC$ один из углов равен $80°$; $\triangle ABC$ остроугольный;
в) AC и BD — диагонали прямоугольника; $AC = BD$?

2. Следует ли второе предложение из первого, равносильны ли эти предложения (при положительном ответе сделайте запись, используя знаки $\Rightarrow$ или $\Leftrightarrow$):

а) b — натуральное число; $\frac{15b+3}{5}$ — дробное число;

б) m — положительное число; $-5m$ — отрицательное число;
в) число x кратно 7; число $9x$ кратно 7?

3. Равносильны ли предложения (при положительном ответе сделайте запись, используя знак $\Leftrightarrow$):
а) модуль числа a больше 3; число a больше 3;
б) модуль числа b меньше 0,5; квадрат числа b меньше 0,25;
в) квадраты чисел x и y равны; числа x и y равны?

4. Закончите запись так, чтобы предложения были равносильны:
а) $17 - a$ — целое число $\Leftrightarrow a + 13$ ...;
б) сумма цифр натурального числа a кратна 3 $\Leftrightarrow$ натуральное число a ... .

5. Вставьте пропущенную связку «и» или «или» так, чтобы полученное сложное предложение было равносильно данному:
а) $(m + 5)(n - 2) = 0 \Leftrightarrow m = -5$ ... $n = 2$;
б) $|x + 2| = 28 \Leftrightarrow x = 26$ ... $x = -30$;
в) $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ ... $y = 4$.

6. Замените многоточие словами «достаточно», «необходимо», «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание:
а) для того чтобы число a, где $a \in N$, делилось на 4, ..., чтобы его запись оканчивалась четной цифрой;
б) для того чтобы сумма $b + 57$, где $b \in N$, делилась на 19, ..., чтобы число b делилось на 19;
в) для того чтобы квадрат числа a был меньше 1, ..., чтобы число a было меньше 1.

С—14. Равносильные уравнения и уравнения-следствия (п. 11Д)

1. Является ли второе уравнение следствием первого, равносильны ли эти уравнения:
а) $\frac{4x - 1}{8} = \frac{x + 6}{8}$ и $4x - 1 = x + 6$;
б) $\frac{5 - x}{x - 2} = \frac{3}{x - 2}$ и $5 - x = 3$?

2. Дайте обоснование равносильности уравнений:
а) $(12x - 1)^2 - 24x = 145$ и $x^2 = 1$;
б) $(2x^2 + 3)(5x - 1) = 11(2x^2 + 3)$ и $5x - 1 = 11$.

3. Из данных уравнений выберите те, которые равносильны уравнению $x^2 - 7x + 6 = 0$:

$x^2 - x = 6x - 6$; $\frac{1}{7}x^2 - x + \frac{6}{7} = 0$; $(x-1)(x-7) = 0$;

$(x-1)(x-6) = 0$; $\frac{x^2+6}{x-1} = \frac{7x}{x-1}$; $\frac{x^2}{x+6} = \frac{7x-6}{x+6}$.

4. Найдите множество корней уравнения, заменив его равносильной системой или совокупностью уравнений:

а) $(x-5)(x^2+x-30) = 0$;

б) $(x-5)^2 + (x^2+x-30)^2 = 0$;

в) $\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{4x^2 + x} = 0$.

5. При каких значениях a равносильны уравнения

$$4x - a = 4 \text{ и } 2ax - 3x - 10 = 0?$$

6. При каких значениях m уравнение

$$3x^2 + (10m^2 - 12m)x + (100m^2 - 144) = 0$$

равносильно уравнению $x^2 = 0$?

С—15. Равносильные системы уравнений (п. 12Д)

1. Запишите систему уравнений, которая получится, если в системе $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ первое уравнение заменить уравнением, полученным в результате почленного сложения уравнений системы. Равносильны ли полученная система уравнений и данная? Проиллюстрируйте свой ответ с помощью графиков.

2. Запишите систему уравнений, которая получится, если в системе $\begin{cases} y = x - 2, \\ x + y = 4 \end{cases}$ заменить во втором уравнении переменную y выражением $x - 2$. Равносильны ли полученная система уравнений и данная? Проиллюстрируйте свой ответ с помощью графиков.

3. При каких значениях a и b равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} (2a-1)x + 5y = 11, \\ 6x + (b-8)y = -2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 4x + 5y = 14, \\ 2x - y = -7\,? \end{cases}$$

4. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 18y = 9, \\ 3x + 8y = 11, \\ 15x + ay = 5 \end{cases}$$

равносильна системе $\begin{cases} 5x + 18y = 9, \\ 3x + 8y = 11\,? \end{cases}$

5. При каких значениях a имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = a + 10, \\ x - 2y = a + 5, \\ 3x - 2y = 2a + 16? \end{cases}$$

6. Равносильны ли системы уравнений; является ли одна из них следствием другой (ответ обоснуйте):

$$\begin{cases} f(x, y) \cdot h(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 7 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ h(x, y) = 7? \end{cases}$$

С—16. Равносильные неравенства и неравенства-следствия (п. 13Д)

1. Дайте обоснование равносильности неравенств:
   а) $27x - 24 < 7x + 6$ и $27x - 7x < 6 + 24$;
   б) $\frac{1 - 8x}{4} - \frac{x}{2} > 0$ и $1 - 8x - 2x > 0$;
   в) $(3x - 1)(x^2 + 8) < 6x(x^2 + 8)$ и $3x - 1 < 6x$.

2. Докажите, что множеством решений неравенства является пустое множество:
   а) $8x(x - 1) - (5x + 2)(x - 2) < x^2 - 11$;
   б) $\frac{(2x + 3)^2}{6} - \frac{3x + 1}{3} < x - 8$.

3. Из данных неравенств выберите такое, из которого следуют все остальные:
   а) $x > \sqrt{10}$, $x > 3{,}2$, $x > 2\sqrt{2}$, $x > 3\frac{1}{3}$;
   б) $x < \sqrt{17}$, $x < 4{,}1$, $x < 3\sqrt{2}$, $x < 4\frac{1}{7}$.

4. Следует ли из первого неравенства второе (при положительном ответе сделайте запись, используя знак $\Rightarrow$):
   а) $|x| > 8$, $x > 8$;
   б) $|x| < 9$, $|x| < 7$;
   в) $x^2 < 16$, $x < 4$;
   г) $x > 11$, $x^2 > 121$?

5. Составьте неравенство вида $x^2 + px + q < 0$, равносильное двойному неравенству $-2 < x < 5$.

6. Докажите неравенство:
   а) $a^2 + b^2 > 4a + 18b - 86$;
   б) $\frac{x^2y^2 + x^2 + 4y^2}{6} \geqslant xy - \frac{1}{6}$.

С—17. Целое уравнение и его корни (п. 10)

1. Определите степень уравнения и число его корней:
   а) $x^2 - 10x - 11 = 0$;
   б) $x^2 + 6x + 9 = 0$;
   в) $3x^2 - 5x + 6 = 0$;
   г) $x^3 - 16x = 0$;
   д) $x^4 = 36$;
   е) $x^5 + x^4 = x + 1$.

2. Составьте какое-нибудь целое уравнение:

а) второй степени, имеющее корни -4 и 7;
б) третьей степени, имеющее корни -1, 2 и 9;
в) четвертой степени, имеющее корни 2, 4 и 6.

3. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, зная лишь один из его корней:

а) $x_1 = 3 - \sqrt{5}$; б) $x_1 = 2 + \sqrt{11}$; в) $x_1 = \dfrac{6}{\sqrt{7} - 2}$.

4. Решите уравнение, разложив левую его часть на множители:

а) $x^3 - 25x = 0$; в) $5y^3 - 25y^2 - 4y + 20 = 0$;
б) $3x^4 - 243 = 0$; г) $y^4 - 8y^3 + 16y^2 = 9y^2 - 72y + 144$.

5. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $2(3x^2 + 4)^2 - 34(3x^2 + 4) + 140 = 0$;
б) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;
в) $\dfrac{x-2}{x} + \dfrac{x}{x-2} = 3\dfrac{1}{3}$;
г) $\dfrac{x+4}{7x-2} + \dfrac{6(7x-2)}{x+4} = 7$.

6. Решите уравнение:

а) $y^4 - 20y^2 + 64 = 0$; б) $y^4 - 10y^2 + 21 = 0$.

7. При каких значениях параметра q уравнение $x^4 - 8x^2 + q = 0$:

а) не имеет корней; б) имеет два корня; в) имеет четыре корня?

8. Составьте биквадратное уравнение, зная, что один из его корней равен $\sqrt{7}$, а другой $2 + \sqrt{3}$.

С—18. Способы решения целых уравнений (п. 14Д)

1. Объясните, почему уравнение:

а) $x^6 + 3x^4 + 5x^2 + 29 = 0$ не имеет корней;
б) $3x^5 + x^3 + 7x - 47 = 0$ не имеет отрицательных корней.

2. Почему уравнение $x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ не имеет целых корней?

3. Найдите целые корни уравнения:

а) $2x^3 + 6x^2 - 7x - 1 = 0$; в) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$;
б) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$; г) $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$.

4. Решите уравнение:

а) $x^3 - x^2 - 19x - 17 = 0$; б) $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$.

5. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6) = 1680$;
б) $(y - 2)(y - 3)(y - 4)(y - 5) = 24$.

6. Решите симметрическое уравнение:

а) $x^4 - 7x^3 - 6x^2 - 7x + 1 = 0$;
б) $x^4 + 10x^3 + 18x^2 + 10x + 1 = 0$.

7. Решите уравнение, используя свойства монотонности функций:

а) $x^5 + 9x + 10 = 0$;
б) $x^3 + 2x - 33 = 0$;
в) $x^4 + 2x^2 - 99 = 0$;
г) $4x^6 + 8x^4 - 12 = 0$.

8. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^2 - 4|x| - 2$ с прямой $y = 3$.

9. Решите уравнение относительно y:

а) $by^2 - 8y = 0$;
б) $y^2 - 4y + c = 0$.

С—19. Решение дробно-рациональных уравнений (п. 15Д)

1. Решите уравнение.

а) $\frac{6}{y} + \frac{21}{y+1} = \frac{16}{y-2}$;
б) $\frac{3}{x^2+2} + \frac{1}{x^2-3} = \frac{4x+1}{x^4-x^2-6}$.

2. Сумма двух взаимно обратных обыкновенных дробей равна $\frac{17}{4}$. Числитель первой дроби на 6 меньше знаменателя. Найдите эти дроби.

3. Решите уравнение, введя новую переменную:

$$4\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 + \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 = 5.$$

4. Найдите рациональные корни уравнения

$$\frac{x^3 - x}{(x^2 - 2x - 1)^2} = 6.$$

5. Решите уравнение $\frac{1}{x} + \frac{3}{x+1} = \frac{2}{x+2} + \frac{5}{x+3}$.

6. Решите уравнение, воспользовавшись выделением из дроби ее целой части:

а) $\frac{x^2+2x+5}{x+2} + \frac{x^2-2x-1}{x-2} = 6$;
б) $\frac{x^2+2x+11}{x+1} - \frac{x^2+4x-2}{x+2} = 2$.

С—20. Решение неравенств второй степени с одной переменной (п. 8)

1. Решите неравенство:

а) $x^2 - x - 20 \geqslant 0$; в) $8x^2 + 10x - 3 > 0$;
б) $x^2 - x - 20 < 0$; г) $-x^2 - 2x + 48 > 0$.

2. Найдите множество решений неравенства:

а) $x^2 < 16$; б) $1{,}5x^2 \leqslant 18$; в) $-7x > x^2$; г) $\frac{1}{3}x^2 \leqslant 1$.

3. Решите неравенство:

а) $4x^2 + 5x + 9 < 6x^2 - 2x$; б) $9x - 5 < 3x^2 - 8x + 20$.

4. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{36x^2 - 9x}$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 8x - 9}}$.

5. Найдите множество целых решений неравенства:

а) $x^2 - 10x + 24 \leqslant 0$; б) $x^2 - 6x - 16 < 0$.

6. Докажите, что при любом значении x верно неравенство $4x^2 - 20x + 26 > 0$.

С—21. Решение неравенств методом интервалов (п. 9)

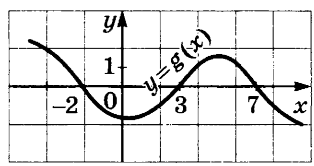


Рис. 9

1. Укажите промежутки (рис. 9), в которых функция g принимает:

а) отрицательные значения;
б) положительные значения.

2. Начертите координатную прямую и отметьте на ней точки, в которых функция $y = (x + 4)(x - 2)(x - 5)$ обращается в нуль. Отметьте знаком «+» промежутки, в которых функция принимает положительные значения, и знаком «–» промежутки, в которых функция принимает отрицательные значения.

3. Решите методом интервалов неравенство:

а) $(x + 2)(x - 6) < 0$; в) $(x + 2)(x - 2)(x - 4) > 0$;
б) $(x - 3)(x + 5) > 0$; г) $(x + 5)(x + 2)(x - 3) < 0$.

4. Решите неравенство:

а) $(x - 5)(x - 9)(x - 12) > 0$;
б) $(x + 10)(x + 6)(x - 7) \leqslant 0$;
в) $x(x + 2)(x - 3)(x - 7) \leqslant 0$;
г) $(x + 7)(x + 4)(x - 2)(x - 5) > 0$.

5. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{x(x^2 - 36)(x - 8)}.$$

6. Докажите, что неравенства $\frac{x-6}{x+4} > 0$ и $(x-6)(x+4) > 0$ равносильны.

7. Решите неравенство:

а) $\frac{x-3}{x+7} < 0$; в) $\frac{5x+14}{x-8} \leqslant 0$;

б) $\frac{x+8}{x-11} > 0$; г) $\frac{11x-297}{31x} \geqslant 0$.

С—22. Решение рациональных неравенств (п. 16Д)

1. Решите неравенство:

а) $(x+5)(x^2-16) \leqslant 0$;

б) $(x^2-49)(x-2)^2 \geqslant 0$;

в) $(x^2-7x+12)(x^2+x-20) < 0$;

г) $(x^3+64)(x^2+13x+42) > 0$.

2. Докажите, что равносильны неравенства:

а) $(x-21)^5 < 0$ и $x-21 < 0$;

б) $3x-6 > 0$ и $\frac{(3x-6)^4}{3x-6} > 0$.

3. Решите неравенство:

а) $\frac{(x-2)^3}{x^4-17x^2+16} \leqslant 0$; б) $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+12x+11} \geqslant 0$.

4. Составьте неравенство, решения которого образуют множество:

а) $(-\infty; -7) \cup (2; 10)$; б) $(-\infty; -4) \cup (3; 6) \cup (12; +\infty)$.

5. Докажите, что множество решений неравенства:

а) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16 \geqslant 0$ есть множество действительных чисел;

б) $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1 \leqslant 0$ состоит из одного числа.

6. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(x-2)(2x^2-3x+1)}.$$

7. Найдите целые решения неравенства $x(x-5)(x^2-4) \leqslant 0$.

С—23. Расстояние между точками координатной прямой (п. 17Д)

1. Найдите расстояние d между точками:

а) $P(-5)$ и $Q(7)$;

б) $A(0)$ и $B(-17)$;

в) $C(-150)$ и $D(350)$.

2. Начертите координатную прямую, отметьте на ней точку C — середину отрезка, концами которого служат точки A и B, и найдите координаты точки C, если:

а) A (0) и B (8); в) A (–3) и B (7);
б) A (–6) и B (0); г) A (–5) и B (3).

3. Запишите в виде равенства или неравенства, используя знак модуля, утверждение, что расстояние между точками K (x) и L (6) координатной прямой:

а) равно 2; в) больше 2; д) меньше 5;
б) меньше 2; г) равно 5; е) больше 5.

4. Запишите неравенство вида $a < x < b$, равносильное неравенству:

а) $|x - 2| < 3$; б) $|x + 3| < 1$; в) $|x - 2{,}3| < 0{,}05$.

5. Запишите неравенство вида $|x - a| \leqslant k$, равносильное неравенству:

а) $-3 \leqslant x \leqslant 5$; б) $0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}2$; в) $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

6. Покажите, используя координатную прямую, что если число a является решением неравенства $|x - b| > 2$, то a является решением неравенства $x < b - 2$ или неравенства $x > b + 2$.

7. Решите уравнение и неравенства:

а) $|x - 3| = 1$, $|x - 3| < 1$, $|x - 3| > 1$;
б) $|x + 1| = 3$, $|x + 1| < 3$, $|x + 1| > 3$.

С–24. Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля (п. 18Д)

1. Решите уравнение:

а) $|x| = 6$; в) $|4x - 9| = 3$;
б) $|x - 4| = 3$; г) $|13 - 3x| = 4$.

2. Найдите корни уравнения:

а) $|x^2 - 7| = 18$; б) $|x^2 - 5x| = 6$.

3. Решите уравнение:

а) $|x^2 - 3x + 2| = 2x - 4$; б) $|3x^2 + 9x - 5| = 2 - x$.

4. Найдите точки пересечения графика функции $y = |x + 2| + |x - 1|$ с прямой:

а) $y = 5$; б) $y = 3$; в) $y = 1$.

5. Решите уравнение:

а) $|x + 3| + |x - 3| = 5$; г) $|x| + |x + 2| + |x - 2| = 9$;
б) $|x + 3| + |x - 3| = 6$; д) $|x| + |x + 2| + |x - 2| = 5$;
в) $|x + 3| + |x - 3| = 8$; е) $|x| + |x + 2| + |x - 2| = 4$.

6. Решите уравнение:

а) $5x^2 - 4|x - 2| - 20 = 0$; б) $x^2 + \frac{|x-7|}{x-7} = 26$.

7. Постройте график функции $y = ||x| - 5|$ и решите уравнение:

а) $||x| - 5| = 6$; в) $||x| - 5| = 2$;

б) $||x| - 5| = 5$; г) $||x| - 5| = 0$.

С—25. Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля (п. 19Д)

1. Решите неравенство:

а) $|x| < 5$; в) $|x - 7| \leqslant 3$; д) $|8x + 5| < 3$;

б) $|x| \geqslant 5$; г) $|x - 7| > 3$; е) $|10 - 2x| \geqslant 4$.

2. Найдите множество решений неравенства:

а) $|x^2 - 4| < 3$; б) $|x^2 + 5x| \leqslant 6$;

в) $|x^2 - 6x + 12| \geqslant 7$.

3. Изобразите схематически график функции $y = |x + 2| + |x - 2|$ и, используя график, решите неравенство:

а) $|x + 2| + |x - 2| < 6$; б) $|x + 2| + |x - 2| \geqslant 8$.

4. Решите неравенство:

а) $|0{,}5x + 4| + |0{,}5x - 4| \leqslant 10$;

б) $|0{,}5x + 4| + |0{,}5x - 4| > 12$.

5. Решите неравенство:

$$3x^2 - 2|x - 1| > 10.$$

6. Найдите целые решения неравенства

$$|(x - 1)(x - 3)(x - 5)| < 11.$$

7. Найдите множество решений неравенства

$$|x| < \frac{1}{x}.$$

С—26. Решение иррациональных уравнений (п. 20Д)

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x - 5} = 7 - x$; в) $\sqrt{4x - 7} = 2x - 5$;

б) $\sqrt{x - 5} = x - 7$; г) $\sqrt{7x + 4} = 8 - x$.

2. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $\sqrt{x - 8} = 5 - x$; б) $\sqrt{4x - 10} + 6x = \sqrt{25 - 10x}$.

3. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{x^2-9}=4-x$; б) $\sqrt{4-3x-x^2}=2-x$.

4. Используя свойства монотонных функций, решите уравнение:

а) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x+14}=9$;

б) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x-4}+\sqrt{6x+1}=11$.

5. Используя свойства монотонных и четных функций, решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-8}=7$;

б) $\sqrt{x^4+4x^2-1}+\sqrt{x^2+15}=6$.

6. Решите уравнение:

а) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$; б) $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$.

7. Решите уравнение: $\sqrt{x-2}+\sqrt{6x-2}=\sqrt{25-3x}+\sqrt{4-x}$.

8. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $\sqrt{x^2-3x-10}-\sqrt{x^2-3x-18}=2$;

б) $\dfrac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{x+12}{3}$;

в) $\sqrt{\dfrac{2x+15}{x-4}}+\sqrt{\dfrac{x-4}{2x+15}}=\dfrac{10}{3}$.

9. Решите уравнение:

а) $(x-4)\sqrt{\dfrac{x+8}{x-3}}=0$; б) $(x^2-9)\sqrt{12-x-x^2}=0$.

С—27. Решение иррациональных неравенств (п. 21Д)

1. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x}<7$; б) $\sqrt{x}>7$; в) $\sqrt{5x-2}<3$; г) $\sqrt{5x-2}>3$.

2. Найдите множество решений неравенства:

а) $\sqrt{x^2-x-20}<\sqrt{10}$; б) $\sqrt{5x-x^2}>2$.

3. Используя свойства монотонных функций (см. Указание к С—26, № 7), решите неравенства

$$\sqrt{x-4}<10-x \text{ и } \sqrt{x-4}>10-x.$$

4. Решите неравенство:

а) $\sqrt{3x-1}<x$; в) $\sqrt{4x+1}<x-1$;

б) $\sqrt{3x-1}>x$; г) $\sqrt{4x+1}>x-1$.

5. Докажите, что множество решений неравенства $\sqrt{f(x)} > a$ при $a < 0$ совпадает с областью определения функции f.

6. Решите неравенство:
а) $\sqrt{35 - 2x - x^2} > -1$; б) $\sqrt{x^3 + 3x^2 - 6x - 8} > -3$.

7. Решите неравенство, введя новую переменную:
а) $\sqrt{x+3} - \dfrac{4}{\sqrt{x+3}} \leqslant 3$; б) $x^2 - 2x - 7\sqrt{x^2 - 2x} + 12 > 0$.

8. Найдите множество решений неравенства:
а) $(x - 8)\sqrt{12 - 3x} < 0$; б) $(x^2 - 9)\sqrt{16 - x^2} > 0$.

С—28. Уравнение с двумя переменными и его степень (п. 22Д)

1. Определите степень уравнения:
а) $3x^4 + 8x^3y^3 - 5y^4 + 7xy + 5 = 0$;
б) $(x - y)^2 - (x + y + 2)^2 = 4xy + 5$.

2. Является ли пара чисел $(2; -5)$ решением уравнения:
а) $5x^3 - 4xy^2 + 4y^2 = 60$; б) $2x^2 - 7y^2 = 22$?

3. Найдите множество решений уравнения
$$x^4 - 2x^2y^2 + x^2 + 4x + y^4 + 4 = 0.$$

4. Найдите множество целых решений уравнения
$$x - 2y = xy.$$

5. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 3 дает в остатке 2, а при делении на 5 дает в остатке 1.

6. Из двузначного числа вычли число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, и получили число 45. Найдите данное двузначное число.

С—29. График уравнения с двумя переменными (п. 23Д)

1. Какой кривой (окружностью, параболой, гиперболой) является множество точек, если уравнение этой кривой имеет вид:
а) $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 49$; б) $x^2 - y^2 = 24$; в) $x = y^2 + 6$?

2. Что представляет собой множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y^2 = \frac{1}{4}x^2$? Постройте график этого уравнения.

3. Докажите, что графиком уравнения $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 2$ является окружность. Укажите координаты центра окружности и длину ее радиуса.

4. Как следует переместить на координатной плоскости гиперболу $y = \frac{6}{x}$, чтобы ее уравнение приняло вид $x^2 - y^2 = 12$?

5. Как следует переместить на координатной плоскости параболу $y = x^2$, чтобы ее уравнение приняло вид $x = y^2 + 6$?

6. Докажите, что графиком уравнения:
   а) $x^2 - y^2 = 10$ является гипербола;
   б) $x = y^2 + 3$ является парабола.

7. Постройте график уравнения:
   а) $(x - 1)^2 + (y - 8)^2 = 9$;
   б) $x = (y + 2)^2$;
   в) $x^2 - y^2 = 6$;
   г) $4x^2 - y^2 = 0$.

С—30. Графический способ решения систем уравнений (пп. 12, 24Д)

1. Является ли пара чисел (8; 5) решением системы уравнений:
   а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 39, \\ xy + 6x = 88; \end{cases}$
   б) $\begin{cases} x^2 - xy = 24, \\ 3x - 4y = 4? \end{cases}$

2. Решите графически систему уравнений:
   а) $\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2; \end{cases}$
   б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ (x - 1)^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

3. Изобразите схематически графики уравнений и определите, сколько решений имеет система:
   а) $\begin{cases} y = 1 - x^2, \\ x = 1 - y^2; \end{cases}$
   б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x^2 + (y - 8)^2 = 16. \end{cases}$

4. Докажите, что система уравнений не имеет решений:
   а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y + 5 = 0, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$
   б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - x = 5. \end{cases}$

5. Решите графически с помощью системы уравнений кубическое уравнение
$$x^3 - 6x + 5 = 0.$$

С—31. Способы решения систем уравнений с двумя переменными (пп. 13, 25Д)

1. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 68, \\ y = 4x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy - 6y^2 = 27, \\ 4x - y = -7. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 16, \\ xy = 63; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ xy = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x^2 - xy + y^2 = 13. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (3x - 2)(y + 4) = 0, \\ 9x^2 - 6xy + y^2 = 36; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x^2 + 4xy - 2x - y = 0, \\ 16x^2 + 4xy + 3y^2 - y = 4. \end{cases}$

4. Найдите множество решений системы уравнений, в левой части которых однородные многочлены:

а) $\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + 5y^2 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 6xy + 8y^2 = 0, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 56. \end{cases}$

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ 2xy - y^2 = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 12, \\ 3x^2 - 4xy - 2y^2 = 8. \end{cases}$

6. Решите систему уравнений, используя введение новых переменных:

а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 42; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2\sqrt{xy} + y = 9, \\ x^2 + 3xy + y^2 = 29. \end{cases}$

7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{9}{x + y} - \dfrac{1}{x - y} = 2, \\ \dfrac{6}{x + y} + \dfrac{5}{x - y} = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{9}{\sqrt{x - 3}} + \dfrac{5}{\sqrt{y + 2}} = 7, \\ \dfrac{11}{\sqrt{x - 3}} - \dfrac{3}{\sqrt{y + 2}} = 4. \end{cases}$

С—32. Решение задач с помощью систем уравнений (п. 14)

1. От станции до поселка мотоциклист доехал за полчаса. На обратный путь он затратил на 10 мин больше, так как ехал со скоростью на 15 км/ч меньшей, чем первоначально. Каково расстояние от станции до поселка и какова скорость мотоциклиста на пути от станции до поселка и на обратном пути?

2. Катер проплывал от одной пристани до другой против течения реки за 36 мин. На обратный путь он затратил на 6 мин меньше. Найдите собственную скорость катера и расстояние между пристанями, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

3. В бак проведены две трубы. Если открыть обе трубы, то бак наполнится через 18 мин. Если открыть только вторую трубу, то бак наполнится на 15 мин быстрее, чем через первую трубу. За сколько минут может наполнить бак каждая труба, работая отдельно?

4. Смешали два раствора, из которых первый содержит 0,8 кг, второй — 0,6 кг безводной серной кислоты, и получили 10 кг нового раствора серной кислоты. Какова масса первого и второго растворов в смеси, если известно, что безводной серной кислоты содержится в первом растворе на 10% больше, чем во втором?

5. Равнодействующая двух сил, направленных под прямым углом, равна 25 Н. Если меньшую силу увеличить на 8 Н, а бóльшую уменьшить на 4 Н, то равнодействующая останется без изменения. Найдите величину составляющих сил.

6. Вкладчик положил деньги в банк и получил через год 420 р. Если бы вклад был на 100 р. больше, а банк выплачивал бы процент вдвое больший, то вкладчик получил бы 550 р. Какова была сумма вклада и какой процент выплачивал банк?

С—33. Линейные неравенства с двумя переменными (п. 26Д)

1. Известно, что P — множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $3x - 4y > 7$. Принадлежит ли множеству P точка:

   а) $A\ (1; -1)$; б) $B\ (0; -2)$; в) $C\ (5; -1)$; г) $D\ (0; -3)$?

2. Постройте прямую $y = 0{,}5x - 1$. Покажите штриховкой множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \leqslant 0{,}5x - 1$.

3. Изобразите на координатной плоскости множество F, если:

   а) $F = \{(x;\ y) \mid x$ — любое число, $y \leqslant 4\}$;
   б) $F = \{(x;\ y) \mid x > -2,\ y$ — любое число$\}$.

4. Постройте прямую, проходящую через начало координат и точку $B\ (1; 3)$. Задайте неравенством открытую полуплоскость, расположенную ниже этой прямой.

5. Постройте прямую $2x - y + 6 = 0$ и определите знак выражения $2x - y + 6$ в каждой из образовавшихся открытых полуплоскостей.

6. Задайте неравенством открытую полуплоскость, которая выше прямой AB, проходящей через точки A (0; –1) и B (2; 0).

7. При каких значениях a множество решений неравенства $3x - ay + 1 > 0$ изображается полуплоскостью, расположенной выше прямой $3x - ay + 1 = 0$?

С—34. Система линейных неравенств с двумя переменными (п. 27Д)

1. Пусть P — множество точек плоскости, задаваемое системой неравенств
$$\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}3y + 2 < 0, \\ 3x - y > 8. \end{cases}$$
Принадлежит ли множеству P точка: а) A (8; 10); б) B (2; –3)?

2. Изобразите на координатной плоскости множество $C = A \cap B$, если
$$A = \{(x;\ y) \mid y \geqslant x\},\quad B = \{(x;\ y) \mid y \leqslant 0{,}5x + 2\}.$$

3. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:
а) $\begin{cases} y \leqslant x + 1, \\ y \geqslant -0{,}5 + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - x + 4 \geqslant 0, \\ y - x - 2 \leqslant 0. \end{cases}$

4. Укажите какую-нибудь пару значений k и b, при которых система неравенств
$$\begin{cases} y \leqslant 5x + 6, \\ y \geqslant kx + b \end{cases}$$
задает на координатной плоскости: а) полосу; б) угол.

5. Изобразите на координатной плоскости множество $M = K \cap P$, если
$K = \{(x;\ y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 4,\ y$ — любое число$\}$,
$P = \{(x;\ y) \mid x$ — любое число, $0 \leqslant y \leqslant 5\}$.

6. Постройте треугольник, задаваемый системой неравенств
$$\begin{cases} 3y \leqslant x + 5, \\ y \geqslant -0{,}5x, \\ y \leqslant 2x - 5, \end{cases}$$
и найдите координаты его вершин.

7. Задайте системой неравенств фигуру, закрашенную на рисунке 10.

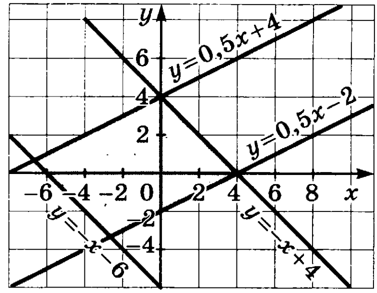


Рис. 10

С—35. Вычисление площадей многоугольников (п. 27Д)

1. Изобразите на координатной плоскости треугольник, который задает система неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x + y - 5 \leqslant 0, \end{cases}$$

и определите его площадь.

2. Постройте треугольник, задаваемый системой неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ y \geqslant 1, \\ x + y \leqslant 8, \end{cases}$$

и определите его площадь.

3. Задайте системой неравенств треугольник ABC, изображенный на рисунке 11, и определите его площадь.

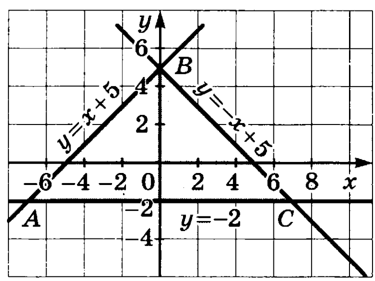


Рис. 11

4. Постройте прямоугольник, задаваемый на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 5, \\ -2{,}5 \leqslant y \leqslant 3{,}5, \end{cases}$$

и определите его площадь.

5. Постройте четырехугольник, вершинами которого являются точки A $(-3;\ 0)$, B $(0;\ 4)$, $C\,(3;\ 0)$, D $(0;\ 4)$. Задайте этот четырехугольник системой неравенств и определите его площадь.

6. Постройте четырехугольник, который задает на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x + 2y \leqslant 8, \\ x - 2 \leqslant 0, \end{cases}$$

и определите его площадь.

С—36. Неравенства высших степеней с двумя переменными (п. 28Д)

1. Известно, что F — множество точек координатной плоскости, заданное неравенством $x^2 + 4y - 1 > 0$. Принадлежит ли множеству F точка:

   а) $A\ (4; -4)$; б) $B\ (0{,}2; 0{,}8)$; в) $C\,(3; -6)$; г) $D(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$?

2. Постройте график функции $y = -x^2 + 3$. Задайте неравенством область, расположенную ниже графика.

3. Выделите на координатной плоскости множество точек, которое задает неравенство $y \geqslant (x + 2)^2$.

4. Постройте график функции $y = (x - 2)\,(x - 5)$. Определите знак произведения $(x - 2)\,(x - 5)$ в каждой из образовавшихся областей.

5. Задайте неравенством:

   а) круг с центром в точке B (2; 4) и радиусом, равным 6;
   б) множество точек плоскости, расположенных вне круга с центром в начале координат и радиусом, равным 9.

6. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

   а) $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 \leqslant 36$;
   б) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 \leqslant 0$.

7. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy + 2 \geqslant 8$.

С—37. Системы неравенств высших степеней с двумя переменными (п. 28Д)

1. Зная, что P — множество точек координатной плоскости, заданное системой неравенств
$$\begin{cases} x^3 + 3y < 4, \\ xy + 6 > 0, \end{cases}$$
определите, принадлежит ли множеству P точка:
а) $A\ (0; 1)$; б) $B\,(-1; 6)$; в) $C\ (-0{,}5; 4)$; г) $D(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

2. Изобразите множество решений системы неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 100, \\ y \leqslant -x^2 + 10. \end{cases}$$

3. Изобразите фигуру, заданную системой неравенств:

   а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ x^2 + y^2 \geqslant 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ xy \geqslant 0. \end{cases}$

   Найдите ее площадь (с точностью до 0,1).

4. При каком условии система $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant a^2 \\ x^2+y^2 \geqslant 25 \end{cases}$ задает:

а) кольцо; б) окружность; в) пустое множество?

5. Изобразите множество $P = A \cap B$, если $A = \{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 36\}$, $B = \{(x;\ y) \mid (x-4)^2 + y^2 \leqslant 25\}$.

6. Среди точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} y \geqslant x^2 - 8x + 15, \\ y - 2x \leqslant 0, \end{cases}$$
найдите точку с наибольшей ординатой и точку с наименьшей ординатой.

7. Задайте системой неравенств множество точек, показанное на рисунке 12.

Задайте системой неравенств оставшуюся часть круга.

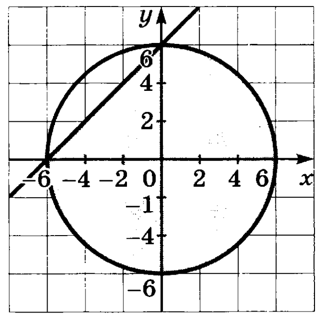


Рис. 12

С—38. Неравенства с переменными под знаком модуля (п. 29Д)

1. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, которое задает неравенство:

а) $y \geqslant |x - 3|$; б) $y \geqslant \dfrac{|x-3|}{x-3}$.

2. Выделите на координатной плоскости множество точек, которое задает неравенство:

а) $y \geqslant |x^2 - 5x + 4|$; б) $y \geqslant x^2 + 3|x|$.

3. Изобразите на координатной плоскости множество P, если:

а) $P = \{(x;\ y) \mid x$ — любое число, $2 \leqslant |y| \leqslant 4\}$;

б) $P = \{(x;\ y) \mid 1 \leqslant |x| \leqslant 5$, y — любое число$\}$.

4. Изобразите фигуру, которую задает на координатной плоскости неравенство $|x| + |y| \leqslant 4$, и определите ее площадь.

5. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, которое задает неравенство
$$|y| \leqslant x^2 + 2.$$

6. Выделите на координатной плоскости множество точек, которое задает неравенство
$$x^2 + y^2 - 2|x| - 6y \leqslant 6.$$
Укажите три какие-либо точки, принадлежащие этому множеству.

С—39. Системы неравенств с переменными под знаком модуля (п. 29Д)

1. Постройте фигуру, которую задает система неравенств
$$\begin{cases} y \geqslant |x|, \\ y \leqslant 12, \end{cases}$$
и найдите ее площадь.

2. Покажите на координатной плоскости фигуру, которую задает система неравенств
$$\begin{cases} y \geqslant |x|, \\ y \leqslant -0{,}5x + 1{,}5, \end{cases}$$
и определите ее площадь.

3. Выделите на координатной плоскости множество точек, которое задает система неравенств
$$\begin{cases} y \geqslant |x^2 - 4|, \\ y \leqslant 3x. \end{cases}$$
Укажите координаты точки с наименьшей ординатой и точки с наибольшей ординатой.

4. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств:
$$\begin{cases} 3 \leqslant |x| \leqslant 6, \\ 2 \leqslant |y| \leqslant 4. \end{cases}$$

5. Изобразите на координатной плоскости фигуру, которую задает система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 81, \\ y \geqslant |x|, \end{cases}$$
и определите ее площадь (с точностью до 0,1).

6. Покажите на координатной плоскости множество точек, которое задает система неравенств
$$\begin{cases} y \geqslant |x - 3|, \\ (x-3)^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

7. Постройте фигуру, которую задает система неравенств
$$\begin{cases} |x - y| \leqslant 3, \\ |x + y| \leqslant 3, \end{cases}$$
и определите ее площадь.

С—40. Последовательности (пп. 30Д, 15)

1. Последовательность (x_n) задана формулой n-го члена:

а) $x_n = n^2 + n$; б) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$.

Найдите x_5, x_8, x_{100}, x_{n+1}.

2. Вычислите первые пять членов последовательности (b_n) и изобразите их точками на координатной прямой, если:

а) $b_n = n + 1$; б) $b_n = 0{,}8n$; в) $b_n = n^2 - 11$.

3. Последовательность (c_n) задана формулой:

а) $c_n = 2n + 2$; б) $c_n = 0{,}5n^2$; в) $c_n = (-1)^n \cdot 3$.

Найдите первые пять членов этой последовательности и изобразите их точками на координатной плоскости. Где расположены эти точки?

4. Выпишите первые пять членов последовательности (a_n), если:

а) $a_1 = 6$, $a_{n+1} = a_n - 2$;
б) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 1 + a_{n-1}$, $(n > 2)$.

5. Выпишите первые пять членов последовательности (u_n) натуральных чисел, дающих при делении на 7 остаток 1, взятых в порядке возрастания. Задайте эту последовательность формулой n-го члена.

6. Последовательность (b_n) задана формулой

$$b_n = n^2 - 14n + 50.$$

Является ли членом последовательности указанное число и если да, то каков номер этого члена:

а) 5; б) 7; в) 40; г) 50?

7. Укажите номера отрицательных членов последовательности (c_n), если

$$c_n = n^2 - 10n + 16,$$

и вычислите эти члены.

С—41. Формула n-го члена арифметической прогрессии (п. 16)

1. В арифметической прогрессии $a_7 = 11$, $a_{12} = -4$. Найдите a_1 и d.

2. Найдите обозначенные буквами члены арифметической прогрессии

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ 17,\ a_5,\ a_6,\ 32,\ \ldots .$$

3. Переплетная мастерская переплела в январе 216 книг, а в каждый следующий месяц она переплетала на 4 книги больше, чем в предыдущий. Сколько книг переплела мастерская в августе; в декабре?

4. Встретится ли среди членов арифметической прогрессии 5,6, 5,3, 5, ... число:

а) 4,1; б) 1,2; в) −2,4?

5. Между членами 5 и 29 вставьте пять чисел, которые вместе с данными числами составят арифметическую прогрессию.

6. Найдите номер первого отрицательного члена арифметической прогрессии

$$9{,}2,\ 8{,}4,\ 7{,}6,\ \ldots .$$

7. В арифметической прогрессии $a_5 = 4a_1$. Докажите, что $\frac{a_9}{a_2} = 4$.

8. Могут ли быть членами одной арифметической прогрессии (не обязательно соседними) числа:

а) $\sqrt{2}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$; б) 6, 11, $\sqrt{72}$?

С—42. Формула суммы первых *n* членов арифметической прогрессии (п. 17)

1. Найдите сумму первых восьми членов арифметической прогрессии:

$$12{,}6,\ 11{,}1,\ 9{,}6,\ \ldots .$$

2. Найдите сумму:

а) всех двузначных чисел, больших 45;

б) всех натуральных чисел, кратных 8 и не превышающих 100.

3. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = -4$, $a_9 = 60$; б) $a_6 = -3$, $a_{15} = -21$.

4. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии

$$-4{,}5,\ -4,\ -3{,}5,\ \ldots .$$

5. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, в которой $S_3 = 135$, $S_9 = 351$.

6. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 180 км, выехали одновременно навстречу друг другу мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист ехал со скоростью 20 км/ч, а велосипедист в первый час проехал 18 км, а в каждый следующий проезжал на 1 км меньше, чем в предыдущий. Через сколько часов мотоциклист и велосипедист встретятся?

7. Решите уравнение, в котором слагаемые в сумме, записанной в левой части, составляют арифметическую прогрессию:

а) $3 + 5 + 7 + \ldots + x = 63$;

б) $37 + 33 + 29 + \ldots + x = 190$.

8. В арифметической прогрессии (a_n) найдите a_1 и d, если известно, что $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 105$ и $S_5 = 35$.

С—43. Свойства арифметической прогрессии (пп. 16, 17, 31Д)

1. Является ли арифметической прогрессией последовательность (a_n), заданная формулой:

а) $a_n = 0{,}8n + 1$; б) $a_n = n\,(n + 4)$; в) $a_n = \dfrac{3 - n}{2}$?

При положительном ответе укажите первый член и разность прогрессии.

2. Четыре числа составляют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа, если известно, что сумма первых трех из них равна 6, а сумма трех последних равна 9.

3. Найдите натуральное число, которое в 8 раз меньше суммы предшествующих ему натуральных чисел.

4. Является ли арифметической прогрессией последовательность (c_n), сумма первых n членов которой вычисляется по формуле:

а) $S_n = 4n^2 - n$; б) $S_n = 5n^2 + 1$?

При положительном ответе укажите первый член и разность прогрессии.

5. Изобразите на координатной плоскости первые пять членов арифметической прогрессии 1, 4, 7, ... Напишите уравнение прямой, на которой лежат построенные точки.

6. Пусть (c_n) — некоторая последовательность, а (S_n) — последовательность сумм первых n ее членов. Докажите, что если члены последовательности (c_n) изображаются на координатной плоскости точками, принадлежащими прямой $y = 4x + 1$, то члены последовательности (S_n) изображаются точками, принадлежащими параболе $y = 2x^2 + 3x$.

С—44. Формула *n*-го члена геометрической прогрессии (п. 18)

1. Последовательность (b_n)—геометрическая прогрессия. Найдите:

а) b_7, если $b_1 = 144$, $q = \frac{1}{2}$; б) b_1, если $b_5 = -13\frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$.

2. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_7 = 1251$, $b_{10} = 46\frac{1}{3}$; б) $b_{10} = 3680$, $b_{13} = -57{,}5$.

3. Определите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что разность между ее шестым и четвертым членами равна 1700, а разность между пятым и третьим членами равна 340.

4. Между числами 24 и $\frac{3}{32}$ вставьте три числа так, чтобы они вместе с данными числами составили геометрическую прогрессию.

5. Второй и седьмой члены геометрической прогрессии соответственно равны $\frac{1}{3}$ и 81. Найдите члены прогрессии, заключенные между ними.

6. Геометрическая прогрессия состоит из девяти членов. Сумма первых трех членов равна 26, а сумма последующих трех членов равна 702. Найдите сумму последних трех членов.

7. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 252, а сумма средних членов равна 60. Найдите эти числа.

С—45. Формула суммы первых *n* членов геометрической прогрессии (п. 19)

1. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии:

   а) $12, -6, 3, \ldots$; б) $\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, \ldots$.

2. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

   а) S_6, если $a_1 = 625$, $q = \frac{1}{5}$; б) S_4, если $a_1 = 2$, $q = -3$.

3. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (b_n), в которой:

   а) $b_4 = \frac{1}{25}$, $b_5 = \frac{1}{125}$; б) $b_3 = 20$, $b_5 = 80$, $q > 0$.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (a_n), если известно, что $\frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} = 4$ и сумма первых трех членов прогрессии равна 63.

5. Найдите первый член геометрической прогрессии, в которой:

   а) $q = \frac{3}{5}$, $S_4 = 272$; б) $q = 2$, $S_6 = 378$.

6. В геометрической прогрессии (a_n):

а) найдите q и n, если $a_1 = 3$, $a_n = 768$, $S_n = 1023$;

б) найдите n и a_n, если $a_1 = 243$, $q = -\frac{1}{3}$, $S_n = 180$.

7. Разность между пятым и третьим членами геометрической прогрессии равна 18, а между четвертым и вторым равна 9. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

С—46. Свойства геометрической прогрессии (пп. 18, 19, 31Д)

1. Найдите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n) и изобразите их на координатной плоскости, если известно, что $b_5 = 9$, $b_7 = 81$ и $q < 0$, где q — знаменатель прогрессии.

2. Является ли геометрической прогрессией последовательность (a_n), заданная формулой:

а) $a_n = 2^{n+1}$; б) $a_n = 3^n + 4$; в) $a_n = -2 \cdot 3^n$?

3. В геометрической прогрессии с положительными членами $S_2 = 5$, $S_3 = 21$. Найдите S_5.

4. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 52. Если первые два числа оставить без изменения, а из третьего вычесть 16, то полученные числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

5. Найдите четыре целых числа, из которых первые три составляют арифметическую прогрессию, а последние три составляют геометрическую прогрессию, причем сумма средних чисел равна 16, а сумма крайних чисел равна 32.

6. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 84. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

С—47. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$ (п. 20)

1. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, проверив предварительно, что ее знаменатель удовлетворяет условию $|q| < 1$:

а) $\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{21}, \ldots$; б) $0{,}3, -0{,}06, 0{,}012, \ldots$.

2. Найдите первые два члена бесконечной геометрической прогрессии по известным знаменателю q и сумме S:

а) $q = -\frac{5}{9}$, $S = 18$; б) $q = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $S = 5 + \sqrt{5}$.

3. Представьте в виде обыкновенной дроби число:

а) 0,(3); б) 0,(23); в) 0,7(5); г) 0,16(3).

4. Второй член бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q, где $|q| < 1$, равен 21, а сумма прогрессии равна 112. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

5. Известно, что сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q, где $|q| < 1$, равна 192, а сумма первых трех членов этой прогрессии равна 189. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

6. В правильный треугольник со стороной 64 см вписан второй треугольник, вершинами которого являются середины сторон первого. Во второй треугольник таким же способом вписан третий и т. д. Найдите сумму периметров всех таких треугольников.

С—48. Применение метода математической индукции в задачах на последовательности (п. 32Д)

1. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = n\,(2n + 1)$. Докажите, что сумма первых n членов этой последовательности может быть вычислена по формуле $S_n = \dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$.

2. Последовательность задана рекуррентным способом: $b_1 = 5$, $b_{n+1} = b_n + 8n + 4$. Докажите, что эта последовательность может быть задана формулой $b_n = 4n^2 + 1$.

3. Докажите, что если $b_1 = 5$, $b_{n+1} = 4b_n - 3$, то последовательность (b_n) может быть задана формулой $b_n = 4^n + 1$.

4. Докажите, что любой член последовательности (a_n) делится на 7, если:

а) $a_n = n^3 + 20n$; б) $a_n = n^3 + 48n$.

5. Последовательность (c_n) задана формулой $c_n = 9^n - 1$. Докажите, что все члены последовательности кратны 8.

6. Докажите, что при делении на 7 любого члена последовательности

$$15,\ 15^2,\ 15^3,\ \ldots,\ 15^n,\ \ldots$$

в остатке получается 1.

7. Выведите формулу суммы первых n членов последовательности

$$\frac{1}{1 \cdot 3},\ \frac{1}{3 \cdot 5},\ \frac{1}{5 \cdot 7},\ \ldots,\ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},\ \ldots$$

и докажите ее справедливость, пользуясь методом математической индукции.

С—49. Возрастающие и убывающие последовательности (п. 33Д)

1. Является ли возрастающей или убывающей последовательность (y_n), в которой член y_n равен:

   а) квадрату числа n;
   б) остатку от деления n на 7?

2. Найдите первые пять членов последовательности (u_n), заданной формулой $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$. Докажите, что последовательность (u_n) возрастающая.

3. Найдите первые пять членов последовательности (b_n), где $b_n = \frac{7n+9}{n}$. Выскажите предположение о характере изменения членов последовательности. Проведите доказательство.

4. Выясните, является ли возрастающей или убывающей последовательность (a_n), если:

   а) $a_n = -2{,}5n + 2$; б) $a_n = 5^n$; в) $a_n = (-1)^n \cdot (n + 1)$.

5. Укажите наименьший и наибольший члены последовательности (c_n), если они существуют, зная, что:

   а) $c_n = 14n - 3$; б) $c_n = \frac{17}{n+1}$; в) $c_n = n^2 - 4$.

6. При каких значениях a последовательность (u_n), где $u_n = \frac{3n-a}{n+1}$, является:

   а) возрастающей; б) убывающей?

С—50. Ограниченные и неограниченные последовательности (п. 34Д)

1. Является ли ограниченной сверху или ограниченной снизу последовательность:

   а) трехзначных чисел, взятых в порядке возрастания;
   б) натуральных степеней числа 3, взятых в порядке возрастания;
   в) остатков, полученных от деления номера члена последовательности на 5?

2. Докажите, что последовательность (u_n), где $u_n = \frac{n+1}{n+4}$, является возрастающей и ограниченной сверху.

3. Докажите, что последовательность (y_n), где $y_n = \frac{n+7}{n+4}$, является убывающей и ограниченной снизу.

4. Является ли ограниченной последовательность (x_n), если:

а) $x_n = \frac{2n+9}{n}$; б) $x_n = -n + 4$; в) $x_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n$?

5. Докажите, что последовательность (b_n), где $b_n = n^2 + 12n + 42$, ограничена снизу и не ограничена сверху.

6. Укажите, если возможно, какой-либо числовой промежуток $(a; b)$, где a и b — некоторые числа, которому принадлежат все члены последовательности (u_n), если:

а) $u_n = \frac{n}{n+6}$; б) $u_n = \frac{5n^2}{n^2+1}$; в) $u_n = \frac{1}{7^n}$.

С—51. Сходящиеся последовательности (п. 35Д)

1. Является ли сходящейся последовательность:

а) 7, 14, 21, ..., $7n$, ...; б) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$;

в) $1, -\frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}, \ldots$?

2. К какому числу сходится последовательность (c_n), если:

а) $c_n = 4 + \frac{1}{n}$; б) $c_n = 16 - \frac{1}{n^2}$; в) $c_n = \frac{1}{5^n}$?

3. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = \frac{3n-1}{n+1}$.

Укажите наименьший из номеров членов последовательности, для которых выполняется неравенство $|x_n - 3| < 0{,}1$.

4. Вычислите первые шесть членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = \frac{2n+1}{n}$, и изобразите их точками на координатной прямой. Какое предположение о пределе последовательности (a_n) можно сделать? Проведите доказательство.

5. Пользуясь определением предела, докажите, что:

а) $\lim \frac{6n-1}{n} = 6$; б) $\lim \frac{n}{7n+1} = \frac{1}{7}$.

6. Последовательность (a_n) получается путем отбрасывания в бесконечной периодической десятичной дроби 0,222...

всех десятичных знаков после запятой, кроме одного, кроме двух, кроме трех и т. д., т. е.
$a_1 = 0{,}2,\ a_2 = 0{,}22,\ a_3 = 0{,}222,\ \ldots,\ a_n = 0{,}\underbrace{22\ldots2}_{n \text{ раз}},\ \ldots.$
Докажите, что $\lim a_n = \frac{2}{9}$.

С—52. Функция $y = x^n$ (п. 22)

1. Постройте график функции:
а) $y = \frac{1}{3}x^3$; б) $y = \frac{1}{3}(x-2)^3$.

2. Известно, что $g(x) = x^{45}$. Сравните:
а) $g(1)$ и $g(4)$; в) $g(-4)$ и $g(7)$;
б) $g\left(\frac{1}{3}\right)$ и $g\left(\frac{2}{7}\right)$; г) $g(-28)$ и $g(28)$.

3. Пусть $f(x) = x^{62}$. Сравните:
а) $f(25)$ и $f(30)$; в) $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ и $f(0{,}25)$;
б) $f(-3)$ и $f(-8)$; г) $f(17)$ и $f(-4)$.

4. Сколько корней имеет уравнение:
а) $x^{40} = 3$; б) $x^{59} = 5$; в) $x^{37} = -1$?

5. Изобразите схематически график функции:
а) $y = |x^5|$; б) $y = \frac{1}{4}|x^4 - 2|$.

6. Решите уравнение: а) $x^5 = 16x$; б) $x^4 = 16x$.

7. Принадлежит ли графику функции $y = x^6$ точка:
а) $A(2; 64)$; б) $B\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{729}\right)$; в) $C(-4; 4094)$?

С—53. Определение корня n-й степени (п. 23)

1. Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt[3]{343}$; в) $\sqrt[3]{-512}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0256}$.

2. Вычислите:
а) $\sqrt[4]{2\frac{46}{245}} - \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$; б) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}} + \sqrt[5]{97\frac{21}{32}}$.

3. Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:
а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt[3]{30}$; в) $\sqrt[4]{0{,}8}$; г) $\sqrt[4]{2{,}7}$.

4. Сравните числа:

а) $\sqrt{0{,}7}$ и $\sqrt[3]{0{,}7}$; в) $\sqrt{1{,}5}$ и $\sqrt[3]{1{,}5}$;

б) $\sqrt[3]{0{,}7}$ и $\sqrt[4]{0{,}7}$; г) $\sqrt[3]{1{,}5}$ и $\sqrt[4]{1{,}5}$.

5. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = \sqrt[3]{x+2}$; в) $y = \sqrt[4]{-x}$; г) $y = \sqrt[4]{x-2}$.

6. Найдите корни уравнения $\sqrt[3]{|x| - 1} = 1$.

7. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt[6]{x+2}$; в) $y = \sqrt[4]{2x - x^2}$;

б) $y = \sqrt[3]{x+2}$; г) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$.

8. Решите уравнение:

а) $x^5 = 9$; б) $x^8 = 16$; в) $x^{10} - x^5 - 30 = 0$.

9. Постройте график уравнения:

а) $x = \sqrt[3]{y}$; б) $\sqrt{x} = \sqrt{y}$.

С—54. Свойства арифметического корня (п. 24)

1. Докажите тождество:

а) $\sqrt{x^2} = |x|$; б) $\sqrt[3]{y^3} = y$; в) $\sqrt[4]{p^4} = |p|$.

2. Представьте выражение в виде одночлена:

а) $\sqrt{25x^2y^4}$, если $x \geqslant 0$; б) $\sqrt{81x^4y^2}$, если $x \leqslant 0$;

в) $\sqrt[3]{125x^9y^6}$; г) $\sqrt[4]{256x^{12}y^{20}}$, где $x \geqslant 0$, $y < 0$.

3. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{256 \cdot 0{,}0025}$; в) $\sqrt[3]{9 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{17}}$;

б) $\sqrt[5]{\dfrac{6^5}{2^{10} \cdot 9^5}}$; г) $\sqrt[4]{(1 - \sqrt{10})^2} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{10}}$.

4. Представьте выражение в виде произведения, вынеся из-под знака корня множитель:

а) $\sqrt{5b^4}$, где $b > 0$; в) $\sqrt[4]{54c^7}$;

б) $\sqrt[3]{8a^4}$; г) $\sqrt[4]{-16y^7}$, где $y < 0$.

5. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\sqrt{\dfrac{7x}{25}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{64y^3}{a^6}}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{162a^5}{b^4}}$, где $b < 0$; г) $\sqrt[5]{\dfrac{x^{10}y^5}{32b^{15}}}$.

6. Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt{x^2y} = x\sqrt{y}$, если $x \geqslant 0$; б) $\sqrt{x^2y} = -x\sqrt{y}$, если $x \leqslant 0$.

7. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{9b^3}$, если $b < 0$; б) $\sqrt[4]{7x^4y^8}$, если $x < 0$, $y < 0$.

8. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^6}}$, где $x \geqslant 0$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$; г) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25y^6}}$, где $y < 0$.

9. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} - 9\sqrt[4]{x} = 0$; в) $\sqrt{x} + 7\sqrt[4]{x} + 12 = 0$.

б) $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 12 = 0$;

10. Представьте выражение $\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{13}{b^2}}$ в виде дроби и найдите его значение при:

а) $b = 12$; б) $b = -12$.

С—55. Определение степени с дробным показателем (п. 25)

1. Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

а) $37^{\frac{1}{2}}$; $7^{\frac{1}{3}}$; $19^{-\frac{1}{4}}$; в) $6x^{\frac{1}{4}}$; $-8y^{1,5}$; $(5b)^{0,2}$;

б) $x^{\frac{3}{5}}$; $y^{-\frac{1}{2}}$; $p^{\frac{5}{7}}$; г) $(y-3)^{\frac{1}{2}}$; $(y+5)^{-\frac{1}{3}}$; $(y-4)^{1,5}$.

2. Замените арифметический корень степенью с дробным показателем:

а) $\sqrt{12}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{5}$; в) $\sqrt{6^{-1}}$; $\sqrt[3]{3^{-2}}$; $\sqrt[8]{9^2}$;

б) $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[4]{x^3}$; $\sqrt[6]{4b^2}$; г) $\sqrt[4]{b^3}$; $\sqrt[6]{4y^2}$; $\sqrt[5]{x+b}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $9^{\frac{1}{2}}$; б) $64^{\frac{1}{3}}$; в) $5 \cdot 16^{-\frac{1}{2}}$; г) $8 \cdot \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$.

4. Найдите область определения функции:

а) $y = (x-5)^{\frac{1}{4}}$; б) $y = (8-x)^{\frac{1}{3}}$.

5. Постройте график функции:

а) $y = (x-3)^{\frac{1}{2}}$; б) $y = (x+3)^{\frac{1}{3}}$.

6. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$; б) $2^{\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{1}{3}}$; $2^{\frac{1}{4}}$; $2^{\frac{1}{5}}$.

7. Оцените значение выражения $y^{\frac{1}{4}}$, если:

а) $0 < y < 81$; б) $1 \leqslant y \leqslant 16$; в) $0{,}0001 < y \leqslant 2$.

С—56. Свойства степени с рациональным показателем (п. 26)

1. Представьте в виде степени:

а) $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{4}}$; б) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; в) $a^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{3}{4}}$; г) $\left(a^{\frac{5}{8}}\right)^{0}$.

2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^3x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{12}}}{x^{-\frac{3}{4}}}$; б) $\dfrac{y^{0,7}y^{1,3}\left(y^{\frac{2}{5}}\right)^{0,25}}{y^{-2,7}y^{1,8}}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{6}} + 49^{0,3} \cdot 7^{0,4}$; б) $\dfrac{32^{0,6} \cdot 8^{0,4}}{0{,}5^{-1,2} \cdot 125^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{-1}}$.

4. Представьте выражение, где $a > 0$, в виде квадрата и в виде куба:

а) a^3; б) a; в) $a^{\frac{1}{3}}$; г) $a^{\frac{1}{2}}$.

5. Решите уравнение:

а) $x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} + 12 = 0$; б) $y - 91y^{\frac{1}{3}} - 90 = 0$.

6. Постройте график функции:

а) $y = \left|(x+2)^{\frac{1}{2}} - 2\right|$; б) $y = (|x| - 1)^{\frac{1}{2}}$.

7. Представьте в виде суммы квадратов выражение

$$b^{\frac{1}{3}} + 4b^{\frac{1}{4}} + 6b^{\frac{1}{6}} + 4b^{\frac{1}{12}} + 2.$$

8. Постройте график уравнения:

а) $x = y^{\frac{1}{2}}$; б) $x^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{3}}$.

С—57. Преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями (п. 27)

1. Разложите на множители:

а) $y - 3y^{\frac{1}{2}}$; в) $c^{\frac{2}{5}} - 9d^{\frac{2}{5}}$;

б) $x^{0,5} - 2x^{0,25}$; г) $a^{\frac{3}{8}} - 27^{\frac{3}{8}}$.

2. Представьте выражение в виде степени с натуральным показателем:

а) $b^{\frac{1}{2}} - 6b^{\frac{1}{4}} + 9$; б) $a - 4a^{\frac{3}{4}} + 6a^{\frac{1}{2}} - 4a^{\frac{1}{4}} + 1$.

3. Сократите дробь:

а) $\dfrac{b - 4y}{b^{0,5} + 2b^{0,5}}$; в) $\dfrac{a - x}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}$; д) $\dfrac{b - 2b^{0,7}}{5b^{0,5} - 10b^{0,2}}$;

б) $\dfrac{y^{1,5} - 8}{y + 2y^{0,5} + 4}$; г) $\dfrac{x - y}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}$; е) $\dfrac{7y^{\frac{1}{4}} - 14}{y^{\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{4}} - 10}$.

4. Представьте выражение в виде степени с основанием a:

а) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$; б) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}$; в) $\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a\sqrt{a}}}$.

5. Докажите, что значение выражения

$$5^{\frac{2}{3}} \cdot (7 - 2\sqrt{6})^{\frac{1}{6}} \cdot (1 + \sqrt{6})^{\frac{1}{3}}$$

является целым числом.

6. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{1}{c^{\frac{1}{3}} - 2} - \dfrac{12}{c - 8} - \dfrac{2}{c^{\frac{2}{3}} + 2c^{\frac{1}{3}} + 4}\right) : \left(2 + \dfrac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{3}} + 2}\right)$;

б) $\dfrac{a + a^{0,8} + a^{0,6} + a^{0,4}}{a^{0,6} + a^{0,4} + a^{0,2} + 1}$.

7. Постройте график функции:

а) $y = |x|^{\frac{1}{2}}$; б) $y = \sqrt{|x| - 2}$.

С—58. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса (п. 28)

1. Найдите значение выражения:

а) $3 \sin 90° - 4 \cos 90° + 11 \operatorname{tg} 45°$;
б) $8 \operatorname{tg} 360° + 12 \cos 90° - 3 \sin 90°$;
в) $4 \sin 90° - 5 \cos 90° + 15 \operatorname{tg} 45°$.

2. Верно ли неравенство:

а) $\cos 30° + \cos 45° > 1$; в) $\cos 90° + \cos 45° > \frac{1}{2}$;

б) $\sin 60° + \sin 45° > 1,5$; г) $\sin 90° - \sin 60° < 0$?

3. Может ли косинус угла принимать значение, равное:

а) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; б) $\sqrt{2} - 1$; в) $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$; г) $\frac{\sqrt{5} - 2}{2}$?

4. Известно, что $a = 60°$. Найдите:

а) $\cos \alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $4 \cos \alpha$; г) $\cos^2 \alpha$.

5. Найдите значение выражения:

а) $\cos^2 \alpha + 3 \sin \alpha + \sin (\alpha + 60°)$ при $\alpha = 30°$;
б) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha$, при $\alpha = 45°$;
в) $\cos 2\alpha + \sqrt{3} \cos \alpha - \sin (\alpha + 60°)$ при $\alpha = 30°$.

6. Укажите наименьшее и наибольшее значения выражения:

а) $\cos x + 5$; б) $3 \sin x - 1$; в) $1 + \sin^2 x$.

7. Укажите три каких-либо значения α, при которых:

а) $\cos \alpha = 0$; б) $\sin \alpha = -1$; в) $\cos \alpha = -1$.

С—59. Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса (п. 29)

1. Определите знак выражения:

а) $\sin 215° \cdot \cos 87°$;
б) $\sin 106° \cdot \operatorname{tg} 135°$;
в) $\sin 140° + \cos 310°$;
г) $\cos 196° - \sin 117°$.

2. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\sin \alpha < 0$ и $\cos \alpha > 0$; б) $\sin \alpha > 0$ и $\operatorname{tg} \alpha < 0$?

3. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{27} \sin (-60°) + 4 \cos (-60°) - \operatorname{tg} (-45°)$;
б) $6 \sin (-30°) - 8 \cos (-60°) + 3\sqrt{3} \operatorname{ctg} (-60°)$.

4. Вычислите:

а) $5 \sin 750° - \cos 360° + 4 \operatorname{tg} 405°$;
б) $2 \sin 390° - 5 \cos 420° - 10 \operatorname{tg} 720°$.

5. Известно, что $180° < \alpha < 270°$. Сравните с нулем значение выражения:

а) $\sin^2 \alpha \cos \alpha$; б) $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$; в) $\sin \alpha + \cos \alpha$.

6. Зная, что $\cos \alpha = b$, найдите:

а) $1 + \cos (-\alpha)$; б) $\cos (\alpha + 360°)$; в) $\cos (720° - \alpha)$.

7. Какой координатной четверти принадлежит угол α, если

$$\sin \alpha + \cos \alpha = -1{,}02?$$

Ответ обоснуйте.

С—60. Радианная мера угла (п. 30)

1. Найдите радианную меру угла, равного:
   а) 45°; б) 36°; в) 15°; г) 160°; д) 300°.

2. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:
   а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{5}{6}\pi$; г) $2\frac{1}{3}\pi$; д) 4π.

3. Углы треугольника пропорциональны числам 2, 3, 5. Найдите их радианную меру.

4. Имеет ли смысл выражение:
   а) $\sqrt{-3\sin\alpha}+\sqrt{\cos\alpha}$, если $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
   б) $\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{-4\cos\alpha}}$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$?

5. Определите знак выражения:
   а) $\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}$;
   б) $\sin\frac{7\pi}{5}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$;
   в) $\sin 2\cdot\cos 1$;
   г) $\sin\frac{7\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{8}$;
   д) $\sin\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}$;
   е) $\sin 1+\cos\frac{5\pi}{3}$.

6. Верно ли, что:
   а) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}<1{,}6$;
   б) $\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}<\frac{3}{4}$?

7. Найдите значение выражения:
   а) $6\sin\frac{\pi}{2}-4\cos\frac{\pi}{3}+5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-3\sin\pi$;
   б) $\dfrac{3\sin^2\frac{\pi}{4}-2\cos^2\frac{\pi}{6}}{3\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;
   в) $\dfrac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\operatorname{tg}2\pi}{2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$;
   г) $\dfrac{4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}(-2\pi)}{4\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\frac{\pi}{6}}$.

С—61. Выражение тригонометрических функций угла через одну из них (п. 31)

1. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если известно, что:

а) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\cos\alpha = \frac{9}{41}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha = -2{,}4$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Используя калькулятор, вычислите (с точностью до 0,1) значения тригонометрических функций угла β, если известно, что:

а) $\sin\beta = 0{,}2$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

б) $\cos\beta = -0{,}8$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

в) $\operatorname{tg}\beta = -3{,}7$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

г) $\operatorname{ctg}\beta = 4{,}8$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

3. Могут ли:

а) синус и косинус некоторого угла равняться соответственно $\frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$ и $\frac{2}{\sqrt{a^2+4}}$;

б) тангенс и котангенс некоторого угла равняться соответственно $\frac{2b}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{b\sqrt{5}+b\sqrt{3}}$, где $b \neq 0$?

4. Зная, что $\cos\alpha = 1 - a^2$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. Укажите область допустимых значений a.

5. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = a$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Выразите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через a.

6. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{15}$, найдите значение выражения

$$\frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{6\cos\alpha + 5\sin\alpha}.$$

С—62. Применение основных тригонометрических формул в преобразованиях (пп. 31, 32)

1. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}^2\alpha$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$;

в) $\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \sin\alpha$;

г) $\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

2. Найдите значение выражения:

а) $(\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}2$;

б) $\dfrac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$;

в) $\dfrac{6\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{3\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$; б) $2 - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha$.

4. Докажите, что при всех допустимых значениях α верно равенство:

а) $\dfrac{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} - \sin\alpha = 1$; б) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0$.

5. Зная, что $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$, найдите значение выражения:

а) $\sin^4\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$.

6. Докажите тождество:

а) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

б) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = 2\operatorname{ctg}\alpha$.

7. Верно ли, что $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta - 2 \geqslant 0$, если $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$?

С—63. Преобразование тригонометрических выражений (п. 32)

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos^2\alpha + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$; б) $\dfrac{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

2. Известно, что $\cos\alpha = a$. Выразите через a:

а) $\sin^2\alpha$; б) $\sin^4\alpha$; в) $\sin^6\alpha$.

3. Докажите тождество:

а) $\dfrac{6\cos^2\alpha + 2\sin^4\alpha}{1+\cos^2\alpha + \cos^4\alpha} = 2$;

б) $\dfrac{1-(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = 2\operatorname{ctg}^2\alpha$.

4. Зная, что $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}3$, найдите:

а) $\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$.

5. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = 0{,}7$, найдите:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha$.

6. Докажите, что
$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=-2\ \mathrm{tg}\ \alpha \text{ при } \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$$

7. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $0{,}2\sin^4\alpha-0{,}2\cos^4\alpha$; б) $\dfrac{3-3\cos^4\alpha}{2+2\cos^2\alpha}$.

С—64. Формулы приведения (п. 33)

1. Вычислите:

а) $\sin 150°$; д) $\sin\dfrac{2\pi}{3}$; и) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)$;

б) $\cos 570°$; е) $\cos\dfrac{7\pi}{6}$; к) $\cos(-240°)$;

в) $\mathrm{tg}\ 315°$; ж) $\mathrm{tg}\dfrac{3\pi}{4}$; л) $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

г) $\mathrm{ctg}\ 225°$; з) $\mathrm{ctg}\dfrac{5\pi}{4}$; м) $\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2. Замените тригонометрической функцией угла α:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$; г) $\sin(\alpha-\pi)$;

б) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; д) $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)$; е) $\mathrm{tg}\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

3. Найдите значение выражения:

а) $3\sin 390°-4\cos 780°-\mathrm{tg}\ 135°$;

б) $\sin\dfrac{5\pi}{4}-\cos\dfrac{3\pi}{4}+10\ \mathrm{tg}\ 3\pi$;

в) $\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)-2\cos\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)+5\mathrm{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

4. Упростите выражение:

а) $\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+1$;

б) $\dfrac{\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$.

5. Докажите тождество:

а) $\cos(\alpha+\pi)\ \mathrm{ctg}(\pi-\alpha)+\dfrac{1}{\sin(2\pi-\alpha)}=-\sin\alpha$;

б) $\dfrac{\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)\ \sin(\pi+\alpha)\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\ \cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\ \operatorname{tg}(\pi+\alpha)} = -\operatorname{ctg}^2\alpha.$

6. Зная, что косинус одного из углов параллелограмма равен 0,8, найдите тригонометрические функции прилежащего угла.

7. Известно, что A, B и C — углы треугольника. Верно ли, что:

а) $\cos(A+B) = -\cos C$; б) $\sin\frac{A}{2} = \sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$?

С—65. Формулы сложения (п. 34)

1. Вычислите с помощью формул сложения:

а) $\cos 135°$; б) $\sin\frac{7\pi}{12}$; в) $\sin(-75°)$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\cos 47° \cos 13° - \sin 47° \sin 13°$;

б) $\sin 12°20' \cos 47°40' + \cos 12°20' \sin 47°40'$;

в) $\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{8}$.

3. Найдите:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

4. Зная, что $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{15}{17}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, найдите: а) $\sin(\alpha+\beta)$; б) $\cos(\alpha-\beta)$.

5. Пользуясь формулами сложения, проверьте, что:

а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$; б) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$.

6. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{6}$, найдите:

а) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

7. Известно, что $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{5}{13}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\cos\alpha$.

С—66. Применение формул сложения в преобразованиях (п. 34)

1. Упростите выражение:

а) $\sin 3\alpha \cos 5\alpha - \sin 5\alpha \cos 3\alpha$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$;

в) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

2. Косинусы двух углов треугольника равны соответственно $\frac{9}{41}$ и $\frac{4}{5}$. Найдите синус третьего угла.

3. Докажите тождество:

а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\alpha=\cos\alpha$;

б) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin^2\beta=\cos^2\alpha$;

в) $\frac{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$.

4. Докажите, что:

а) $\sin 46^\circ \sin 72^\circ + \sin 18^\circ \sin 44^\circ = \sin 64^\circ$;

б) $\cos 84^\circ \cos 36^\circ + \cos 6^\circ \cos 64^\circ = \cos 48^\circ$.

5. Зная, что $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{3}{7}$, найдите:

а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$.

6. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=3$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Определите величину угла $\alpha+\beta$.

С—67. Формулы двойного угла (п. 35)

1. Вычислите:

а) $2\sin 22^\circ30' \cos 22^\circ30'$;

б) $2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$;

в) $8\sin 165^\circ \cos 165^\circ$;

г) $\cos^2 195^\circ - \sin^2 195^\circ$;

д) $2\cos^2\frac{\pi}{12}-2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

е) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$.

2. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

3. Известно, что $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sin 106^\circ}{\cos 53^\circ}$; б) $\dfrac{\cos 84^\circ}{\sin 42^\circ - \cos 42^\circ}$; в) $\dfrac{\sin 76^\circ}{\cos 62^\circ}$.

5. Упростите выражение:

а) $1 - 2\sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$; в) $4\sin^4 \alpha + \sin^2 2\alpha$;

б) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$; г) $\dfrac{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \cos 2\alpha$.

6. Докажите тождество:

а) $(1 - \cos 2\alpha)\operatorname{ctg} \alpha = \sin 2\alpha$;

б) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \sin 2\alpha - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha$;

в) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} - \dfrac{1}{1 - \operatorname{ctg} \alpha} = 2\operatorname{tg} 2\alpha$.

7. Существует ли угол α, для которого:

а) $\sin \alpha \cos \alpha = \dfrac{6}{11}$; б) $3\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha = 3{,}12$?

С—68. Применение формул двойного угла в преобразованиях (п. 35)

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $5\cos^4 \alpha - 5\sin^4 \alpha$; б) $1 - 4\sin \alpha \cos \alpha$.

2. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\dfrac{24}{25}$. Определите синус и косинус угла при вершине.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}$; б) $\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{8}}$;

в) $\dfrac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - \sin 2\alpha + 2\sin^2 \alpha}$.

4. Найдите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = -\dfrac{2}{3}$;

б) $\sin \alpha$, если $\sin \dfrac{\alpha}{2} + \cos \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{6}$.

5. Зная, что $\cos \alpha = b$, выразите $\cos 3\alpha$ через b.

6. Докажите тождество:

а) $\mathrm{tg}\ 195° + \mathrm{ctg}\ 195° = 4$; б) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin^3 \alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3 \alpha} = -\mathrm{ctg}\,\alpha$.

7. Докажите, что:

а) $4 \cos 36° \cos 72° = 1$; б) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} = -\dfrac{1}{8}$.

С—69. Формулы суммы и разности тригонометрических функций (п. 36)

1. Представьте в виде произведения:

а) $\cos 72° - \cos 18°$; в) $\sin \alpha + \sin (60° - \alpha)$;

б) $\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{8}$; г) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right)$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sin 86° + \sin 4°}{\cos 86° + \cos 4°}$; б) $\dfrac{\cos 204° - \cos 64°}{\sin 204° - \sin 64°}$.

3. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos 11° + \sin 19°$; в) $\sin 110° - \cos 40°$;
б) $\sin 26° + \cos 16°$; г) $\cos 86° - \sin 20°$.

4. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 77° + \sin 19°}{\cos 77° - \cos 19°}$; б) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}$;

в) $\dfrac{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}$.

5. Верно ли, что:

а) $\cos 108° + \cos 106° + \cos 72° + \cos 54° = \cos 76°$;
б) $\sin 98° - \sin 82° + \sin 42° + \sin 18° = \cos 13°$?

6. Докажите, что:

а) $\sin 37° + \sin 23° - \cos 7° = 0$;
б) $\cos 84° + \cos 36° - \cos 24° = 0$.

7. Докажите тождество:

а) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha + \beta) = 4 \cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = -\mathrm{tg}\,\alpha$.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1 **К—1** (пп. 1—4; пп. 1—3Д)

1. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{2x-6}}{x-5}$.
2. Является ли четной или нечетной функция
$$f(x) = (2x+3)^3 + (2x-3)^3?$$
3. Докажите, что функция $g(x) = \sqrt{8-x}$ является убывающей.
4. Найдите область значений функции $y = \dfrac{8x}{x^2+1}$.
5. Сократите дробь $\dfrac{6x^2-11x+4}{3x^2+2x-8}$.
6. При каком значении a квадратный трехчлен $a^2 - 6a + 11$ принимает наименьшее значение?

Вариант 2 **К—1** (пп. 1—4; пп. 1—3Д)

1. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{8-x}}{x+5}$.
2. Является ли четной или нечетной функция
$$g(x) = (x+5)^3 - (x-5)^3?$$
3. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{x-15}$ является возрастающей.
4. Найдите область значений функции $y = \dfrac{x^2+4}{x}$.
5. Сократите дробь $\dfrac{10a^2+9a-9}{2a^2-5a-12}$.
6. При каком значении b квадратный трехчлен $25 + 8b - b^2$ принимает наибольшее значение?

Вариант 3 **К—1** (пп. 1—4; пп. 1—3Д)

1. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{16-4x}}{9x-18}$.
2. Является ли четной или нечетной функция
$$f(x) = (3x-1)^2 + (3x+1)^2?$$
3. Докажите, что функция $g(x) = \sqrt{9-2x}$ является убывающей.

4. Найдите область значений функции $y = \frac{6x}{x^2 + 1}$.

5. Сократите дробь $\frac{12b^2 - 17b - 5}{6b^2 - 13b + 5}$.

6. При каком значении c квадратный трехчлен $c^2 + 14c - 1$ принимает наибольшее значение?

Вариант 4 **К—1** (пп. 1—4; пп. 1—3Д)

1. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{5x - 15}}{2x - 12}$.

2. Является ли четной или нечетной функция
$$g(x) = (3x - 7)^2 - (3x + 7)^2?$$

3. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{3x - 5}$ является возрастающей.

4. Найдите область значений функции $y = \frac{x^2 + 9}{2x}$.

5. Сократите дробь $\frac{8c^2 - 2c - 3}{2c^2 - 9c - 5}$.

6. При каком значении y квадратный трехчлен $7 - 12y - y^2$ принимает наибольшее значение?

Вариант 1 **К—2** (пп. 5—7; пп. 4, 5, 7, 8Д)

1. Проведите исследование функции $y = x^2 + 2x - 3$ и постройте ее график.
2. Изобразите схематически график функции
$$y = x^2 + 2|x| - 3.$$
3. Найдите асимптоты графика функции $y = \frac{3x - 5}{x - 2}$.
4. Изобразите схематически график функции $y = |x^2 - 9|$.
5. Известно, что функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[0; 5]$ и убывает на промежутке $[5; 10]$. Как ведет себя функция $y = f(|x|)$ на промежутках $[-10; -5]$ и $[-5; 0]$?

Вариант 2 **К—2** (пп. 5—7; пп. 4, 5, 7, 8Д)

1. Проведите исследование функции $y = 5 + 4x - x^2$ и постройте ее график.

2. Изобразите схематически график функции
$$y = 5 + 4|x| - x^2.$$

3. Найдите асимптоты графика функции $y = \frac{4x + 10}{x + 3}$.

4. Постройте график функции $y = |x^2 - 2x|$.

5. Известно, что функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[0; 7]$ и убывает на промежутке $[7; 12]$. Как ведет себя функция $y = f(|x|)$ на промежутках $[-12; -7]$ и $[-7; 0]$?

Вариант 3 **К—2** (пп. 5—7; пп. 4, 5, 7, 8Д)

1. Проведите исследование функции $y = x^2 - 8x + 13$ и постройте ее график.

2. Изобразите схематически график функции
$$y = x^2 - 8|x| + 13.$$

3. Найдите асимптоты графика функции $y = -\frac{6x - 4}{2x - 1}$.

4. Постройте график функции $y = |4 - x^2|$.

5. Известно, что функция $y = g(x)$ убывает на промежутке $[0; 6]$ и возрастает на промежутке $[6; 8]$. Как ведет себя функция $y = g(|x|)$ на промежутках $[-8; -6]$ и $[-6; 0]$?

Вариант 4 **К—2** (пп. 5—7; пп. 4, 5, 7, 8Д)

1. Проведите исследование функции $y = 8 + 2x - x^2$ и постройте ее график.

2. Изобразите схематически график функции
$$y = 8 + 2|x| - x^2.$$

3. Найдите асимптоты графика функции $y = -\frac{5x - 21}{x - 4}$.

4. Постройте график функции $y = |4x - x^2|$.

5. Известно, что функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $[0; 7]$ и возрастает на промежутке $[7; 11]$. Как ведет себя функция $y = f(|x|)$ на промежутках $[-11; -7]$ и $[-7; 0]$?

Вариант 1 **К—3** (§ 5; § 6Д, пп. 14, 15)

1. Решите уравнение:
   а) $x^3 - 16x = 0$; б) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

2. Используя свойство монотонности функций, решите уравнение $x^5 + 2x^3 + 3x = 54$.

3. Докажите, что уравнение $x^3 + 3x + 2 = 0$ не имеет целых корней.
4. Найдите корни уравнения $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.
5. Решите уравнение $\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x^2-x}$.

Вариант 2 **К—3** (§ 5; § 6Д, пп. 14, 15)

1. Решите уравнение:

   а) $x^3 - 9x = 0$; б) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$.
2. Используя свойство монотонности функций, решите уравнение $x^7 + 3x^5 + 5x^3 = 9$.
3. Докажите, что уравнение $x^3 + 5x - 1 = 0$ не имеет целых корней.
4. Найдите корни уравнения $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = 0$.
5. Решите уравнение $\frac{2}{x+3} + \frac{10}{x^2+x-6} = \frac{3}{x^2-2x}$.

Вариант 3 **К—3** (§ 5; § 6Д, пп. 14, 15)

1. Решите уравнение:

   а) $x^3 - 36x = 0$; б) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$.
2. Используя свойство монотонности функций, решите уравнение $x^5 + x^3 + 2x = 44$.
3. Докажите, что уравнение $x^3 + 5x - 2 = 0$ не имеет целых корней.
4. Найдите корни уравнения $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.
5. Решите уравнение $\frac{1}{x^2+2x} - \frac{6}{x^2+7x+10} = \frac{2}{x+5}$.

Вариант 4 **К—3** (§ 5; § 6Д, пп. 14, 15)

1. Решите уравнение:

   а) $x^3 - 25x = 0$; б) $x^4 - 21x^2 + 80 = 0$.
2. Используя свойство монотонности функций, решите уравнение $x^3 + 9x = 26$.
3. Докажите, что уравнение $x^3 - x - 3 = 0$ не имеет целых корней.
4. Найдите корни уравнения $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$.
5. Решите уравнение $\frac{4}{x^2+4x} - \frac{7}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$.

Вариант 1 **К—4** (§ 4; § 6Д, п. 16; § 7Д, пп. 18, 19; § 8Д, п. 20)

1. Решите неравенство:
а) $10x^2 - 7x - 12 < 0$; б) $(x + 8)(x - 1)(x^2 - 4) > 0$.

2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{2x - 5}{x^2 - 7x - 8}}$.

3. Решите неравенство:
а) $|4x - 5| > 7$; б) $|x + 3| + |x - 4| \leqslant 9$.

4. Решите уравнение:
а) $\sqrt{6x + 3} = 4 - x$; б) $(2x^2 - x - 1)\sqrt{\dfrac{2x + 1}{5x - 8}} = 0$.

5. Найдите корни уравнения, воспользовавшись свойством монотонности функций:
$$\frac{1}{4}x^5 + \sqrt{3x - 2} = 10.$$

Вариант 2 **К—4** (§ 4; § 6Д, п. 16; § 7Д, пп. 18, 19; § 8Д, п. 20)

1. Решите неравенство:
а) $20x^2 - 7x - 6 > 0$; б) $(x + 3)(x^2 - 16)(x - 5) < 0$.

2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 12}{3x + 6}}$.

3. Решите неравенство:
а) $|5x - 3| < 8$; б) $|x + 2| + |x - 1| > 5$.

4. Решите уравнение:
а) $\sqrt{7x - 5} = x + 1$; б) $(3x^2 + 4x - 4)\sqrt{\dfrac{2x + 5}{1 - 4x}} = 0$.

5. Найдите корни уравнения, воспользовавшись свойством монотонности функций:
$$\frac{1}{9}x^3 + \sqrt{5x + 1} = 7.$$

Вариант 3 **К—4** (§ 4; § 6—8Д, пп. 16, 18, 19, 20)

1. Решите неравенство:
а) $6x^2 + 21x - 12 < 0$; б) $(x + 7)(x - 4)(x^2 - 36) > 0$.

2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{4x-8}{x^2+2x-15}}$.

3. Решите неравенство:
а) $|8x-3|>5$; б) $|x+3|+|x-5|\leqslant 10$.

4. Решите уравнение:
а) $\sqrt{8x+1}=11-2x$; б) $(2x^2+x-15)\sqrt{\dfrac{2x+5}{x-7}}=0$.

5. Найдите корни уравнения, воспользовавшись свойством монотонности функций:
$$\sqrt{7x+2}+\sqrt{5x-1}+x=9.$$

Вариант 4 **К—4** (§ 4; § 6—8Д, пп. 16, 18, 19, 20)

1. Решите неравенство:
а) $4x^2-5x-6>0$; б) $(x+8)(x-6)(x^2-49)<0$.

2. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x^2-x-20}{7x+14}}$.

3. Решите неравенство:
а) $|2x-7|<4$; б) $|x+3|+|x-5|\geqslant 12$.

4. Решите уравнение:
а) $\sqrt{8x+4}=x+2$; б) $(6x^2-7x+2)\sqrt{\dfrac{x+8}{5x-3}}=0$.

5. Найдите корни уравнения, воспользовавшись свойством монотонности функций:
$$\sqrt{8x+12}+\sqrt{3x+12}+x=4.$$

Вариант 1 **К—5** (§ 6; § 10Д)

1. Решите систему уравнений:
а) $\begin{cases} x^2+2xy=16, \\ 4x-y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ xy=10. \end{cases}$

2. Найдите множество решений системы уравнений
$$\begin{cases} (x-2y)(5x+2y)=0, \\ 2x^2-xy+2y^2=12. \end{cases}$$

3. Определите, используя графики уравнений, сколько решений имеет система
$$\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$$

4. Дорога от станции до озера идет сначала в гору, затем под гору. Рыболов на подъеме шел со скоростью на 2 км/ч меньшей, чем на спуске. Расстояние до озера рыболов прошел за 1 ч, а на обратный путь он затратил на 5 мин больше, чем на путь до озера. Найдите скорость пешехода на подъеме и на спуске, зная, что расстояние от станции до озера равно 5 км.

Вариант 2 **К—5** (§ 6; § 10Д)

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3xy + y^2 = -8, \\ x + 3y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ xy = 21. \end{cases}$

2. Найдите множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} (3x - 2y)(4y - x) = 0, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 6. \end{cases}$$

3. Используя графики уравнений, выясните, сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x = y^2 - 6, \\ xy + 1 = 0. \end{cases}$$

4. По течению реки расположены пристани A, B и C. Расстояние $AB = 12$ км, $BC = 8$ км. Катер, отправившись из A, дошел до C и, повернув обратно, прибыл в B, затратив на весь путь полтора часа. Затем катер отправился в A и тут же вернулся в B, затратив на этот путь 1 ч 21 мин. Каковы собственная скорость катера и скорость течения реки?

Вариант 3 **К—5** (§ 6; § 10Д)

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 4xy = 21, \\ 3x - y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 52, \\ xy = 24. \end{cases}$

2. Найдите множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} (x - 4y)(2x + 5y) = 0, \\ x^2 + xy - 2y^2 = 28. \end{cases}$$

3. Используя графики уравнений, выясните, сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 5, \\ x^2 - y = 1. \end{cases}$$

4. Расстояние между двумя городами, равное 480 км, пассажирский поезд по расписанию должен проходить на 2 ч быстрее, чем товарный. Из-за ремонта путей пасса-

жирский поезд вынужден был уменьшить свою скорость на 8 км/ч, а товарный — на 12 км/ч. В результате на путь между городами товарный поезд затратил на 3 ч 20 мин больше, чем пассажирский поезд. Каковы скорости товарного и пассажирского поездов по расписанию?

Вариант 4 **К—5** (§ 6; § 10Д)

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2xy + y^2 = 28, \\ x + 2y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ xy = 7. \end{cases}$

2. Найдите множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} (x + 4y)(5x - 2y) = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 27. \end{cases}$$

3. Используя графики уравнений, выясните, сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x^2 - 4x = y - 1, \\ y^2 = x + 3. \end{cases}$$

4. Моторная лодка на 21 км по течению реки и обратный путь затратила 2 ч 40 мин. В другой раз та же моторная лодка прошла по течению реки 18 км и 14 км против течения реки, затратив на весь путь 2 ч. Каковы собственная скорость моторной лодки и скорость течения реки?

Вариант 1 **К—6** (§ 11Д, 12Д)

1. Постройте прямую $x - y + 2 = 0$. Выделите штриховкой полуплоскость, в которой выражение $x - y + 2$ принимает положительные значения.
2. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y + 0{,}5x + 1 \geqslant 0, \\ y - x - 0{,}5 \leqslant 0. \end{cases}$$

3. Постройте треугольник, вершинами которого являются точки A (–3; 0), B (0; 2), C (6; 0). Задайте этот треугольник системой неравенств и определите его площадь.
4. Изобразите фигуру, заданную системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ x^2 + y^2 \geqslant 9, \end{cases}$$

и найдите ее площадь (с точностью до 0,1).

5. Задайте неравенством круг с центром в точке A (1; 2) и радиусом, равным 5.

6. Среди точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4x + 3, \\ y - x - 3 \leqslant 0, \end{cases}$$

найдите точку с наименьшей ординатой и точку с наибольшей ординатой, используя для этого схематически построенные графики функций.

Вариант 2 **К—6** (§ 11Д, 12Д)

1. Постройте прямую $x - y - 2 = 0$. Выделите штриховкой полуплоскость, в которой выражение $x - y - 2$ принимает отрицательные значения.

2. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - 0{,}5x - 2 \leqslant 0, \\ y - 0{,}5x + 4 \geqslant 0. \end{cases}$$

3. Постройте треугольник, вершинами которого яляются точки A (–2; 0), B (0; 4), C (5; 0). Задайте этот треугольник системой неравенств и определите его площадь.

4. Изобразите фигуру, заданную системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 36, \\ x^2 + y^2 \geqslant 16, \end{cases}$$

и найдите ее площадь (с точностью до 0,1).

5. Задайте неравенством круг с центром в точке A (3; 1) и радиусом, равным 7.

6. Среди точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4x, \\ y - x - 6 \leqslant 0, \end{cases}$$

найдите точку с наименьшей ординатой и точку с наибольшей ординатой, используя для этого схематически построенные графики функций.

Вариант 3 **К—6** (§ 11Д, 12Д)

1. Постройте прямую $x - y + 4 = 0$. Выделите штриховкой полуплоскость, в которой выражение $x - y + 4$ принимает положительные значения.

2. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y + x + 1{,}5 \geqslant 0, \\ y - 0{,}5x + 2 \leqslant 0. \end{cases}$$

3. Постройте треугольник, вершинами которого являются точки A (–4; 0), B (0; 2), C (3; 0). Задайте этот треугольник системой неравенств и определите его площадь.

4. Изобразите фигуру, заданную системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4, \end{cases}$$

и найдите ее площадь (с точностью до 0,1).

5. Задайте неравенством круг с центром в точке A (4; 3) и радиусом, равным 4.

6. Среди точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 - 2x, \\ y - x - 4 \leqslant 0, \end{cases}$$

найдите точку с наименьшей ординатой и точку с наибольшей ординатой, используя для этого схематически построенные графики функций.

Вариант 4 — **К—6** (§ 11Д, 12Д)

1. Постройте прямую $x - y - 4 = 0$. Выделите штриховкой полуплоскось, в которой выражение $x - y - 4$ принимает отрицательные значения.

2. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - 0{,}5x - 3 \leqslant 0, \\ y - 0{,}5x + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

3. Постройте треугольник, вершинами которого являются точки A (–3; 0), B (0; 4), C (7; 0). Задайте этот треугольник системой неравенств и определите его площадь.

4. Изобразите фигуру, заданную системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 36, \\ x^2 + y^2 \geqslant 9, \end{cases}$$

и найдите ее площадь (с точностью до 0,1).

5. Задайте неравенством круг с центром в точке A (4; 3) и радиусом, равным 6.

6. Среди точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 - 6x + 8, \\ y - x - 8 \leqslant 0, \end{cases}$$

найдите точку с наименьшей ординатой и точку с наибольшей ординатой, используя для этого схематически построенные графики функций.

Вариант 1 **К—7** (§ 7, п. 31Д)

1. Между числами 16 и –2 вставьте пять чисел, которые вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию.
2. Является ли число 16,6 членом арифметической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 18{,}2$, $b_5 = 17{,}4$, и если да, то каков его номер?
3. Укажите номер первого положительного члена арифметической прогрессии –17, –16,6, –16,2, ...
4. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_7 = -6$, $a_{12} = 24$.
5. Найдите сумму первых шестнадцати членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 5n - 1$.
6. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 6 и не превосходящих 100.

Вариант 2 **К—7** (§ 7, п. 31Д)

1. Между числами 13 и –1 вставьте шесть чисел, которые вместе с этими числами образуют арифметическую прогрессию.
2. Является ли число 23,8 членом арифметической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 28{,}8$, $b_6 = 26{,}3$, и если да, то каков его номер?
3. Укажите номер первого отрицательного члена арифметической прогрессии 19,2, 19, 18,8, ...
4. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_5 = -12$, $a_{15} = 18$.
5. Найдите сумму первых восемнадцати членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 3n + 6$.
6. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и меньших 100.

Вариант 3 **К—7** (§ 7, п. 31Д)

1. Между числами 24 и —4 вставьте шесть чисел, которые вместе с этими числами образуют арифметическую прогрессию.
2. Является ли число –29,6 членом арифметической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = -31{,}4$, $b_4 = -30{,}5$, если да, то каков его номер?
3. Укажите номер первого положительного члена арифметической прогрессии

$$-18{,}4,\ -17{,}9,\ -17{,}4,\ \ldots .$$

4. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_9 = -11$, $a_{19} = 19$.
5. Найдите сумму первых двенадцати членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 4n - 5$.
6. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 5 и меньших 100.

Вариант 4 **К—7** (§ 7, п. 31Д)

1. Между числами 17 и –3 вставьте три числа, которые вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию.
2. Является ли число –1 членом арифметической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 3{,}8$, $b_7 = 1{,}4$, и если да, то каков его номер?
3. Укажите номер первого отрицательного члена арифметической прогрессии 16,8, 16,5, 16,2, ...
4. Найдите сумму первых пятидесяти членов арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_{11} = -3$, $a_{19} = 21$.
5. Найдите сумму первых четырнадцати членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 6n + 1$.
6. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 8 и не превосходящих 100.

Вариант 1 **К—8** (§ 8, п. 31Д)

1. Найдите восьмой член геометрической прогрессии

$$-32,\ 16,\ -8,\ \ldots .$$

2. Определите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что разность между пятым и третьим членами равна 504, а разность между четвертым и вторым членами равна 168.

3. Второй и пятый члены геометрической прогрессии соответственно равны 25,5 и 688,5. Найдите члены прогрессии, заключенные между ними.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n) с положительными членами, если известно, что $b_2 = 48$ и $b_4 = 12$.

5. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:

   а) 0,(7); б) 0,2(3).

6. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 26. Если первое число оставить без изменения, второе увеличить на 3, а третье уменьшить на 2, то полученные числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Вариант 2 **К—8** (§ 8, п. 31Д)

1. Найдите девятый член геометрической прогрессии

   $$81,\ 27,\ 9,\ \ldots.$$

2. Определите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что разность между шестым и четвертым членами равна 648, а разность между пятым и третьим членами равна −216.

3. Второй и пятый члены геометрической прогрессии соответственно равны 36 и 4,5. Найдите члены прогрессии, заключенные между ними.

4. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии (b_n) с положительными членами, если известно, что $b_2 = 64$ и $b_6 = 4$.

5. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:

   а) 0,(4); б) 0,5(1).

6. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 39. Если первое число уменьшить на 17, второе оставить без изменения, а третье увеличить на 5, то полученные числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Вариант 3 **К—8** (§ 8, п. 31Д)

1. Найдите седьмой член геометрической прогрессии

   $$64,\ -16,\ 4,\ \ldots.$$

2. Определите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что разность между пятым и

третьим членами равна –84, а разность между четвертым и вторым членами равна 42.

3. Второй и пятый члены геометрической прогрессии соответственно равны 9 и $\frac{1}{3}$. Найдите члены прогрессии, заключенные между ними.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n) с положительными членами, если известно, что $b_2 = 1$ и $b_4 = 9$.

5. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:

   а) 0,(2); б) 0,06(3).

6. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 21. Если первое число оставить без изменения, второе увеличить на 6, а третье увеличить на 3, то полученные числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Вариант 4 **К—8** (§ 8, п. 31Д)

1. Найдите восьмой член геометрической прогрессии

$$27,\ -9,\ 3,\ \ldots .$$

2. Определите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что разность между шестым и четвертым членами равна –36, а разность между пятым и третьим членами равна 18.

3. Второй и пятый члены геометрической прогрессии соответственно равны 7 и $\frac{1}{49}$. Найдите члены прогрессии, заключенные между ними.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n) с положительными членами, если известно, что $b_2 = \frac{1}{16}$ и $b_4 = 1$.

5. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:

   а) 0,(6); б) 0,3(4).

6. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 35. Если первое число увеличить на 2, второе оставить без изменения, а третье уменьшить на 7, то полученные числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Вариант 1 **К—9** (§ 10)

1. Вычислите:

а) $8\sqrt[4]{625}+\sqrt[3]{-18\cdot 12}$; б) $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt[6]{27}$.

2. Решите уравнение:

а) $x^4=256$; б) $x^6-7x^3-8=0$.

3. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{a^2-6a+9}+\sqrt{a^2+6a+9}}{2a}$$ при $a=276$ и $a=-47$.

4. Представьте выражение $-\sqrt[4]{\frac{a^4}{81b^{16}}}$ в виде рациональной дроби, зная, что $a<0$.

5. Решите уравнение $\sqrt[3]{|x-2|+5}=2$.

6. Постройте график функции $y=2\sqrt[3]{|x|}-2$, где $D(y)=[-8;\ 8]$.

Вариант 2 **К—9** (§ 10)

1. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{18\cdot 72}-5\sqrt[3]{-343}$; б) $\sqrt[3]{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{11+6\sqrt{2}}-\sqrt[4]{4}$.

2. Решите уравнение:

а) $x^6=729$; б) $x^4+2x^2-24=0$.

3. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{b^2-4b+4}+\sqrt{b^2+4b+4}}{2b}$$ при $b=276$ и $b=-47$.

4. Представьте выражение $-\sqrt[6]{\frac{64x^{12}}{y^6}}$ в виде рациональной дроби, зная, что $y<0$.

5. Решите уравнение $\sqrt[4]{|x-3|-2}=1$.

6. Постройте график функции $y=2\sqrt{|x|}-2$, где $D(y)=[-9;\ 9]$.

Вариант 3 **К—9** (§ 10)

1. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{-32}+\sqrt[4]{48\cdot 27}$; б) $\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}-\sqrt[6]{27}$.

2. Решите уравнение:

а) $x^4=625$; б) $x^6-26x^3-27=0$.

3. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{c^2+10c+25}-\sqrt{c^2-10c+25}}{2c}$$ при $c=-10$ и $c=3$.

4. Представьте выражение $-\sqrt[6]{\dfrac{x^6}{729y^{12}}}$ в виде рациональной дроби, если известно, что $x<0$.

5. Решите уравнение $\sqrt[5]{|x-3|-4}=1$.

6. Постройте график функции $y=2\sqrt[3]{|x|}-1$, где $D(y)=[-8;\ 8]$.

Вариант 4 **К—9** (§ 10)

1. Вычислите:
   а) $\sqrt[6]{729}+\sqrt[3]{-45\cdot 75}$; б) $\sqrt{5+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{27+10\sqrt{2}}-\sqrt[7]{256}$.

2. Решите уравнение:
   а) $x^5=243$; б) $x^8-17x^4+16=0$.

3. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{x^2+12x+36}+\sqrt{x^2-12x+36}}{2x}$$ при $x=3$ и $x=348$.

4. Представьте выражение $-\sqrt[8]{\dfrac{256p^8}{q^{16}}}$ в виде рациональной дроби, зная, что $p<0$.

5. Решите уравнение $\sqrt[6]{|x-8|-3}=1$.

6. Постройте график функции $y=4\sqrt{|x|}-2$, где $D(y)=[-6;\ 6]$.

Вариант 1 **К—10** (§ 11)

1. Вычислите:
   а) $16^{\frac{1}{4}}\cdot(0{,}01)^{-\frac{1}{2}}$; б) $125^{\frac{1}{2}}\cdot(0{,}008)^{-\frac{1}{6}}$.

2. Упростите выражение:
   а) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; б) $\dfrac{(y^{0,75})^{\frac{1}{3}}}{y^{-3,35}(y^{0,8})^2}$.

3. Докажите, что значение выражения

$$((4+15^{0,5})^{0,5}+(4-15^{0,5})^{0,5})^2$$

является натуральным числом.

4. Упростите выражение $\dfrac{2a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} - 0{,}25b^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{2b^{\frac{1}{4}}}{2a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$.

5. Решите уравнение $x^{0,5} - 7x^{0,25} + 12 = 0$.

Вариант 2 **К—10** (§ 11)

1. Вычислите:

   а) $27^{\frac{1}{3}} \cdot (0{,}001)^{-\frac{1}{3}}$; б) $216^{\frac{1}{2}} \cdot (0{,}027)^{-\frac{1}{3}} \cdot 36^{\frac{1}{4}}$.

2. Упростите выражение:

   а) $\dfrac{y^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{1}{8}}}{y^{\frac{5}{8}}}$; б) $\dfrac{(c^{4,5})^{\frac{1}{9}}}{(c^{0,6})^2\, c^{-2,7}}$.

3. Докажите, что значение выражения

   $$\left(\left(7 + 2 \cdot 10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(7 - 2 \cdot 10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

   является натуральным числом.

4. Упростите выражение $\dfrac{3ab^{\frac{1}{2}} - 0{,}9a^{\frac{1}{2}}b}{a - 0{,}09b} + \dfrac{1{,}8b}{2a^{\frac{1}{2}} + 0{,}6b^{\frac{1}{2}}}$.

5. Решите уравнение $y^{\frac{1}{2}} - 7y^{\frac{1}{4}} + 10 = 0$.

Вариант 3 **К—10** (§ 11)

1. Вычислите:

   а) $32^{\frac{1}{5}} \cdot (0{,}04)^{-\frac{1}{2}}$; б) $0{,}0625^{\frac{1}{4}} \cdot (0{,}000064)^{-\frac{1}{6}}$.

2. Упростите выражение:

   а) $\dfrac{a^{\frac{5}{8}}a^{-\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{8}}}$; б) $\dfrac{(b^{3,5})^{\frac{1}{7}}}{(b^{0,4})^3\, b^{-3,7}}$.

3. Докажите, что значение выражения

   $$\left(7 + 5 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(7 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

   является натуральным числом.

4. Упростите выражение $\dfrac{ab^{0,5} + 2a^{0,5}b}{a - 4b} - \dfrac{0{,}4b}{0{,}2a^{0,5} - 0{,}4b^{0,5}}$.

5. Решите уравнение $x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{4}} - 14 = 0$.

Вариант 4 **К—10** (§ 11)

1. Вычислите:

   а) $49^{\frac{1}{2}} \cdot (0{,}001)^{-\frac{1}{3}}$; б) $81^{\frac{1}{4}} \cdot (0{,}000064)^{\frac{1}{6}} \cdot 125^{\frac{1}{3}}$.

2. Упростите выражение:

   а) $\dfrac{b^{\frac{3}{4}} b^{-\frac{1}{6}}}{b^{-\frac{5}{12}}}$; б) $\dfrac{(x^{1,25})^{\frac{1}{5}}}{x^{-3,95}(x^{0,3})^4}$.

3. Докажите, что значение выражения

$$((14 + 5\sqrt{3}))^{0,5} + (14 - 5\sqrt{3})^{0,5})^2$$

   является натуральным числом.

4. Упростите выражение $\dfrac{1{,}5xy^{0,5} - 3x^{0,5}y}{0{,}5x - 2y} + \dfrac{3y}{0{,}5x^{0,5} + y^{0,5}}$.

5. Решите уравнение $x^{0,5} - 6x^{0,25} + 5 = 0$.

Вариант 1 **К—11** (§ 13)

1. Известно, что $\sin\alpha = \dfrac{15}{17}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

2. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

3. Укажите наименьшее и наибольшее значения выражения:

   а) $3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; б) $4\sin^4\alpha - 4\cos^4\alpha$.

4. Зная, что $\sin\alpha = -0{,}3$, найдите значение выражения:

   а) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

5. Докажите тождество

$$\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)\left(\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right) = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

6. Зная, что $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}2$, найдите значение выражения:

   а) $\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

Вариант 2 **К—11** (§ 12, 13)

1. Известно, что $\cos\alpha = -\dfrac{40}{41}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

2. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(-\alpha)$.

3. Укажите наименьшее и наибольшее значения выражения:
а) $\sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha$; б) $2\sin^4 \alpha - 2\cos^4 \alpha$.
4. Зная, что $\cos \alpha = 0{,}1$, найдите значение выражения:
а) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$; б) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$.
5. Докажите тождество $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 \alpha$.
6. Зная, что $\sin \alpha - \cos \alpha = 0{,}2$, найдите значение выражения:
а) $\sin \alpha \cos \alpha$; б) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$.

Вариант 3 **К—11** (§ 12, 13)

1. Известно, что $\sin \alpha = -\dfrac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $\cos \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.
2. Упростите выражение $\left(\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)\cdot\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.
3. Укажите наименьшее и наибольшее значения выражения:
а) $3\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$; б) $5\sin^4 \alpha - 5\cos^4 \alpha$.
4. Зная, что $\sin \alpha = 0{,}2$, найдите значение выражения:
а) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.
5. Докажите тождество
$$\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right) = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$
6. Зная, что $\sin \alpha + \cos \alpha = 1{,}3$, найдите значение выражения:
а) $\sin \alpha \cos \alpha$; б) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

Вариант 4 **К—11** (§ 12, 13)

1. Известно, что $\cos \alpha = \dfrac{5}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите $\sin \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.
2. Упростите выражение $\left(\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\cdot\dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}(-\alpha)$.
3. Укажите наименьшее и наибольшее значения выражения:
а) $4\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$; б) $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.
4. Зная, что $\cos \alpha = -0{,}4$, найдите значение выражения:
а) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$; б) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$.

5. Докажите тождество $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1} = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha.$

6. Зная, что $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}8$, найдите значение выражения:

а) $\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$.

Вариант 1 **К—12** (§ 13, 14)

1. Найдите значение выражения:

а) $8\sin 210° + 3\operatorname{tg} 225°$; б) $\sin\dfrac{2\pi}{3} + \cos\dfrac{5\pi}{6}$.

2. Зная, что $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ и угол α острый, найдите тригонометрические функции смежного угла.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}$; б) $(1 + \cos 2\alpha)\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$.

4. Докажите тождество

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha.$$

5. Докажите, что $\operatorname{tg} 15° + \operatorname{ctg} 15° = 4$.

Вариант 2 **К—12** (§ 13, 14)

1. Найдите значение выражения:

а) $2\cos 150° - 3\operatorname{tg} 405°$; б) $\sin\dfrac{7\pi}{6} - \cos\dfrac{2\pi}{3}$.

2. Зная, что $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ и α — острый угол параллелограмма, найдите тригонометрические функции угла параллелограмма, прилежащего к той же стороне.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}$; б) $(1 - \cos 2\alpha)\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$.

4. Докажите тождество $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

5. Докажите, что $\cos 36° \cdot \cos 72° = \dfrac{1}{4}$.

Вариант 3 **К—12** (§ 13, 14)

1. Найдите значение выражения:

   а) $2\cos 240° + 2\sin 390°$; б) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{7\pi}{6}$.

2. Зная, что $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ и угол α острый, найдите тригонометрические функции смежного угла.

3. Упростите выражение:

   а) $\frac{\cos 6\alpha - \cos 4\alpha}{\sin 6\alpha + \sin 4\alpha}$; б) $(1 - \cos 2\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

4. Докажите, что

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha - \sin 2\alpha.$$

5. Докажите, что $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 4$.

Вариант 4 **К—12** (§ 13, 14)

1. Найдите значение выражения:

   а) $4\cos 240° - 3\operatorname{tg} 135°$; б) $\sin\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{11\pi}{6}$.

2. Зная, что $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и α — острый угол параллелограмма, найдите тригонометрические функции угла параллелограмма, прилежащего к той же стороне.

3. Упростите выражение:

   а) $\frac{\cos 5\alpha - \cos\alpha}{\sin 5\alpha - \sin\alpha}$; б) $(1 + \cos 2\alpha)\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$.

4. Докажите тождество $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} - \frac{1}{1 - \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

5. Докажите, что $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

Вариант 1 **К—13** (итоговая)

1. Упростите выражение $\left(\frac{b}{b^2 - 2b + 1} - \frac{b + 1}{b^2 + 2b - 3}\right)\cdot\frac{(2b - 2)^2}{3b + 1}$.

2. Решите уравнение:

   а) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$; б) $\sqrt{x - 2} = 2x - 10$.

3. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии: $-10{,}8$, $-10{,}2$, $-9{,}6$, ...

4. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ и укажите промежутки ее возрастания и убывания.

5. Представьте выражение $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{3}}}$ в виде степени с основанием a.

6. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{8}{17}$. Найдите синус угла при вершине.

7. Из пункта A в пункт B, удаленный от A на 52 км, выехал велосипедист. Спустя 40 мин навстречу ему из пункта B отправился второй велосипедист, который встретил первого на расстоянии 24 км от B. Определите, с какой скоростью ехал каждый велосипедист, если известно, что скорость второго была на 4 км/ч больше скорости первого.

Вариант 2 **К—13** (итоговая)

1. Упростите выражение $\left(\frac{a}{a^2 + 6a + 9} - \frac{a - 3}{a^2 + 2a - 3}\right) \cdot \frac{(2a + 6)^2}{a - 9}$.

2. Решите уравнение:
а) $x^3 + 11x^2 + 11x + 1 = 0$; б) $\sqrt{x - 5} = x - 11$.

3. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии: 9,8, 9,4, 9, ...

4. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ и укажите промежутки ее возрастания и убывания.

5. Представьте выражение $\frac{\sqrt{a^3} \cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{-\frac{1}{6}}}$ в виде степени с основанием a.

6. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{12}{13}$. Найдите синус угла при вершине.

7. Две машинистки должны были перепечатать некоторую рукопись. Сначала 5 дней работала только первая машинистка, а затем к ней присоединилась вторая, и они закончили перепечатку через 3 дня совместной работы. Известно, что первой машинистке на перепечатку рукописи потребовалось бы на 5 дней меньше, чем второй. За какое время могла бы перепечатать эту рукопись каждая машинистка, работая отдельно?

Вариант 3 **К—13** (итоговая)

1. Упростите выражение $\left(\frac{b}{b^2+2b+1}-\frac{b-1}{b^2-b-2}\right)\cdot\frac{(3b+3)^2}{1-2b}$.

2. Решите уравнение:
а) $x^3-7x^2+7x-1=0$; б) $\sqrt{x+14}=x-6$.

3. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии: –12,3, –11,9, –11,5, ...

4. Постройте график функции $y=\frac{1}{4}x^2+0{,}5x+2$ и укажите промежутки ее возрастания и убывания.

5. Представьте выражение $\frac{\sqrt[5]{a^4}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{5}}}$ в виде степени с основанием a.

6. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{15}{17}$. Найдите синус угла при вершине.

7. Из пункта A в пункт B вышла группа туристов. Одновременно из пункта B навстречу ей вышла вторая группа. При встрече оказалось, что первая группа прошла на 6 км меньше второй. Продолжая движение, первая группа пришла в пункт B через 5 ч 20 мин после встречи, а вторая группа пришла в пункт A через 3 ч после встречи. На каком расстоянии от пункта A произошла встреча?

Вариант 4 **К—13** (итоговая)

1. Упростите выражение $\left(\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+2}{a^2+a-6}\right)\cdot\frac{(3a-6)^2}{3a+4}$.

2. Решите уравнение:
а) $x^3-9x^2+9x-1=0$; б) $\sqrt{x-6}=x-12$.

3. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии: 10,1, 9,9, 9,7, ...

4. Постройте график функции $y=\frac{1}{4}x^2-1{,}5x+2$ и укажите промежутки ее возрастания и убывания.

5. Представьте выражение $\frac{\sqrt[6]{a}\cdot a^{\frac{1}{4}}}{a^{-\frac{1}{3}}}$ в виде степени с основанием a.

6. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{5}{13}$. Найдите синус угла при вершине.

7. Два трактора, работая совместно, могут вспахать поле за 12 ч. Если бы сначала половину поля вспахал первый трактор, а затем второй трактор вспахал оставшуюся часть, то на вспашку поля было бы затрачено 25 ч. За какое время может вспахать это поле каждый трактор, работая отдельно?

Задачи повышенной трудности

1. Докажите, что функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 5}{x - 2}$ является возрастающей в каждом из промежутков $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$. Является ли она возрастающей на всей области определения?

2. Найдите координаты точек пересечения графика функции $g(x) = x^2 + \sqrt{x-1} + |x + 3|$ и прямой $y = 10$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{16x}{x^2 + 1}$, если они существуют.

4. Докажите, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет рациональных корней, если коэффициенты p и q — целые нечетные числа.

5. Решите относительно x неравенство $\dfrac{ax}{x^2 + 4} > 2$.

6. Докажите, что если числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию, то верно равенство:
$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

7. Докажите, что $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1$.

8. Упростите выражение: $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} - \sqrt[3]{\dfrac{2}{9}} + \sqrt[3]{0{,}048}$.

9. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x + 24} + \sqrt{x + 1} = 5$;

б) $\dfrac{(x - 6)\sqrt{26 - x} - (26 - x)\sqrt{x - 6}}{\sqrt{x - 6} - \sqrt{26 - x}} = 8$.

10. Докажите, что $\sin 10° \sin 50° \sin 70° = \dfrac{1}{8}$.

11. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

ОТВЕТЫ

Самостоятельные работы

Вариант 1

С—1. **4.** $x = -3$ и $x = 4$. **5.** -3; -2; 0. **8.** б) Указание. Например, $f(x) = 5x^2 + (6x - 6x)$. **С—2.** **4.** Функция убывает в каждом из промежутков $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$. **7.** а) $(3; 5)$; б) $(-\infty; 1)$. **С—3.** **5.** а) 109; 9; б) 1001; -999. **6.** 4; наименьшего значения нет. **С—4.** **1.** а) $(-\infty; 3) \cup (3; 7) \cup (7; +\infty)$; б) $(-\infty; -9] \cup [2; 5) \cup (5; +\infty)$; в) $[0; 2) \cup (2; +\infty)$. **2.** а) $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$. **3.** $[2; +\infty)$. Указание. Воспользуйтесь неравенством $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, где $a > 0$. **4.** а) $y = 0$ при $x = -0{,}5$; 0; $0{,}5$; $y > 0$ при $x \in (-0{,}5; 0) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $y = 0$ при $x = -1$ и $x = 5$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$. **6.** б) Указание. Если x_1 и x_2 принадлежат промежутку $[a; b]$ и для них выполняется неравенство $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, то график функции будет выпуклым вверх; если же выполняется неравенство $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, то график функции будет выпуклым вниз (т. е. вогнутым). **С—5.** **3.** а) $(x - 4)^2 + 7$; б) $(2x + 3)^2 - 11$. **5.** $0{,}16$ при $a = 0{,}5$. **С—6.** **3.** а) $\frac{a - 7}{a - 3}$; б) $\frac{b - 12}{2b - 6}$; в) $\frac{2x + 2y + 1}{4}$. **4.** $\frac{y + 12}{y + 6}$. **5.** $-\frac{2}{11}$. **С—8.** **6.** $q = 5$. **С—10.** **7.** а) $[-6; 15]$; б) $[-15; 6]$; в) $[-15; 6]$. **С—11.** **6.** а) -2; 0; 4; 6; б) -4; -3; 3; 4. **С—12.** **6.** а) не существует; б) существует; в) существует. **С—14.** **5.** При $a = 8$ и при $a = 21\frac{2}{3}$. **6.** При $m = 1{,}2$. **С—15.** **3.** При $a = 4$, $b = 27$. **4.** При $a = 1$. **5.** При $a = 5$. **С—16.** **5.** $x^2 - 7x - 8 < 0$. **С—17.** **4.** в) 4; г) -2; 2; 3. **С—18.** **3.** а) 2; б) 1; в) -2; -1; 1; 3; г) -2; 1. **4.** а) 1; $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$; $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; б) 1; $\frac{7 - \sqrt{41}}{2}$; $\frac{7 + \sqrt{41}}{2}$. **5.** а) -11; 6. Указание. Замените трехчленами произведения $(x + 1)(x + 4)$ и $(x + 2)(x + 3)$; б) 7; -2. **6.** а) $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$; $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$; б) 1; $3 - \sqrt{5}$; $3 + \sqrt{5}$. **7.** а) -1; б) 3; в) -2; 2; г) -1; 1. **8.** $(-3; 2)$, $(3; 2)$. **9.** а) Если $a = 0$, то один корень $x = 0$; если $a \neq 0$, то два корня: $x = 0$ и $x = \frac{5}{a}$; б) Если $b = 1$, то один корень $x = 1$; если $b < 1$, то два корня: $x = 1 - \sqrt{1 - b}$ и $x = 1 + \sqrt{1 - b}$; если $b > 1$, то корней нет. **С—19.** **1.** а) -3; б) -6; 4.

2. $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{3}$. 3. 2; 5; $5+2\sqrt{3}$; $5-2\sqrt{3}$. 4. $\frac{1}{2}$; 2. 5. 10; $5-\sqrt{3}$; $5+\sqrt{3}$. 6. а) 4; $\frac{1-\sqrt{37}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{37}}{2}$; б) 3; $\frac{3-\sqrt{41}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{41}}{2}$. **С—20.** 5. а) –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; б) –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4. **С—21.** 7. а) (–6; 1); б) $(-\infty; 8] \cup (16; +\infty)$; в) [–1,2; 10); г) $(-\infty; 0) \cup [22; +\infty)$. **С—22.** 1. а) $(-\infty; -3] \cup [2; 3]$; б) $(-\infty; -5] \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$; в) $(-1; 2) \cup (3; 9)$; г) $(-8; -6) \cup (3; +\infty)$. 3. а) $(-\infty; -3] \cup (1; 3]$; б) $(-4; 1) \cup [2; +\infty)$. 6. $[1; +\infty)$. 7. –3; –2; –1; 0; 3; 4; 5; 6. **С—23.** 7. а) {3; 7}; (3; 7); $(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$; б) {–5; –3}; (–5; –3); $(-\infty; -5) \cup (-3; +\infty)$. **С—24.** 3. а) –1; 7; б) 1,5; $\frac{-11-\sqrt{129}}{4}$. 4. а) (–3,5; 6) и (2,5; 6); б) $\{(x; y) \mid -3 \leqslant x \leqslant 2;\ y = 5\}$; в) $\varnothing$. 5. а) –3; 3; б) [–2; 2]; в) $\varnothing$; г) –2; 2; д) 0; е) $\varnothing$. 6. а) 2; $\frac{-1-\sqrt{37}}{3}$; б) $-\sqrt{14}$; $\sqrt{14}$. 7. а) –9; 9; б) –8; 0; 8; в) –6; –2; 2; 6; г) –4; 4. Указание. Сначала постройте график функции $f(x) = |x| - 4$, а затем график функции $y = |f(x)|$, т. е. $y = ||(x)| - 4|$. **С—25.** 2. а) $(-\sqrt{5}; -1) \cup (1; \sqrt{5})$; б) $\left[-8; \frac{-7-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{-7+\sqrt{17}}{2}; 1\right]$; в) $(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$. 4. а) (–2; 2); б) $\left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right] \cup \left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$. 5. а) [–2,8; 2]. 6. {0; 1; 2; 3; 4}. 7. (–1; 0). **С—26.** 1. а) 7; б) 4; в) 2; г) 5. 3. а) 5; б) $\varnothing$. 4. а) 3; б) 5. 5. а) –5; 5; б) –2; 2. 6. а) 4; 7; б) 0,4. 7. 5. Указание. Воспользуйтесь свойством, что если f — возрастающая функция, а g — убывающая функция, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. 8. а) $\frac{1-\sqrt{85}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{85}}{2}$; б) 6; в) $\frac{1}{9}$; 4. 9. а) –7; 5; б) –2; 2; 3. **С—27.** 1. в) $\left[1\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}\right)$; г) $\left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$. 2. а) $(-2; -1] \cup [6; 7)$; б) $(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$. 3. [2; 6) и $(6; +\infty)$. 4. а) $(1+\sqrt{2}; +\infty)$; б) $\left[-\frac{1}{2}; 1+\sqrt{2}\right)$; в) $\left(\frac{9+\sqrt{161}}{8}; +\infty\right)$; г) $\left[\frac{1}{2}; \frac{9+\sqrt{161}}{8}\right)$. 6. а) [–8; 3]; б) $[1; 2] \cup [3; +\infty)$. 7. а) (2; 18]; б) $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$. 8. а) $(-\infty; 2{,}5)$; б) $(-3; -1) \cup (1; 3)$. **С—28.** 3. $(-\sqrt{2}; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$, $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$. 4. (0; 0), (2; –2), (4; 4), (6; 2). 5. 10. 6. Таких чисел пять: 51; 62; 73; 84; 95. **С—29.** 2. Пара прямых $y = -2x$ и $y = 2x$. **С—31.** 3. а) (–4; –3), (2,5; –3), (2,5; 3); б) (0,5; 0), $\left(0{,}5; \frac{2}{3}\right)$. 4. а) (–3; 1), (3; –1),

$\left(\frac{15}{\sqrt{19}};\ \frac{3}{\sqrt{19}}\right)$, $\left(-\frac{15}{\sqrt{19}};-\frac{3}{\sqrt{19}}\right)$; б) (–2; –1), (2; 1), $\left(-\frac{1}{3}\sqrt{33};\ -\frac{1}{9}\sqrt{33}\right)$, $\left(\frac{1}{3}\sqrt{33};\ \frac{1}{9}\sqrt{33}\right)$. **5.** а) (–5; –1), (5; 1); б) (–2; –3), (–3; –2), (2; 3), (3; 2). **6.** а) (–2; –7); (–7; –2), (2; 7), (7; 2); б) (9; 4), (4; 9). **7.** а) (5; 3); б) (9; 3). **С—32. 1.** 150 км; 75 км/ч; 90 км/ч. **2.** 7 км/ч; 2,4 км. **3.** За 40 ч и за 60 ч. **4.** 20 кг и 10 кг. **5.** 8 Н и 15 Н. **6.** 500 р.; 5%. **С—33. 6.** $x - y < 1$. **7.** При $a > 0$. **С—34. 7.** $\begin{cases} y < 1{,}5x + 1, \\ y > 1{,}5x - 3, \\ y < -0{,}5x + 2, \\ y > -0{,}5x - 3. \end{cases}$ **С—35. 3.** $\begin{cases} y < x + 4, \\ y < -x + 4, \\ y > 1. \end{cases}$ **С—36. 7.** Неравенству удовлетворяют точки гиперболы $y = \frac{12}{x}$, а также точки, расположенные выше ветви гиперболы в первом координатном углу и ниже ветви гиперболы в третьем координатном углу. **С—37. 3.** а) 37,7; б) 39,3. **6.** $(-1+\sqrt{6};\ \sqrt{6})$; (–1,5; –6,25). **С—38. 1.** б) *Указание.* Исключите точки прямой $x = 1$ и покажите штриховкой области для случаев, когда $x > 1$ и $x < 1$. **4.** 8 кв. ед. **6.** Объединение двух сегментов, первый из которых — расположенная в правой полуплоскости часть круга с центром (3; 2) и радиусом 5, а второй — расположенная в левой полуплоскости часть круга с центром (–3; 2) и радиусом 5. **С—39. 2.** 4 кв. ед. **3.** $(\sqrt{3};\ 0)$, (3; 6). **5.** $\frac{25\pi}{4} \approx 19{,}6$ кв. ед. **7.** 2 кв. ед. **С—40. 6.** в) Нет; г) да, $n = 24$. **7.** $b_2 = -4$, $b_3 = -6$, $b_4 = -6$, $b_5 = -4$. **С—41. 6.** $n = 13$. **7.** *Указание.* Выразите a_1 через d. **8.** а) Да; б) нет. **С—42. 4.** 17,5. **6.** 6 ч. **7.** а) $x = 29$; б) $x = 14$. *Указание.* Найдите сначала номер последнего числа прогрессии. **8.** $a = 2$, $d = 3$ или $a = -10$, $d = 9$. **С—43. 3.** 13. **4.** а) Да, $a_1 = 6$; $d = 8$; б) нет. **5.** $y = 2x - 2$. **С—44. 3.** $a_1 = 30$, $q = 2$. **5.** 49; 98. **6.** 1344. **7.** 5, 15, 45, 135 или 135, 45, 15, 5. **С—45. 4.** $26\frac{26}{27}$. **6.** а) $q = 3$, $n = 5$; б) $n = 7$, $a_n = 1$. **7.** 341. **С—46. 3.** 242. **4.** 7, 14, 28 или 28, 14, 7. **5.** 4, 8, 12, 18 или $17\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$. *Указание.* Обозначив три последних числа через a, aq, aq^2, выразите первое число. **6.** $a = 1$, $q = 3$ или $a = 9$, $q = \frac{1}{3}$. *Указание.* Возведите в квадрат обе части равенства $a + aq + aq^2 = 13$. **С—47. 5.** $a_1 = 54$, $q = \frac{1}{3}$. **6.** 512 см^2. **С—48. 3.** *Указание.* Воспользовавшись тем, что $b_{k+1} = 5(k+1)^2 - 3$, выразите b_{k+1} через b_k. **5.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $5^{k+1} - 1 = 5^{k+1} - 5 + 5 - 1$. **6.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $13^{k+1} = 13^k(6p + 1)$, где $p \in N$.

С—50. 6. Указание. а) воспользуйтесь тем, что $b_n = 1 - \frac{6}{n+6}$; б) воспользуйтесь тем, что $b_n = 1 - \frac{5}{n^2+1}$. **С—51. 3.** $n = 10$. **С—52. 6.** б) 0; $\sqrt[3]{4}$. **7.** в) Указание. Воспользуйтесь тем, что число, равное 6^n, где $n \in N$, оканчивается цифрой 6. **С—53. 7.** в) [0; 1]. **8.** б) $\sqrt[6]{4}$ и $-\sqrt[6]{4}$; в) $\sqrt[4]{5}$ и $-\sqrt[4]{5}$. **9.** б) График — прямая $y = x$. **С—54. 3.** г) 2. **4.** г) $-x\sqrt[4]{-49x}$. **7.** б) $ab^3\sqrt[4]{5}$. **9.** б) 625; в) корней нет. **10.** $\frac{\sqrt{a+5}}{|a|}$; а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{4}$. **С—55. 7.** а) $0 < x^{\frac{1}{4}} < 2$; в) $0{,}1 < x^{\frac{1}{4}} < 1$. **С—56. 3.** а) $1\frac{1}{2}$; б) $6\frac{1}{4}$. **5.** а) 8; 27; б) 125; –64; –1. **7.** Указание. Представьте $6a^{\frac{1}{3}}$ в виде суммы $2a^{\frac{1}{3}} + 4a^{\frac{1}{3}}$. **8.** б) Часть прямой $y = x$, расположенная в первом координатном углу. **С—57. 5.** Указание. Воспользуйтесь тем, что $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$. **6.** а) $\frac{2}{b + 4b^{\frac{1}{2}}}$; б) $a^{\frac{3}{7}}$. **С—58. 3.** а) Нет; г) нет. **6.** а) 4 и 6; б) –3 и 5; в) 2 и 3. **С—59. 6.** а) $1 - a$; б) a; в) $-a$. **7.** Первой координатной четверти. **С—60. 5.** в) Указание. Учтите, что угол, равный 2 радианам, принадлежит второй координатной четверти. **7.** в) $-\frac{4}{5}$; г) $-\frac{5}{4}$. **С—61. 3.** а) Да; б) да; если $b = 8$. **6.** 7,5. **С—62. 2.** в) $\frac{25}{32}$. **3.** а) 1; 3; б) 2; 5. **5.** а) $\frac{2304}{2401}$; б) $-1\frac{2}{47}$. **С—63. 4.** а) –0,22; б) 0,936. **5.** а) 2,09; б) 0,927. **7.** а) 3; б) 0,5. **С—64. 4.** а) $\cos^2\alpha$; б) $-\frac{1}{\sin\alpha}$. **6.** б) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$. **С—65. 4.** а) $\frac{44}{125}$; б) $\frac{3}{5}$. **7.** $\frac{84}{205}$. Указание. Используйте равенство $\cos\beta = \cos((\alpha + \beta) - \alpha)$. **С—66. 4.** а) Указание. Воспользуйтесь тем, что $\cos 20° = \sin 70°$; $\cos 80° = \sin 10°$. **5.** а) $-\frac{1}{5}$; б) –5. **6.** 135°. **С—67. 5.** а) $\cos\alpha$; б) 2; в) $4\cos^2\alpha$; г) $\cos 2\alpha$. **7.** а) Нет; б) нет. **С—68. 1.** а) 6 и –6; б) 5 и –3. **3.** в) $-\sin\alpha - \cos\alpha$. **4.** а) $-\frac{45}{49}$; б) $\frac{35}{36}$. **5.** $\sin 3\alpha = 3a - 4a^3$. Указание. Воспользуйтесь тем, что $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$. **6.** а) Указание. Умножьте обе части равенства на $\sin 15° \cos 15°$. б) Указание. Докажите сначала, что $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$. **7.** а) Указание. Умножьте обе части равенства на $\sin 20°$. б) Указание. Умножьте обе части равенства на $4\sin\frac{2\pi}{5}$. **С—69. 4.** в) $\operatorname{tg} 7\alpha$. **5.** а) Да; б) да. Указание. Сгруппируйте первое слагаемое с третьим, а второе с четвертым. **6.** Указание. Сгруппируйте первые два слагаемых. **7.** Указание. Сгруппируйте первые два слагаемых и представьте $\sin(\alpha - \beta)$ как синус двойного угла.

Вариант 2

С—1. 4. $x = 8$ и $x = -11$. **5.** -7; -5; 0. **8.** б) Указание. Например, $f(x) = 3x + (x^2 - x^2)$. **С—2. 4.** Функция возрастает в каждом из промежутков $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. **7.** а) $(-3; 4)$; б) $(-3; 5)$. **С—3. 5.** а) 21; -4; б) 119; -131. **6.** -2; не существует. **С—4. 1.** а) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -4] \cup [4; 7) \cup (7; +\infty)$; в) $[-2; 0) \cup (0; +\infty)$. **2.** а) $[0; 6)$; б) $[0; +\infty)$. **3.** $[2; +\infty)$. Указание. Воспользуйтесь неравенством $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, где $a > 0$. **4.** а) $y = 0$ при $x = -6$; 0; 6; $y < 0$ при $x \in (-\infty; -6) \cup (0; 6)$; $y > 0$ при $x \in (-6; 0) \cup (6; +\infty)$; б) $y = 0$ при $x = -2$ и $x = 7$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-2; 7)$. **6.** б) Указание. Если x_1 и x_2 принадлежат промежутку $[a; b]$ и для них выполняется неравенство $g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}$, то график функции будет выпуклым вверх, если же выполняется неравенство $g\frac{(x_1 + x_2)}{2} < \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}$, то график функции будет выпуклым вниз (т. е. вогнутым). **С—5. 3.** а) $(x - 5)^2 - 17$; б) $(3x + 2)^2 + 25$. **5.** 3 при $b = 18$. **С—6. 3.** а) $\frac{x - 12}{x - 13}$; б) $\frac{y - 6}{3y - 7}$; в) $\frac{3a - 3b + 1}{5}$. **4.** $\frac{x + 7}{x + 3}$. **5.** $\frac{1}{7}$. **С—8. 6.** $q = 15$. **С—10. 7.** а) $[-10; 5]$; б) $[-5; 10]$; в) $[-5; 10]$. **С—11. 6.** а) 0; 2; 4; 6; б) -5; -1; 1; 5. **С—12. 6.** а) Не существует; б) существует; в) существует. **С—14. 5.** При $a = 4$ и при $a = -6{,}5$. **6.** При $m = 1{,}2$. **С—15. 3.** При $a = 3{,}5$ и $b = 9\frac{3}{4}$. **4.** При $a = 65$. **5.** При $a = -3$. **С—16. 5.** $x^2 - 3x - 10 < 0$. **С—17. 4.** в) 5; $-0{,}4\sqrt{5}$, $0{,}4\sqrt{5}$; г) -3; 3; 4. **С—18. 3.** а) 1; б) -2; 1; 3; в) -1; 1; 2; г) -1; 2. **4.** а) -1; $1 - 3\sqrt{2}$; $1 + 3\sqrt{2}$; б) 2. **5.** а) -11; 2. Указание. Замените трехчленами произведения $(x + 3)(x + 6)$ и $(x + 4)(x + 5)$; б) 1; 6. **6.** а) $4 - \sqrt{15}$; $4 + \sqrt{15}$; б) $-4 - \sqrt{15}$; -1; $-4 + \sqrt{15}$. **7.** а) 1; б) 3; в) -3; 3; г) -1; 1. **8.** $(-5; 3)$, $(5; 3)$. **9.** а) Если $b = 0$, то один корень $y = 0$; если $b \neq 0$, то два корня: $y = 0$ и $y = \frac{8}{b}$; б) если $c = 4$, то один корень $y = 2$; если $c < 4$, то два корня: $y = 2 - \sqrt{4 - c}$ и $y = 2 + \sqrt{4 - c}$; если $c > 4$, то корней нет. **С—19. 1.** а) $-\frac{2}{11}$; 6; б) -1; 2. **2.** $\frac{2}{8}$ и $\frac{8}{2}$. **3.** $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 7. **4.** $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 2; 3. **5.** 2; $\frac{-4 - \sqrt{7}}{3}$;

$\frac{-4+\sqrt{7}}{3}$. **6.** а) $3; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$; б) $-1\frac{2}{3}$; 4. **С—20. 5.** а) 4; 5; 6; б) –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. **С—21. 7.** а) (–7; 3); б) $(-\infty; -8) \cup (11; +\infty)$; в) [–2,8; 8); г) $(-\infty; 0) \cup (27; +\infty)$. **С—22. 1.** а) $(-\infty; -5] \cup [-4; 4]$; б) $(-\infty; -7] \cup \{2\} \cup [7; +\infty)$; в) (–5; 3); г) $(-7; -6) \cup (-4; +\infty)$. **3.** а) $(-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup [2; 4)$; б) $(-11; 1] \cup [3; +\infty)$. **6.** $[0{,}5; 1] \cup [2; +\infty)$. **7.** –2; –1; 0; 2; 3; 4; 5. **С—23. 7.** а) {2; 4}; (2; 4); $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$; б) {–4; 2}; (–4; 2); $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$. **С—24. 3.** а) 2; 3; б) –3; $\frac{1}{3}$. **4.** а) (–3; 5) и (2; 5); б) $\{(x; y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 1;\ y = 3\}$; в) $\varnothing$. **5.** а) $\varnothing$; б) [–3; 3]; в) –4; 4; г) –3; 3; д) –1; 1; е) 0. **6.** а) –2,8; 2; б) $-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}$. **7.** а) –11; 11; б) –10; 0; 10; в) –7; –3; 3; 7; г) –5; 5. Указание. Сначала постройте график функции $f(x) = |x| - 5$, а затем график функции $y = |f(x)|$, т. е. $y = ||x| - 5|$. **С—25. 2.** а) $(-\sqrt{7}; -1) \cup (1; \sqrt{7})$; б) $[-6; -3] \cup [-2; 1]$; в) $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$. **4.** а) [–10; 10]; б) $(-\infty; -12) \cup (12; +\infty)$. **5.** $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{37}}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. **6.** {1; 2; 3; 4; 5}. **7.** (0; 1). **С—26. 1.** а) 6; б) 9; в) 4; г) 3. **3.** а) $3\frac{1}{8}$; б) 0; $\frac{1}{2}$. **4.** а) 2; б) 4. **5.** а) –3; 3; б) –1; 1. **6.** а) –5; 4; б) $\frac{17}{16}$. **7.** 3. Указание. При решении воспользуйтесь свойством, что если f — возрастающая функция, а g — убывающая функция, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. **8.** а) $\frac{3-\sqrt{85}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{85}}{2}$; б) 6; в) $7\frac{2}{7}$; $-8\frac{3}{17}$. **9.** а) –8; 4; б) –4; –3; 3. **С—27. 1.** в) [0,4; 2,2); г) $(2{,}2; +\infty)$. **2.** а) $(-5; -4] \cup [5; 6)$; б) (1; 4). **3.** [4; 8) и $(8; +\infty)$. **4.** а) $\left[\frac{1}{3}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$; б) $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$; в) $(6; +\infty)$; г) $\left[-\frac{1}{4}; 6\right)$. **6.** а) [–7; 5]; б) $(-4; -1) \cup (2; +\infty)$. **7.** а) (–3; 13]; б) $(-\infty; 1-\sqrt{17}) \cup (1-\sqrt{10}; 0] \cup [2; 1+\sqrt{10}) \cup (1+\sqrt{17}; +\infty)$. **8.** а) $(-\infty; 4)$; б) $(-4; -3) \cup (3; 4)$. **С—28. 3.** (–2; –2); (–2; 2). **4.** (–4; 2), (–3; 3), (–1; –1), (0; 0). **5.** 11. **6.** 61 или 72 или 83 или 94. **С—29. 2.** Графиком является пара прямых $y = -0{,}5x$ и $y = 0{,}5x$. **С—31. 3.** а) $\left(\frac{2}{3}; -4\right)$, $\left(\frac{2}{3}; 8\right)$, $\left(-3\frac{1}{3}; -4\right)$; б) $\left(\frac{1}{4}; -1\right)$, $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, $\left(\frac{2}{5}; -\frac{4}{5}\right)$. **4.** а) (–2; –2), (2; 2), $\left(\frac{-2\sqrt{14}}{7}; \frac{-6\sqrt{14}}{7}\right)$; $\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}; \frac{6\sqrt{14}}{7}\right)$; б) (–4; –2), (4; 2), $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{42}; -\frac{1}{6}\sqrt{42}\right)$, $\left(\frac{2}{3}\sqrt{42}; \frac{1}{6}\sqrt{42}\right)$. **5.** а) (–4; –5), (4; 5),

$(-3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $(3\sqrt{3}; \sqrt{3})$; б) $(-4; -2)$, $(4; 2)$, $\left(-\frac{8\sqrt{39}}{39}; \frac{10\sqrt{39}}{39}\right)$, $\left(\frac{8\sqrt{39}}{39}; -\frac{10\sqrt{39}}{39}\right)$. **6.** а) $(-3; -5)$, $(-5; -3)$, $(3; 5)$, $(5; 3)$; б) $(1; 4)$, $(4; 1)$. **7.** а) $(2; 1)$; б) $(7; 2)$. **С—32. 1.** 30 км; 60 км/ч. **2.** 22 км/ч; 12 км. **3.** Первая труба за 45 мин, вторая — за 30 мин. **4.** 4 кг и 6 кг. **5.** 8 Н и 15 Н. **6.** 400 р.; 5%. **С—33. 6.** $x - 2y < 2$. **7.** При $a < 0$. **С—34. 7.** $\begin{cases} x + y < 4, \\ 0{,}5x - y < 2, \\ y - 0{,}5x < 4, \\ x + y > -6. \end{cases}$

С—35. 3. $\begin{cases} y < x + 5, \\ y < -x + 5, \\ y > -2. \end{cases}$ **С—36. 7.** Неравенству удовлетворяют точки гиперболы $y = \frac{6}{x}$, а также точки, расположенные выше ветви гиперболы в первом координатном углу и ниже ветви гиперболы в третьем координатном углу. **С—37. 3.** а) 50,2; б) 25,1. **6.** $(5 + \sqrt{10}; 10 + 2\sqrt{10})$, $(4; -1)$. **С—38. 1.** б) Исключите точки прямой $x = 3$ и покажите штриховкой области для случаев, когда $x > 3$ и $x < 3$. **4.** 32 кв. ед. **6.** Объединение двух сегментов, первый из которых — расположенная в правой полуплоскости часть круга с центром $(1; 3)$ и радиусом 4, а второй — расположенная в левой полуплоскости часть круга с центром $(-1; 3)$ и радиусом 4. **С—39. 2.** 3 кв. ед. **3.** $(2; 0)$, $(4; 12)$. **5.** $\frac{81\pi}{4} \approx 63{,}6$ кв. ед. **7.** 18 кв. ед. **С—40. 6.** в) Нет; г) да, $n = 14$. **7.** $c_3 = -5$, $c_4 = -8$, $c_5 = -9$, $c_6 = -8$, $c_7 = -5$. **С—41. 6.** $n = 13$. **7.** Указание. Выразите a_1 через d. **8.** а) Да; б) нет. **С—42. 4.** $-22{,}5$. **6.** 5 ч. **7.** а) $x = 15$; б) $x = 1$. Указание. Найдите сначала номер последнего члена прогрессии. **8.** $a_1 = 3$, $d = 2$ или $a_1 = -10$, $d = 8{,}5$. **С—43. 3.** 17. **4.** а) Да; $a_1 = 3$; $d = 8$. б) нет. **5.** $y = 3x - 2$. **С—44. 3.** $a_1 = \frac{17}{30}$, $q = 5$. **5.** 1; 3; 9; 27. **6.** 18 954. **7.** 2, 10, 50, 250 или 250, 50, 10, 2. **С—45. 4.** $63\frac{63}{64}$. **6.** а) $q = 4$, $n = 5$; б) $n = 4$, $a_n = -9$. **7.** 94,5. **С—46. 3.** 341. **4.** 4, 12, 36 или 36, 12, 4. **5.** -4, 4, 12, 36. Указание. Обозначив три последних числа через a, aq, aq^2, выразите первое число. **6.** $a_1 = 2$, $q = 2$ или $a_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$. Указание. Возведите в квадрат обе части равенства $a + aq + aq^2 = 14$. **С—47. 5.** $a_1 = 144$, $q = \frac{1}{4}$. **6.** 384 см. **С—48. 1.** Указание. Воспользовавшись тем, что $b_{k+1} = 4(k + 1)^2 + 1$, выразите b_{k+1} через b_k. **5.** Указание. Воспользуйтесь тем, что $9^{k+1} - 1 = 9^{k+1} - 9 + 9 - 1$. **6.** Указание. Воспользуйтесь тем, что $15^{k+1} = 15^k(7p + 1)$, где $p \in \mathbf{N}$.

С—50. **6.** Указание. Воспользуйтесь тем, что а) $b_n = 1 - \dfrac{6}{n+6}$; б) $b_n = 1 - \dfrac{5}{n^2+1}$. **С—51.** **3.** $n = 40$. **С—52.** **6.** б) 0; $\sqrt[3]{16}$. **7.** в) Нет. **С—53.** **7.** в) [0; 2]. **8.** б) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$; в) $\sqrt[5]{6}$ и $\sqrt[5]{-5}$. **9.** График — часть прямой $y = x$, расположенная в первом координатном углу. **С—54.** **3.** г) 3. **4.** г) $-2y\sqrt[4]{-y^3}$. **7.** б) $-xy^2\sqrt[4]{7}$. **9.** б) 256; в) корней нет. **10.** $\dfrac{\sqrt{b+3}}{|b|}$; а) $\dfrac{5}{12}$; б) $\dfrac{1}{12}$. **С—55.** **7.** а) $0 < y^{\frac{1}{4}} < 3$; в) $0{,}1 < y^{\frac{1}{4}} \leqslant 2^{\frac{1}{4}}$, $2^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}2$. **С—56.** **3.** а) 10; б) 8. **5.** а) 27; 64; б) –729; –1; 1000. **7.** Указание. Представьте $6b^{\frac{1}{6}}$ в виде суммы $2b^{\frac{1}{6}} + 4b^{\frac{1}{6}}$. **8.** Часть прямой $y = x$, расположенная в первом координатном углу. **С—57.** **5.** Указание. Воспользуйтесь тем, что $7 - 2\sqrt{6} = (1 - \sqrt{6})^2$. **6.** а) $\dfrac{c^{\frac{1}{3}} - 2}{c-8}$; б) $a^{0,4}$. **С—58.** **3.** а) Нет; в) нет. **6.** а) 4 и 6; б) –4 и 2; в) 1 и 2. **С—59.** **6.** а) $1 + b$; б) b; в) b. **7.** Второй координатной четверти. **С—60.** **5.** в) Указание. Угол, равный 2 радианам, принадлежит второй четверти. **7.** в) $\dfrac{1}{2}$; г) $-\dfrac{2}{5}$. **С—61.** **3.** а) Да; б) да. **6.** –0,24. **С—62.** **2.** в) 10. **3.** а) 1; –2; б) 5; 1. **5.** а) $\dfrac{25}{81}$; б) $\dfrac{1}{9}$. **С—63.** **4.** а) 0,455; б) 0,4365. **5.** а) 2,49; б) 2,443. **7.** а) 0,2; б) 1,5. **С—64.** **4.** б) $-\dfrac{1}{\cos\alpha}$. **6.** $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{4}{3}$. **С—65.** **4.** а) $\dfrac{36}{85}$; б) $\dfrac{13}{85}$. **7.** $\dfrac{33}{65}$. Указание. Используйте равенство $\cos\alpha = \cos((\alpha+\beta) - \beta)$. **С—66.** **4.** а) Воспользуйтесь тем, что $\sin 18° = \cos 72°$, $\sin 44° = \cos 46°$. **5.** а) $-\dfrac{2}{5}$; б) $-2\dfrac{1}{2}$. **6.** 225°. **С—67.** **5.** а) $\cos\alpha$; б) 2; в) $4\sin^2\alpha$; г) 0. **7.** а) Нет; б) нет. **С—68.** **1.** а) 5; –5; б) 3; –1. **3.** в) $\dfrac{1}{\cos\alpha - \sin\alpha}$. **4.** а) $\dfrac{5}{9}$; б) $-\dfrac{35}{36}$. **5.** $\cos 3\alpha = 4b^3 - 3b$. Указание. Воспользуйтесь тем, что $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha)$. **6.** б) Указание. Докажите сначала, что $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\sin^2\alpha$. **7.** Указание. а) Умножьте обе части равенства на cos 36°; б) умножьте обе части равенства на $8\sin\dfrac{\pi}{7}$. **С—69.** **4.** в) $\operatorname{ctg} 4\alpha$. **5.** а) Да. Указание. Сгруппируйте первое слагаемое с третьим, а второе с четвертым; б) да. **6.** Указание. Сгруппируйте первые два слагаемых. **7.** а) Указание. Сгруппируйте первые два слагаемых и представьте $\sin(\alpha + \beta)$ как синус двойного угла.

K—1

В—1. **1.** $[3; 5) \cup (5; +\infty)$. **2.** Является нечетной. **4.** $E(y) = [-4; 4]$. **5.** $\frac{2x-1}{x+2}$. **6.** При $a = 3$. ***В—2.*** **1.** $(-\infty; -5) \cup (-5; 8]$. **2.** Является четной. **4.** $E(y) = (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. **5.** $\frac{5a-3}{a-4}$. **6.** При $b = 4$. ***В—3.*** **1.** $(-\infty; 2) \cup (2; 4]$. **2.** Является четной. **4.** $E(y) = [-3; 3]$. **5.** $\frac{4b+1}{2b-1}$. **6.** При $c = -7$. ***В—4.*** **1.** $[3; 6) \cup (6; +\infty)$. **2.** Является нечетной. **4.** $E(y) = (-\infty; -3] \cup (3; +\infty)$. **5.** $\frac{4c-3}{c-5}$. **6.** При $y = -6$.

K—2

В—1. **3.** $x = 2$, $y = 3$. **5.** На промежутке $[-10; -5]$ функция $y = f(|x|)$ возрастает, на промежутке $[-5; 0]$ убывает. ***В—2.*** **3.** $x = -3$, $y = 4$. **5.** На промежутке $[-12; -7]$ функция $y = f(|x|)$ возрастает, на промежутке $[-7; 0]$ убывает. ***В—3.*** **3.** $x = 0{,}5$, $y = -3$. **5.** На промежутке $[-8; -6]$ функция убывает, на промежутке $[-6; 0]$ возрастает. ***В—4.*** **3.** $x = 4$, $y = -5$. **5.** На промежутке $[-11; -7]$ функция убывает, на промежутке $[-7; 0]$ возрастает.

K—3

В—1. **1.** а) -4; 0; 4; б) -2; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 2. **2.** 2. **4.** -3; -1; 2. **5.** -1. ***В—2.*** **1.** а) -3; 0; 3; б) -3; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 3. **2.** 1. **4.** -4; -3; 1. **5.** 1,5. ***В—3.*** **1.** а) -6; 0; 6; б) $-\sqrt{5}$; -2; 2; $\sqrt{5}$. **2.** 2. **4.** -2; 1; 3. **5.** $\frac{1}{2}$. ***В—4.*** **1.** а) -5; 0; 5; б) -4; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; 4. **2.** 2. **4.** -1; 3; 5. **5.** -3.

K—4

В—1. **1.** а) $(-0{,}8; 1{,}5)$; б) $(-\infty; -8) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$. **2.** $(-1; 2{,}5] \cup (8; +\infty)$. **3.** а) $(-\infty; -0{,}5) \cup (3; +\infty)$; б) $[-4; 5]$. **4.** а) 1; б) $-0{,}5$. **5.** 2. ***В—2.*** **1.** а) $(-\infty; -0{,}4) \cup (0{,}75; +\infty)$; б) $(-4; -3) \cup (4; 5)$. **2.** $[-3; -2) \cup [4; +\infty)$. **3.** а) $(-1; 2{,}2)$; б) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. **4.** а) 2; 3; б) -2; $-2{,}5$. **5.** 3. ***В—3.*** **1.** а) $(-4; 0{,}5)$; б) $(-\infty; -7) \cup (-6; 4) \cup (6; +\infty)$. **2.** $(-5; 2] \cup (3; +\infty)$. **3.** а) $(-\infty; 0{,}25) \cup (1; +\infty)$; б) $[-4; 6]$. **4.** а) 3; б) 2,5; $-2{,}5$. **5.** 2. ***В—4.*** **1.** а) $(-\infty; -0{,}75) \cup (2; +\infty)$; б) $(-8; -7) \cup (-6; 7)$. **2.** $[-4; -2) \cup [5; +\infty)$. **3.** а) $(1{,}5; 5{,}5)$; б) $(-\infty; -5] \cup [7; +\infty)$. **4.** а) 0; 4; б) -8; $\frac{2}{3}$. **5.** -1.

K—5

В—1. а) $\left(-\frac{8}{9}; -8\frac{5}{9}\right)$, $(2; 3)$; б) $(2; 5)$, $(5; 2)$, $(-2; -5)$, $(-5; -2)$. **2.** $(4; 2)$, $(-4; -2)$, $(1; -2{,}5)$, $(-1; 2{,}5)$. **3.** Четыре решения.

4. 4 км/ч и 6 км/ч. ***В—2.*** **1.** а) (10,75; –0,25), (–2; 4); б) (3; 7), (7; 3), (–3; –7), (–7; –3). **2.** (4; 1), (–4; –1), ($\sqrt{6}$; 1,5$\sqrt{6}$), ($-\sqrt{6}$; $-1{,}5\sqrt{6}$). **3.** Три решения. **4.** 18 км/ч и 2 км/ч. ***В—3.*** **1.** а) $\left(-\frac{7}{13};\ -9\frac{8}{13}\right)$, (3; 1); б) (4; 6), (–4; –6), (6; 4), (–6; –4). **2.** (–10; 4), (10; –4), $\left(\frac{4\sqrt{14}}{3};\ \frac{\sqrt{14}}{3}\right)$, $\left(-\frac{4\sqrt{14}}{3};\ -\frac{\sqrt{14}}{3}\right)$. **3.** Три решения. **4.** 60 км/ч и 80 км/ч. ***В—4.*** **1.** а) (6; 2), $\left(\frac{2}{3};\ 4\frac{2}{3}\right)$; б) (1; 7), (7; 1), (–1; –7), (–7; –1). **2.** (6; 15), (–6; –15), (–0,8$\sqrt{15}$; 0,2$\sqrt{15}$), (0,8$\sqrt{15}$; –0,2$\sqrt{15}$). **3.** Четыре решения. **4.** 16 км/ч и 2 км/ч.

К—6

В—1. **3.** 9. **4.** 50,2. ***В—2.*** **3.** 14. **4.** 62,8. ***В—3.*** **3.** 7. **4.** 37,7. ***В—4.*** **3.** 20. **4.** 84,8.

К—7

В—1. **2.** Да, $n = 9$. **3.** $y = 44$. **4.** 300. **5.** 664. **6.** 816. ***В—2.*** **2.** Да, $n = 11$. **3.** $n = 98$. **4.** 585. **5.** 621. **6.** 1200. ***В—3.*** **2.** Да, $n = 7$. **3.** $n = 38$. **4.** 255. **5.** 252. **6.** 950. ***В—4.*** **2.** Да, $n = 13$. **3.** $n = 58$. **4.** 2025. **5.** 644. **6.** 624.

К—8

В—1. **1.** $\frac{1}{4}$. **2.** $a_1 = 7$, $q = 3$. **4.** 189. **5.** а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{7}{30}$. **6.** 2, 6, 18 и 18, 6, 2. ***В—2.*** **1.** $\frac{1}{81}$. **2.** $a_1 = -3$, $q = -3$. **4.** 255. **5.** а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{23}{45}$. **6.** 3, 9, 27 или 27, 9, 3. ***В—3.*** **1.** $\frac{1}{64}$. **2.** $a_1 = -7$, $q = -2$. **4.** $121\frac{1}{3}$. **5.** а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{19}{30}$. **6.** 1, 4, 16 или 16, 4, 1. ***В—4.*** **1.** $-\frac{1}{81}$. **2.** $a_1 = 1{,}5$, $q = -2$. **4.** $21\frac{21}{64}$. **5.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{31}{90}$. **6.** 5, 10, 20 или 20, 10, 5.

К—9

В—1. **1.** а) 34, б) 2. **2.** а) –4; 4; б) –1; 2. **3.** 1 и –1. **4.** $\frac{a}{3b^2}$. **5.** –1; 5. ***В—2.*** **1.** а) 41; б) 3. **2.** а) –3; 3; б) –2; 2. **3.** 1 и –1. **4.** $\frac{2x^2}{y}$. **5.** 0; 6. ***В—3.*** **1.** а) 4; б) 1. **2.** а) –5, 5; б) –1; 3. **3.** $\frac{1}{2}$ и 1. **4.** $\frac{x}{3y^2}$. **5.** –2; 8. ***В—4.*** **1.** а) –12; б) 5. **2.** а) 3; б) –1; 1; –4; 4. **3.** 2 и 1. **4.** $\frac{2p}{q^2}$. **5.** 4; 12.

К—10

В—1. **1.** а) 20; б) 25. **2.** а) x; б) y^2. **4.** 2. **5.** 81; 256.
В—2. **1.** а) 30, б) 20. **2.** а) $\sqrt{y}$; б) c^2. **4.** $3b^{\frac{1}{2}}$. **5.** 16; 625.
В—3. **1.** а) 10; б) 2,5. **2.** а) $a^{\frac{1}{3}}$; б) b^3. **4.** $b^{0,5}$. **5.** 16.
В—4. **1.** а) 70; б) 3. **2.** а) 6; б) x^3. **4.** $3y^{0,5}$. **5.** 1; 625.

К—11

В—1. **2.** $2\sin\alpha$. **4.** а) $11\frac{1}{9}$; б) −0,82. **6.** а) 0,22; б) 0,936.
В—2. **2.** 1. **4.** а) 100; б) −0,98. **6.** а) 0,48; б) 0,296.
В—3. **2.** $2\cos\alpha$. **4.** а) 25; б) −0,92. **6.** а) 0,345; б) 0,8515.
В—4. **2.** $\frac{1}{2}$. **4.** а) $6\frac{1}{4}$; б) −0,68. **6.** а) 0,18; б) 0,944.

К—12

В—1. **3.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $-\sin 2\alpha$. ***В—2.*** **3.** а) $-\operatorname{tg}\alpha$; б) $-\sin\alpha$.
В—3. **3.** а) $-\operatorname{tg}\alpha$; б) $-\sin 2\alpha$. ***В—4.*** **3.** а) $-\operatorname{tg}3\alpha$; б) $-\sin 2\alpha$.

К—13

В—1. **1.** $\frac{4}{b+3}$. **2.** а) −1; б) 6. **3.** $a_{20}=0{,}6$. **6.** $\frac{240}{289}$. **7.** 14 км/ч, 18 км/ч. ***В—2.*** **1.** $\frac{4}{1-a}$. **2.** а) −1; $-5-\sqrt{24}$, $-5+\sqrt{24}$; б) 14. **3.** $a_{26}=-0{,}2$. **6.** $\frac{120}{169}$. **7.** 10 дней, 15 дней. ***В—3.*** **1.** $\frac{9}{b-2}$. **2.** а) 1, $3-\sqrt{8}$, $3+\sqrt{8}$; б) 11. **3.** $a_{32}=0{,}1$. **6.** $\frac{240}{289}$. **7.** 18 км. ***В—4.*** **1.** $\frac{9}{a+3}$. **2.** а) 1, $4-\sqrt{15}$, $4+\sqrt{15}$; б) 15. **3.** $a_{52}=-0{,}1$. **6.** $\frac{120}{169}$. **7.** 30 ч и 20 ч или 20 ч и 30 ч.

Задачи повышенной трудности

2. (2; 10). **3.** −8; 8. **5.** Если $|a|>8$, то решения неравенства образуют промежуток $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-64}}{4}; \frac{a+\sqrt{a^2-64}}{4}\right)$; если $|a|\leqslant 8$, то решений нет. **8.** $\frac{11}{30}\sqrt[3]{6}$. **9.** а) 3; б) 10; 22. **11.** $\frac{1}{2}$; 1.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич
Миндюк Нора Григорьевна

АЛГЕБРА
Дидактические материалы

9 класс
с углубленным изучением математики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Н. Б. Грызлова*, *Т. Г. Войлокова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художники *Н. В. Беляева*, *В. В. Костин*
Художественные редакторы *Е. Р. Дашук*, *О. П. Богомолова*
Технический редактор *Н. В. Лукина*
Корректор *Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 12.09.11. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 6,61. Тираж 7000 экз. Заказ № 32121.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru