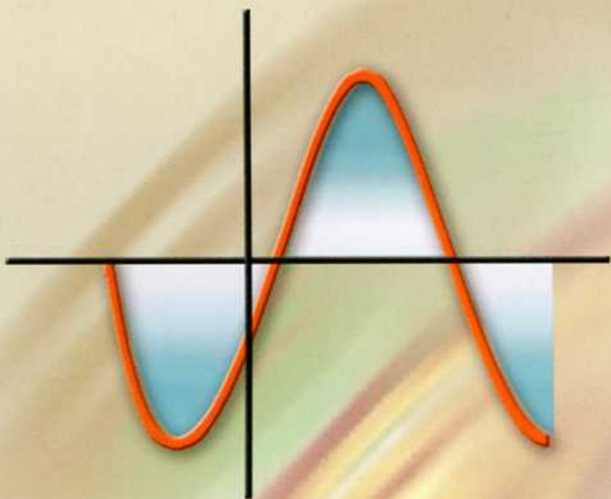
ФГОС

И. Е. ФЕОКТИСТОВ

АЛГЕБРА

9

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

И. Е. ФЕОКТИСТОВ

АЛГЕБРА

9

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

3-е издание, стереотипное

Издательство Мнемозина

Москва 2018

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
Ф42

Феоктистов И. Е.
Ф42 Алгебра. 9 класс. Дидактические материалы / И. Е. Феоктистов. — 3-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2018. — 180 с. : ил.
ISBN 978-5-346-04114-6

Дидактические материалы предназначены для проверки знаний учащихся 9-го класса с повышенным уровнем математической подготовки. Тексты самостоятельных, контрольных и тестовых работ даны в соответствии с учебником Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. Н. Нешкова, И. Е. Феоктистова «Алгебра. 9 класс». Задания могут быть использованы педагогами для составления различных видов проверочных работ для школьников, изучающих алгебру по учебникам других авторов.

Пособие содержит комментарии для учителя и примерное поурочное планирование.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-346-04114-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга предназначена для организации и проведения тематического и итогового контроля уровня знаний, умений и навыков учащихся 9-го класса, изучающих математику на повышенном уровне. Представленные в книге работы (25 самостоятельных и 7 контрольных работ) полностью соответствуют содержанию и структуре учебного материала, изложенного в учебнике «Алгебра-9. Учебник для общеобразовательных учреждений» Ю. Н. Макарычева и др. Однако большая часть упражнений предлагаемых работ может использоваться учителем для составления самостоятельных и контрольных работ в классах, изучающих алгебру по другим учебникам и учебным пособиям.

Тексты самостоятельных и контрольных работ составлены в соответствии с примерным поурочным планированием, ориентированным на книгу «Алгебра-9» Ю. Н. Макарычева и др., приведённым в конце данного сборника проверочных работ. Практически все упражнения сборника снабжены ответами (за исключением заданий на доказательство и на построение графиков функций).

Все работы помимо двух основных вариантов имеют подготовительный вариант и дополнительный, третий вариант. Подготовительный вариант может использоваться для домашнего задания или решения на уроке непосредственно перед самостоятельной или контрольной работой. Третий, дополнительный вариант может быть предложен в качестве работы над ошибками, а также в качестве третьего варианта работы во время её выполнения. Кроме того, этот вариант можно использовать для тех учащихся, которые по каким-либо причинам пропустили проверочную работу. Заметим, что третий вариант не равноценен первому и второму вариантам, поскольку несколько сложнее.

Тексты контрольных и самостоятельных работ носят примерный характер, количество заданий в большинстве случаев дано с избытком. Учитель в зависимости от специфики класса может заменять задания или исключать их совсем. Более подробные пояснения, связанные со структурой и содержанием работ, приводятся в конце книги.

Автор приносит искреннюю благодарность учащимся московской школы № 1741 за экспериментальную проверку самостоятельных и контрольных работ, за замечания и советы, которые способствовали улучшению данной книги.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Свойства функций

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей на множестве* $X \subset D(f)$, если для $\forall x_1 \in X$ и для $\forall x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Это записывают так: $y \nearrow$ на X или $f(x) \nearrow$ при любых $x \in X$. Очевидно, если $M \subset X$ и $f(x) \nearrow$ на X, то $f(x) \nearrow$ на M.

Функция f, возрастающая на всей области определения $D(f)$, называется *возрастающей*.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей на множестве* $X \subset D(f)$, если для $\forall x_1 \in X$ и для $\forall x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Это записывают так: $y \searrow$ на X или $f(x) \searrow$ при любых $x \in X$. Очевидно, если $M \subset X$ и $f(x) \searrow$ на X, то $f(x) \searrow$ на M.

Функция f, убывающая на всей области определения $D(f)$, называется *убывающей*.

Функция f, убывающая (возрастающая) на множестве X, называется *монотонной на множестве* X. Убывающая (возрастающая) функция называется *монотонной*.

Функция, не являющаяся возрастающей и не являющаяся убывающей, называется *функцией общего вида*.

В частности,

- линейная функция $y = kx + b$ при $k > 0$ является возрастающей, при $k < 0$ — убывающей, при $k = 0$ — постоянной (не возрастающей и не убывающей);
- степенная функция $y = x^n$ при нечётном n является возрастающей, при чётном n имеем $y \searrow$ на $(-\infty; 0]$ и $y \nearrow$ на $[0; +\infty)$, (т. е. является функцией общего вида);
- для обратной пропорциональности $y = \dfrac{k}{x}$ при $k > 0$ имеем $y \searrow$ на $(-\infty; 0)$ и $y \searrow$ на $(0; +\infty)$, при $k < 0$ $y \nearrow$ на $(-\infty; 0)$ и $y \nearrow$ на $(0; +\infty)$, (т. е. является функцией общего вида);
- функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая;

- функция $y = |x|$ убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$ (т. е. является функцией общего вида).

СВОЙСТВА МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Монотонная функция каждое своё значение принимает лишь при одном значении аргумента. Из этого следует, что если $y = f(x)$ — монотонная функция, то уравнение $f(x) = a$, где $a \in \boldsymbol{R}$, имеет не более одного корня.
2. Если функция $y = f(x)$ — возрастающая (убывающая), то функция $y = -f(x)$ — убывающая (возрастающая).
3. Если функция $y = f(x)$ — возрастающая (убывающая), то функция $y = f(x) + a$, где $a \in \boldsymbol{R}$, — возрастающая (убывающая).
4. Если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — возрастающие (убывающие) функции, то функция $y = f(x) + g(x)$ — возрастающая (убывающая) функция. Следствие: если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют противоположный характер монотонности, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.
5. Если функция $y = f(x)$ — возрастающая (убывающая) на X и не обращается на этом множестве в нуль, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ — убывающая (возрастающая) на X.
6. Если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — возрастающие (убывающие) функции, то функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$ — возрастающие функции. Т. е., композиция функций одного и того же характера монотонности есть возрастающая функция.
7. Композиция функций разного характера монотонности есть убывающая функция.

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Целая часть числа x обозначается как $[x]$. Например, $[3,6] = 3$, т. к. $3 < 3,6 < 4$, $[-3,6] = -4$, т. к. $-4 < -3,6 < -3$. Иными словами, $[x] = n$, где $n \leqslant x < n + 1$ и $n \in \boldsymbol{Z}$.

Дробной частью числа x называется разность между числом x и его целой частью $[x]$. Дробная часть числа обозначается как $\{x\}$. По определению, $\{x\} = x - [x]$. Из определения следует, что дробная часть неотрицательна. Например, $\{3,6\} = 3,6 - [3,6] = 3,6 - 3 = 0,6$, $\{-3,6\} = -3,6 - [-3,6] = -3,6 - (-4) = 0,4$.

Исследование функции на монотонность проводят одним из трех способов: по определению; с помощью свойств монотонных функций; с помощью производной функции (10-й класс). В записи ответа указывается промежуток наибольшей длины, на котором функция сохраняет характер монотонности: если граничные точки промежутка монотонности принадлежат области определения функции, то они включаются в каждый промежуток монотонности (как это сделано для степенной функции с чётным показателем).

Заметим, что если функция $f(x)$ возрастает на множестве $X_1 \subset D(f)$ и возрастает на множестве $X_2 \subset D(f)$, то из этого не следует, что функция возрастает на множестве $X_1 \cup X_2$ (например, обратная пропорциональность не является монотонной функцией).

Подготовительный вариант

1. Найдите целую и дробную части числа:
а) 12,1; б) −12,1.

2. Докажите, пользуясь определением монотонных функций, что функция:
а) $f(x) = x^2 + 2x$ убывает на промежутке $(-\infty; -1]$;
б) $g(x) = \frac{2x - 8}{x - 2}$ возрастает при любых значениях $x \in (2; +\infty)$.

3. Определите характер монотонности функции:
а) $y = 3 - x$;
б) $y = -2 + x$;
в) $y = \frac{4}{x}$;
г) $y = -\frac{a^2 + 4}{x}$, где a — параметр. Ответ поясните.

4. Пользуясь свойствами монотонных функций, исследуйте на монотонность функцию:
а) $f(x) = \sqrt{-2x + 1}$; в) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{-x}}$;
б) $f(x) = \frac{1}{x^3}$; г) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$.

5. Используя монотонность функций, решите уравнение:
а) $x^2 + 2x + 4 + \sqrt{x} = 30$;
б) $x^2 - 2x - 4 + \sqrt{-x} = -2 - \frac{2}{x}$.

6. Запишите функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:
а) $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$;
б) $f(x) = -\frac{x - 1}{3}$, $g(x) = -\frac{2}{x}$.

Что можно сказать о монотонности этих функций?

7. Докажите, что если функция $y = f(x) \nearrow$ на $\boldsymbol{R}$ и $y = g(x) \searrow$ на $\boldsymbol{R}$, то $y = f(g(x)) \searrow$ на $\boldsymbol{R}$.

Вариант 1

1. Найдите целую и дробную части числа:
а) 2,8; б) −2,8.

2. Докажите, пользуясь определением монотонных функций, что функция:
а) $f(x) = 2 - x^2$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$;
б) $g(x) = \dfrac{3 - 2x}{x}$ убывает при любых значениях $x \in (0; +\infty)$.
(Используйте определение возрастания или убывания функции.)

3. Определите характер монотонности функции:
а) $y = -2x + 3$;
б) $y = -2 + 3x$;
в) $y = -\dfrac{3}{x}$;
г) $y = \dfrac{|a| + 1}{x}$, где a — параметр. Ответ поясните.

4. Исследуйте на монотонность функцию:
а) $f(x) = \sqrt{2x - 5}$; в) $f(x) = -\dfrac{1}{x^7}$;
б) $f(x) = (-2x + 3)^5$; г) $f(x) = \dfrac{1 - x^2 + 3x}{x - 1}$.
(Используйте свойства монотонных функций.)

5. Используя монотонность функций, решите уравнение:
а) $x^3 + 3x - 7 + \sqrt{2x} = 9$;
б) $x^4 - 0{,}5x + 1{,}5 + \sqrt{-x} = 2 - \dfrac{2}{x}$.

6. Запишите функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:
а) $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = \sqrt{x + 1}$;
б) $f(x) = -2x + 1$, $g(x) = -\dfrac{4}{x}$.
Что можно сказать о монотонности этих функций?

7. Докажите, что если функция $y = f(x) \nearrow$ на $\boldsymbol{R}$ и $y = g(x) \searrow$ на $\boldsymbol{R}$, то $y = g(f(x)) \searrow$ на $\boldsymbol{R}$.

Вариант 2

1. Найдите целую и дробную части числа:
а) 1,7; б) −1,7.

2. Докажите, пользуясь определением монотонных функций, что функция:
а) $f(x) = x^2 - 3$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$;
б) $g(x) = \frac{4x - 3}{x}$ возрастает при любых значениях $x \in (0; +\infty)$.
(Используйте определение возрастания или убывания функции.)

3. Определите характер монотонности функции:
а) $y = -0{,}5x + 2$;
б) $y = -0{,}5 + 2x$;
в) $y = -\frac{6}{x}$;
г) $y = \frac{\sqrt{a} + 1}{x}$, где a — параметр, $a \geqslant 0$. Ответ поясните.

4. Исследуйте на монотонность функцию:
а) $f(x) = \sqrt{2 - 2x}$;
б) $f(x) = (2x - 2)^5$;
в) $f(x) = -\frac{2}{x^5}$;
г) $f(x) = \frac{1 - x^2 + 3x}{x - 2}$.
(Используйте свойства монотонных функций.)

5. Используя монотонность функций, решите уравнение:
а) $x^5 + x - 24 + \sqrt{2x} = 12$;
б) $x^4 - 2x - 2 + \sqrt{-x} = 1 - \frac{1}{x}$.

6. Запишите функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:
а) $f(x) = 2 - 3x$, $g(x) = \sqrt{x}$;
б) $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -\frac{5}{x}$.
Что можно сказать о монотонности этих функций?

7. Докажите, что если функция $y = f(x) \searrow$ на $\boldsymbol{R}$ и $y = g(x) \nearrow$ на $\boldsymbol{R}$, то $y = f(g(x)) \searrow$ на $\boldsymbol{R}$.

Вариант 3

1. Найдите целую и дробную части числа:
а) 5,75;
б) −5,75.

2. Докажите, что функция:
а) $f(x) = -2x^2 - 4x + 7$ возрастает на $(-\infty; -1]$;
б) $g(x) = -\frac{2x + 1}{x + 2}$ убывает при любых значениях $x \in (-2; +\infty)$.
(Используйте определение возрастания или убывания функции.)

3. Определите характер монотонности функции:

а) $y = 1 - \frac{x}{3}$; в) $y = -\frac{5}{x}$;

б) $y = -1 + 3x$; г) $y = \frac{\sqrt{a} + 0{,}1}{x}$,

где a — параметр, $a \geqslant 0$. Ответ поясните.

4. Исследуйте на монотонность функцию:

а) $f(x) = \sqrt{2 - x}$; в) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2 - x}}$;

б) $f(x) = -2 \cdot x^{-7}$; г) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x + 1}$.

(Используйте свойства монотонных функций.)

5. Используя монотонность функций, решите уравнение:

а) $x^2 - 2x + 4 + \sqrt{x - 1} - \frac{2}{2x - 3} = 3$;

б) $4x^2 + 12x + 11 + \sqrt{-3x - 2} = \frac{3x + 1}{x + 1}$.

6. Запишите функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:

а) $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

б) $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \frac{4}{x}$.

Что можно сказать о монотонности этих функций?

7. Докажите, что если функция $y = f(x) \searrow$ на $\boldsymbol{R}$ и $y = g(x) \nearrow$ на $\boldsymbol{R}$, то $y = g(f(x)) \searrow$ на $\boldsymbol{R}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Свойства функций

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если выполняются два условия: 1) $D(f)$ симметрично относительно нуля[1]; 2) для $\forall x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$.

[1] Множество называется симметричным относительно нуля, если для любого элемента этого множества противоположный ему элемент также принадлежит этому множеству.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если: 1) $D(f)$ симметрично относительно нуля; 2) для $\forall x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$.

Если функция не является чётной и не является нечётной, то её называют *функцией общего вида*.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу*, если $\exists m \in \mathbf{R} \mid f(x) \geqslant m$ для $\forall x \in D(f)$; *ограниченной сверху*, если $\exists M \in \mathbf{R} \mid f(x) \leqslant M$ для $\forall x \in D(f)$.

Функция, ограниченная снизу и ограниченная сверху, называется *ограниченной*, т. е. если $\exists m \in \mathbf{R}$ и $\exists M \in \mathbf{R} \mid m \leqslant f(x) \leqslant M$. Функция, не являющаяся ограниченной, в том числе ограниченная снизу или ограниченная сверху, называется *неограниченной*. Числа m и M называются нижней и верхней границами области значений функции.

Подготовительный вариант

1. Докажите, что функция:

а) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3 \cdot |x - 2| + 3 \cdot |x + 2|}{|x| - 2}$ — чётная;

б) $g(x) = \dfrac{2x + 3x \cdot |x|}{|x| + 2}$ — нечётная;

в) $h(x) = \dfrac{2x^3 + 3x \cdot |x|}{x + 2}$ — функция общего вида.

2. Докажите, что функция:

а) $y = x^2 - 2x - 1$ неограниченная (ограниченная снизу);

б) $y = 3 - |x + 2|$ неограниченная (ограниченная сверху);

в) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3}$ ограниченная.

3. Ломаная $ABCD$, где $A(0;\ 0)$, $B(1;\ -1)$, $C(2;\ 3)$, $D(4;\ 3)$, задаёт часть графика функции $y = f(x)$. Постройте график функции $y = f(x)$, если известно, что она:

а) чётная; б) нечётная.

4. Найдите область значений функции:

а) $\varphi(x) = \dfrac{5 - x}{2 + \sqrt{x - 1}}$;

б) $\omega(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + 6}}$;

в) $\alpha(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

5. Решите уравнение $|x-1|+1=\dfrac{2-x}{1+\sqrt{x-1}}$, используя понятие ограниченности функций.

6. Постройте график функции $y = f(x)$, если для $x \geqslant 0$ она задаётся формулой $f(x) = |x-1| - 1$ и известно, что функция:
а) чётная; б) нечётная.

7. Задайте функцию из упражнения № 6 одной формулой.

Вариант 1

1. Докажите, что функция:
а) $f(x) = \dfrac{|2-x|+|2+x|}{2x^4}$ — чётная;
б) $g(x) = \dfrac{x^3 - x\cdot|x|}{x^2-2}$ — нечётная;
в) $h(x) = \dfrac{x^3 - x\cdot|x|}{x^3-1}$ — функция общего вида.

2. Докажите, что функция:
а) $y = x^2 - x + 1$ неограниченная (ограниченная снизу);
б) $y = 2 - \big|x - |x+1|\big|$ неограниченная (ограниченная сверху);
в) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2+3}$ ограниченная.

3. Ломаная $ABCD$, где $A(-4;\ 0)$, $B(-2;\ -2)$, $C(-1;\ -2)$, $D(0;\ 0)$, задаёт часть графика функции $y = f(x)$. Постройте график функции $y = f(x)$, если известно, что она:
а) чётная; б) нечётная.

4. Найдите область значений функции:
а) $\varphi(x) = \dfrac{7+x}{3+\sqrt{2-x}}$;
б) $\omega(x) = -\dfrac{4}{\sqrt{x^2-2x+3}}$;
в) $\alpha(x) = -\dfrac{2x}{x^2+4}$.

5. Решите уравнение $\dfrac{1}{x^2-2x+2} = 1+\sqrt{x-1}$, используя понятие ограниченности функций.

6. Постройте график функции $y = f(x)$, если для $x \geqslant 0$ она задаётся формулой $f(x) = |x+1| - 1$ и известно, что функция:
а) чётная; б) нечётная.

7. Задайте функцию из упражнения № 6 одной формулой.

Вариант 2

1. Докажите, что функция:

а) $f(x) = \dfrac{|4 + x| + |4 - x|}{4x^2}$ — чётная;

б) $g(x) = \dfrac{x \cdot |x| - x^3}{3 - x^2}$ — нечётная;

в) $h(x) = \dfrac{x \cdot |x| - x^3}{8 - x^3}$ — функция общего вида.

2. Докажите, что функция:
а) $y = x^2 + x + 1$ неограниченная (ограниченная снизу);
б) $y = 1 - \big||x - 1| - x\big|$ неограниченная (ограниченная сверху);
в) $y = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 + 5}$ ограниченная.

3. Ломаная $ABCD$, где $A(-4;\ 1)$, $B(-2;\ -1)$, $C(-1;\ -1)$, $D(0;\ 0)$, задаёт часть графика функции $y = f(x)$. Постройте график функции $y = f(x)$, если известно, что она:
а) чётная; б) нечётная.

4. Найдите область значений функции:

а) $\varphi(x) = \dfrac{1 + x}{2 + \sqrt{3 - x}}$;

б) $\omega(x) = -\dfrac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$;

в) $\alpha(x) = -\dfrac{3x}{x^2 + 9}$.

5. Решите уравнение $\dfrac{1}{x^2 + 2x + 2} = 1 + \sqrt{x + 1}$, используя понятие ограниченности функций.

6. Постройте график функции $y = f(x)$, если для $x \geqslant 0$ она задаётся формулой $f(x) = 1 - |x + 1|$ и известно, что функция:
а) чётная; б) нечётная.

7. Задайте функцию из упражнения № 6 одной формулой.

Вариант 3

1. Докажите, что функция:

а) $f(x) = \dfrac{|2 - x| + |2 + x| + 2x^2}{|x|}$ — чётная;

б) $g(x) = \dfrac{x \cdot |x| - x^3}{x^4 - 1}$ — нечётная;

в) $h(x) = \dfrac{x^3 - x \cdot |x| + 1}{x^2 - 1}$ — функция общего вида.

2. Докажите, что функция:
а) $y = |4 - 3x| + 3$ неограниченная (ограниченная снизу);
б) $y = -x^2 - 4x + 1$ неограниченная (ограниченная сверху);
в) $y = -\dfrac{2x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 4x + 4}$ ограниченная.

3. Ломаная $ABCD$, где $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(3; -2)$, $D(5; 0)$, задаёт часть графика функции $y = f(x)$. Постройте график функции $y = f(x)$, если известно, что она:
а) чётная; б) нечётная.

4. Найдите область значений функции:
а) $\varphi(x) = \dfrac{2 - 5x}{3 + \sqrt{5x - 7}}$;
б) $\omega(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x^2 - 4x + 2}}$;
в) $\alpha(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 3}$.

5. Решите уравнение $1 + \sqrt{(x - 1)^2} = -x^2 + 2x - 1$, используя понятие ограниченности функций.

6. Постройте график функции $y = f(x)$, если для $x > 0$ она задаётся формулой $f(x) = \sqrt{x} - 1$ и известно, что функция:
а) чётная; б) нечётная.

7. Задайте функцию из упражнения № 6 одной формулой.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Квадратичная функция

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Функция вида $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_2x^2 + a_1x + a_0$, где $a_n \neq 0$, $n \in N$, называется *целой рациональной функцией*. Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратичной функцией*.

Квадратичная функция может быть представлена в виде $y = a(x - m)^2 + n$, где $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = -\dfrac{D}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$. Т. е., график любой квадратичной функции можно построить из графика функции $y = x^2$ растяжением (при $a > 1$) в a раз от оси абсцисс или сжатием (при $0 < a < 1$) в $\frac{1}{a}$ раз к оси абсцисс, сдвигом вдоль оси абсцисс на $\left|-\frac{b}{2a}\right|$ единиц вправо или влево (в зависимости от знака числа $-\frac{b}{2a}$) и сдвигом вдоль оси ординат на $\left|-\frac{D}{4a}\right|$ единиц вверх или вниз (в зависимости от знака числа $-\frac{D}{4a}$). Если $a < 0$, то сначала строят график функции $y = -x^2$, симметричный графику функции $y = x^2$ относительно оси абсцисс, после чего проводят указанные выше преобразования графика.

Графиком функции $y = x^2$ является парабола. Следовательно, графиком любой квадратичной функции является ***парабола***. Построение графика квадратичной функции проводят либо с помощью преобразований графика $y = x^2$, либо ***«по пяти точкам»***[1].

Для построения графика квадратичной функции по пяти точкам, определяют:

1. Знак старшего коэффициента a и направление ветвей параболы (если $a > 0$, то ветви направлены вверх, если $a < 0$, то — вниз);
2. Координаты вершины параболы по формулам $x_B = -\frac{b}{2a}$ и $y_B = -\frac{D}{4a}$. (Иногда вместо формулы для вычисления y_B используют непосредственную подстановку x_B в выражение $y = f(x)$, задающее функцию, т. е. вычисляют $f(x_B) = y_B$). Здесь же записывают уравнение оси симметрии параболы $x = -\frac{b}{2a}$; (заметим, что если $D > 0$, то $x_B = \frac{x_1 + x_2}{2}$);
3. Координаты точки пересечения параболы с осью ординат, вычислив $f(0)$: точка $(0; c)$.
4. Координаты точек пересечения параболы с осью абсцисс (если они есть, т. е. если $D \geqslant 0$); абсциссы этих точек являются нулями функции: точки $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$;
5. Координаты точки, симметричной точке $(0; c)$ относительно оси симметрии $x = -\frac{b}{2a}$: точка $\left(-\frac{b}{a}; c\right)$;

---

[1] «По пяти характерным точкам» — такое название точнее отражает смысл способа построения параболы. Но «в народе» этот метод получил название, приведённое выше.

6. Если $D < 0$ или точка $(0; c)$ расположена далеко от вершины параболы, то составляют таблицу значений функции для дополнительных точек. Далее строят эскиз графика. Парабола — это не только график квадратичной функции, но и *геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки* $F(x_0; y_0)$ (*фокус* параболы) *и данной прямой* $y = p$ (*директриса* параболы). Если точка $M(x; y)$ принадлежит параболе (см. рис. 1), то расстояние FM равно расстоянию от точки M до директрисы, т. е. длине перпендикуляра MM_1, проведённого из точки M к прямой $y = p$. Учитывая, что по теореме Пифагора $FM^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, а длина перпендикуляра MM_1 равна $|p - y|$, записывается уравнение параболы: $FM^2 = MM_1^2$, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (y - p)^2$, откуда $y = \dfrac{(x - x_0)^2 + y_0^2 - p^2}{2(y_0 - p)}$.

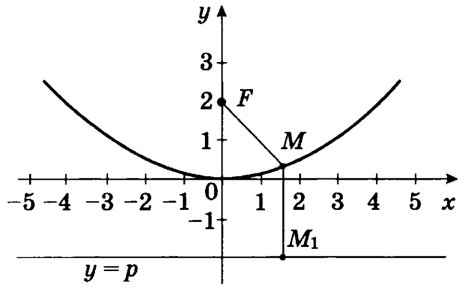


Рис. 1

Подготовительный вариант

1. Найдите координаты вершины параболы и уравнение её оси симметрии, если функция задана формулой:
   а) $y = 2x^2 - 4x + 1$;   в) $y = -0{,}5x^2 - 4x + 1$.
   б) $y = 2x^2 + 4x$;
2. График функции $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $M(2; 1)$ и $N(1; -2)$. Найдите p и q.
3. Постройте в одной системе координат графики функций $f_1(x) = (x - 3)^2$ и $f_2(x) = (x - 3)^2 - 4$.
4. При каких значениях c график функции $y = -x^2 - 4x + c$ расположен:
   а) ниже оси абсцисс;   б) не выше прямой $y = 5$?
5. Постройте по пяти точкам график функции:
   а) $y = -x^2 + 6x - 5$;   б) $y = (x + 2)(x - 4)$.
6. Задайте формулой квадратичную функцию, если её график проходит через точки $A(-1; -3)$, $B(0; 3)$, $C(2; 3)$.
7. Найдите длину наибольшего отрезка, параллельного оси ординат и лежащего внутри фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - 5x + 3$ и $y = 1 - x^2$.
8. Запишите уравнение геометрического места точек плоскости, равноудалённых от прямой $y = -2$ и точки $F(0; 2)$.

Вариант 1

1. Найдите координаты вершины параболы и уравнение её оси симметрии, если функция задана формулой:
   а) $y = 2x^2 + 6x - 3$; в) $y = -0{,}5x^2 + 2x - 3$.
   б) $y = 2x^2 - 6x$;

2. График функции $y = -x^2 + px + q$ проходит через точки $M(1; 2)$ и $N(3; -2)$. Найдите p и q.

3. Постройте в одной системе координат графики функций $f_1(x) = (x + 2)^2$ и $f_2(x) = (x + 2)^2 - 1$.

4. При каких значениях c график функции $y = x^2 + 2x + c$ расположен:
   а) выше оси абсцисс; б) не ниже прямой $y = 2$?

5. Постройте по пяти точкам график функции:
   а) $y = -x^2 - 2x + 3$; б) $y = (x + 1)(x - 3)$.

6. Задайте формулой квадратичную функцию, если её график проходит через точки $A(-1; 7)$, $B(0; 1)$, $C(1; -1)$.

7. Найдите длину наибольшего отрезка, параллельного оси ординат и лежащего внутри фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - 10$ и $y = 6 - 4x - x^2$.

8. Запишите уравнение геометрического места точек плоскости, равноудалённых от прямой $y = 1$ и точки $F(-1; -1)$.

Вариант 2

1. Найдите координаты вершины параболы и уравнение её оси симметрии, если функция задана формулой:
   а) $y = 2x^2 - 6x + 3$; в) $y = -0{,}5x^2 - 2x + 3$.
   б) $y = 2x^2 + 6x$;

2. График функции $y = -x^2 + px + q$ проходит через точки $M(2; 1)$ и $N(-1; -2)$. Найдите p и q.

3. Постройте в одной системе координат графики функций $f_1(x) = (x - 2)^2$ и $f_2(x) = (x - 2)^2 + 1$.

4. При каких значениях c график функции $y = x^2 - 2x + c$ расположен:
   а) выше оси абсцисс; б)не ниже прямой $y = -2$?

5. Постройте по пяти точкам график функции:
   а) $y = -x^2 + 2x + 3$; б) $y = (x - 1)(x + 3)$.

6. Задайте формулой квадратичную функцию, если её график проходит через точки $A(-1; 3)$, $B(0; 1)$, $C(1; -5)$.

7. Найдите длину наибольшего отрезка, параллельного оси ординат и лежащего внутри фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - 4x - 7$ и $y = 9 - x^2$.

8. Запишите уравнение геометрического места точек плоскости, равноудалённых от прямой $y = -1$ и точки $F(1;\ 2)$.

Вариант 3

1. Найдите координаты вершины параболы и запишите уравнение её оси симметрии, если функция задана формулой:
а) $y = -2x^2 + 2x + 1$;
б) $y = 2x^2 - 2x$;
в) $y = -0{,}5x^2 + x + 1$.

2. График функции $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $M(-1;\ 4)$ и $N(1;\ 2)$. Найдите p и q.

3. Постройте в одной системе координат графики функций $f_1(x) = -(x + 1)^2$ и $f_2(x) = 4 - (x + 1)^2$.

4. При каких значениях c все точки графика функции $y = x^2 - x + c$ расположены:
а) выше оси абсцисс;
б) не ниже прямой $y = 2$?

5. Постройте по пяти точкам график функции:
а) $y = -2x^2 - 2x + 4$;
б) $y = 2(x - 2)(x + 1)$.

6. Задайте формулой квадратичную функцию, если её график проходит через точки $A(-2;\ 1)$, $B(-1;\ 3)$, $C(1;\ -5)$.

7. Найдите длину наибольшего отрезка, параллельного оси ординат и лежащего внутри фигуры, ограниченной параболами $y = 2x^2 - 4x - 7$ и $y = -2x^2 - 4x + 9$.

8. Запишите уравнение геометрического места точек плоскости, равноудалённых от прямой $x = -1$ и точки $F(1;\ 0)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Преобразования графиков функций

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

График функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ симметрией относительно оси ординат.

График функции $y = -f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ симметрией относительно начала координат.

График функции $y = f(kx)$ при $k > 1$ можно построить из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси ординат.

График функции $y = f(kx)$ при $0 < k < 1$ можно построить из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси ординат.

График функции $y = |f(x)|$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика $y = f(x)$, расположенную выше оси абсцисс, оставляют на месте, а часть графика, расположенную ниже оси абсцисс, симметрично отображают относительно оси абсцисс.

График функции $y = f(|x|)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика $y = f(x)$, расположенную правее оси ординат, оставляют на месте, после чего отображают её симметрично относительно оси ординат, получая ту часть графика $y = f(|x|)$, которая соответствует отрицательной части области определения функции $y = f(x)$.

Подготовительный вариант

1. Областью определения функции $y = f(x)$ является отрезок $[-4; 6]$, а её областью значений — отрезок $[-1; 3]$. Укажите область определения и область значений функции:
   а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
   б) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$; г) $y = f(|x|)$.
2. Дана функция $f(x) = 2x - 2$. Постройте график данной функции и график функции:
   а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
   б) $y = f(2x)$; г) $y = f(|x|)$.
   В каждом случае задайте функцию формулой.
3. Дана функция $f(x) = x^2 - 2x$. Постройте график данной функции и график функции:
   а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
   б) $y = f(-2x)$; г) $y = f(|x|)$.
   В каждом случае задайте функцию формулой.
4. Дана функция $f(x) = 2 - \frac{4}{x - 1}$. Постройте график данной функции и график функции:
   а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
   б) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$; г) $y = f(|x|)$.
   В каждом случае задайте функцию формулой.
5. Постройте график функции $y = x|x| - 2|x|$ и по графику найдите, при каких значениях параметра a уравнение $x|x| - 2|x| = 1 - a$ имеет два корня.

Вариант 1

1. Областью определения функции $y = f(x)$ является отрезок $[-2; 3]$, а её областью значений — отрезок $[-2; 5]$. Укажите область определения и область значений функции:
   а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
   б) $y = f(-2x)$; г) $y = f(|x|)$.

2. Дана функция $f(x) = -2x + 1$. Постройте график данной функции и график функции:
   а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
   б) $y = f(-2x)$; г) $y = f(|x|)$.
   В каждом случае задайте функцию формулой.

3. Дана функция $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Постройте график данной функции и график функции:
   а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
   б) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$; г) $y = f(|x|)$.
   В каждом случае задайте функцию формулой.

4. Дана функция $f(x) = \frac{4}{x-1} + 1$. Постройте график данной функции и график функции:
   а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
   б) $y = f(2x)$; г) $y = f(|x|)$.
   В каждом случае задайте функцию формулой.

5. Постройте график функции $y = \frac{2|x| + 2}{|x| - 1}$ и определите, при каких значениях параметра a уравнение $\frac{2|x| + 2}{|x| - 1} = a$ не имеет корней.

Вариант 2

1. Областью определения функции $y = f(x)$ является отрезок $[-4; 2]$, а её областью значений — отрезок $[-5; 2]$. Укажите область определения и область значений функции:
   а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
   б) $y = f(2x)$; г) $y = f(|x|)$.

2. Дана функция $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$. Постройте график данной функции и график функции:
   а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
   б) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$; г) $y = f(|x|)$.
   В каждом случае задайте функцию формулой.

3. Дана функция $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Постройте график данной функции и график функции:
а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
б) $y = f(2x)$; г) $y = f(|x|)$.
В каждом случае задайте функцию формулой.

4. Дана функция $f(x) = \frac{4}{x+1} + 1$. Постройте график данной функции и график функции:
а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
б) $y = f(-2x)$; г) $y = f(|x|)$.
В каждом случае задайте функцию формулой.

5. Постройте график функции $y = \frac{|x| + 4}{|x| - 2}$ и по графику найдите, при каких значениях параметра a уравнение $\frac{|x| + 4}{|x| - 2} = a$ имеет два корня.

Вариант 3

1. Областью определения функции $y = f(x)$ является отрезок $[-6; 2]$, а её областью значений — отрезок $[-4; 2]$. Укажите область определения и область значений функции:
а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
б) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$; г) $y = f(|x|)$.

2. Дана функция $f(x) = 0{,}5x - 2$. Постройте график данной функции и график функции:
а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
б) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$; г) $y = f(|x|)$.
В каждом случае задайте функцию формулой.

3. Дана функция $f(x) = x^2 - 2x + 15$. Постройте график данной функции и график функции:
а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
б) $y = f(-2x)$; г) $y = f(|x|)$.
В каждом случае задайте функцию формулой.

4. Дана функция $f(x) = \frac{2}{x+2} + 3$. Постройте график данной функции и график функции:
а) $y = f(-x)$; в) $y = |f(x)|$;
б) $y = f(2x)$; г) $y = f(|x|)$.
В каждом случае задайте функцию формулой.

5. Постройте график функции $y = |||x| - 2| - 1| - 1$ и определите, при каких значениях параметра b уравнение $y = |||x| - 2| - 1| - 1 = b$ имеет наибольшее число корней.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Уравнения с одной переменной

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнение $P(x) = Q(x)$ называется ***целым уравнением с одной переменной***, если $P(x)$ и $Q(x)$ — целые выражения (целым называется рациональное выражение, не содержащее деления на переменную). Коэффициенты целого уравнения не всегда являются целыми числами, например, уравнение $\frac{2}{3}x^2 - x + \sqrt{2} = 0$ является целым, хотя старший коэффициент и свободный член уравнения не являются целыми числами. Однако часто рассматриваются целые уравнения именно с целыми коэффициентами.

Полиномиальные уравнения — это уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен (полином) от переменной x. Степенью уравнения $P(x) = 0$ называется степень многочлена $P(x)$. Полиномиальное уравнение 1-ой степени $ax + b = 0$ всегда имеет один корень $x = -\frac{b}{a}$. Заметим, что линейное уравнение $ax = b$ объединяет сразу два вида полиномиальных уравнений: 1-ой степени (при $a \neq 0$) и нулевой степени (при $a = 0$ и $b \neq 0$). Степень линейного уравнения при $a = 0$ и $b = 0$ не определена. Уравнение 2-ой степени (квадратное уравнение) $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня при $D > 0$, два совпадающих корня при $D = 0$ (или говорят, что уравнение имеет корень двойной кратности) и не имеет действительных корней при $D < 0$. Уравнение 3-ей и более высоких степеней решают с помощью специальных приёмов. Вообще, уравнение степени n имеет не более n действительных корней (с учётом их кратности). Решение уравнений выполняют либо *графически*, либо *введением новой переменной*, либо *разложением на множители*.

Если уравнение имеет целый корень, то он является делителем свободного члена уравнения.

Если уравнение $P_n(x) = 0$ имеет корень x_0, то многочлен $P_n(x)$ делится на двучлен $(x - x_0)$. При этом деление полинома $P_n(x)$ на двучлен $x - x_0$ проводят уголком или с помощью схемы Горнера. Для разложения на множители левой части уравнения $P(x) = 0$ иногда используют метод неопределённых коэффициентов.

Уравнение вида $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ называется *симметрическим* уравнением третьей степени, уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ называется *симметрическим* уравнением четвёртой степени. Вообще, симметрическим уравнением с одной переменной называется уравнение, коэффициенты которого симметричны относительно середины уравнения. Такое уравнение решается делением на выражение x^2 и введением новой переменной $t = x + \frac{1}{x}$.

Подготовительный вариант

1. Решите биквадратное уравнение:
а) $x^4 - 14x^2 + 13 = 0$; в) $x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.
б) $7x^4 + 6x^2 - 1 = 0$;

2. Известно, что число 1 является одним из корней уравнения $ax^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$. Найдите остальные корни уравнения.

3. Решите графически уравнение $\frac{4}{x-1} = -x^2 + 6x - 4$ и выполните проверку подстановкой.

4. Найдите все корни уравнения $(4 - 3x)^5 - x^5 - x^3 - x + 2 = 0$ или докажите, что их нет.

5. Решите уравнение:
а) $x^2 + 2x - 7 = \frac{8}{x^2 + 2x}$; б) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

6. Найдите корни уравнения:
а) $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0$; б) $\frac{x^2 - 6x - 9}{x} = \frac{x^2 - 4x - 9}{x^2 - 6x - 9}$.

Вариант 1

1. Решите биквадратное уравнение:
а) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$; в) $x^4 + 11x^2 + 18 = 0$.
б) $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$;

2. Известно, что число -1 является одним из корней уравнения $x^3 - x^2 + ax - 2 = 0$. Найдите остальные корни уравнения.

3. Решите графически уравнение $\frac{x+3}{x-1} = x^2 + 2x - 3$ и выполните проверку подстановкой.

4. Найдите все корни уравнения $(2 - 3x)^5 - x^5 - x^3 - x + 4 = 0$ или докажите, что их нет.

5. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 2x + 2 = \dfrac{2}{3x^2 - 2x + 1}$;

б) $x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 6x + 1 = 0$.

6. Найдите корни уравнения:

а) $x^4 - 11x^2 - 12x - 3 = 0$;

б) $\dfrac{x^2 - 12x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \dfrac{4x}{x^2 - 10x + 15}$.

Вариант 2

1. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$; в) $x^4 + 11x^2 + 28 = 0$.

б) $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$;

2. Известно, что число -1 является одним из корней уравнения $x^3 + 5x^2 + ax + 2 = 0$. Найдите остальные корни уравнения.

3. Решите графически уравнение $\dfrac{x-7}{x-3} = -x^2 + 2x + 5$ и выполните проверку подстановкой.

4. Найдите все корни уравнения $(1 - x)^3 - 2x^3 - x + 3 = 0$ или докажите, что их нет.

5. Решите уравнение:

а) $x^2 - 4x + 6 = \dfrac{21}{x^2 - 4x + 10}$;

б) $x^4 - 7x^3 - 6x^2 - 7x + 1 = 0$.

6. Найдите корни уравнения:

а) $x^4 - 7x^2 + 12x - 3 = 0$; б) $\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{4x} = \dfrac{-5x}{2x^2 + 7x + 2}$.

Вариант 3

1. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$; в) $x^4 + 4x^2 + 1 = 0$.

б) $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$;

2. Известно, что число $2 - \sqrt{6}$ является одним из корней уравнения $x^3 - 6x^2 + ax + 4 = 0$. Найдите остальные корни уравнения.

3. Решите графически уравнение $\dfrac{3}{x-2} = 2\sqrt{x+1} - 1$ и выполните проверку подстановкой.

4. Найдите корни уравнения $(6 - 5x)^5 - 3x^5 - 2x^3 - x + 5 = 0$ или докажите, что их нет.

5. Решите уравнение:

а) $x^2 - 4|x| - 2 = \frac{15}{x^2 - 4|x|}$;

б) $x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 6x + 1 = 0$.

6. Найдите корни уравнения:

а) $x^4 - 12x^2 + 24x - 5 = 0$; б) $\frac{x^2 + 2x + 3}{3x} = \frac{2x}{-x^2 + 5x - 3}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Неравенства с одной переменной

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Неравенство вида $f(x) < 0$ или $f(x) > 0$, где $f(x)$ — рациональное выражение, называется *рациональным неравенством с одной переменной*. Если $f(x)$ — целое выражение, то неравенство называется *целым неравенством с одной переменной*. Неравенство вида $ax + b < 0$ или $ax + b > 0$, где x — переменная, a, $b \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, называется *неравенством первой степени*. Неравенство первой степени является частным случаем линейного неравенства[1]. Неравенство вида $ax^2 + bx + c < 0$ или $ax^2 + bx + c > 0$, где x — переменная, a, b, $c \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$,, называется *неравенством второй степени* или *квадратным неравенством*.

Решение неравенств второй степени проводят одним из трёх способов: с использованием параболы, с помощью совокупности двух систем и методом интервалов. Перед решением неравенства одним из этих методов полезно сделать старший коэффициент положительным (умножив обе части неравенства на -1 и изменив знак неравенства). В приведённых ниже алгоритмах решения квадратных неравенств полагаем $a > 0$.

Метод параболы: находят нули квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$; отмечают их на числовой прямой; через них схематично проводят параболу, учитывая направление её ветвей. С рисунка считывают ответ: при каких значениях аргумента $f(x) < 0$ или $f(x) > 0$. В случае, если нулей нет, изображают параболу, не пересекающую ось абсцисс, и с рисунка считывают ответ: либо пустое множество, либо множество всех действительных чисел.

Сведение к совокупности двух систем: разлагают на множители квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — его корни; если решается неравенство $ax^2 + bx +$

[1] Решение линейных неравенств изучалось в курсе 8 класса.

$+ c < 0$, где $a > 0$, то составляется совокупность систем $\begin{cases} x - x_1 < 0, \\ x - x_2 > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - x_1 > 0, \\ x - x_2 < 0; \end{cases}$ если решается неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, где $a > 0$, то составляется совокупность систем $\begin{cases} x - x_1 > 0, \\ x - x_2 > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$; если квадратный трёхчлен не имеет корней, то ответ «прочитывают» сразу, учитывая знак неравенства и старшего коэффициента. Этот способ решения неравенств целесообразен лишь для квадратных неравенств или дробно-линейных неравенств вида $\frac{ax + b}{cx + d} < 0$ или $\frac{ax + b}{cx + d} > 0$.

Метод интервалов: разлагают на множители квадратный трёхчлен; на числовой прямой отмечают нули квадратного трёхчлена; под числовой прямой отмечают знаки каждого двучлена в трёх промежутках, на которые нули функции разбивают числовую прямую, а над числовой прямой отмечают «произведение» отмеченных знаков.

Неравенства степени выше второй и дробно-рациональные неравенства чаще всего решают методом интервалов. Если старший коэффициент левой части неравенства положителен (или все двучлены имеют положительные старшие коэффициенты, т. е. имеют вид $x - x_n$), то крайний правый интервал на числовой прямой будет иметь знак +. При решении неравенств учитывается кратность корней левой части неравенства: при переходе через корень чётной кратности знак интервала не меняется, при переходе через корень нечётной кратности — меняется.

Неравенство $f(x) \leqslant 0$ есть краткая запись равносильной совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) < 0, \\ f(x) = 0. \end{array}\right.$

Неравенство вида $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ или $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — целые рациональные выражения, называется *дробно-рациональным неравенством с одной переменной*. При решении дробно-рационального неравенства его заменяют равносильным неравенством $f(x) \cdot g(x) < 0$ или $f(x) \cdot g(x) > 0$.

Подготовительный вариант

1. Решите неравенство $x^2 - 5x + 4 < 0$, используя: а) метод параболы; б) метод сведения к совокупности двух систем; в) метод интервалов.

2. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x^2-5x+4}{x+3}<0$;   в) $\dfrac{x^2-5x+4}{x+3}\leqslant 0$;

б) $\dfrac{x^2-5x+4}{x+3}>0$;   г) $\dfrac{x^2-5x+4}{x+3}\geqslant 0$.

3. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 8. Чему может быть равна длина одного из катетов, если известно, что площадь треугольника не меньше 6 см^2?

4. Найдите область определения функции
$y=\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{3+2x-x^2}$.

5. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2-2x+3\geqslant 0 \\ x^2+2x-6<0 \end{array}\right.$.

6. Найдите сумму целых отрицательных решений неравенства
$\dfrac{3x^2+x-9}{x}\geqslant -5$.

7. Найдите все такие значения переменной, при которых выполняется ровно два неравенства из трёх:
$\dfrac{1}{a-2}-\dfrac{6}{a-5}>1$, $\dfrac{a^2}{a-3}\geqslant 0$, $2a-1<\dfrac{4}{3}a$.

Вариант 1

1. Решите неравенство $x^2+4x-5\geqslant 0$, используя:
а) метод параболы;
б) метод сведения к совокупности двух систем;
в) метод интервалов.

2. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x^2+4x-5}{x}<0$;   в) $x+4\leqslant\dfrac{5}{x}$;

б) $x+4-\dfrac{5}{x}>0$;   г) $x\geqslant\dfrac{5-4x}{x}$.

3. Периметр прямоугольника равен 28 см. В каких пределах может меняться длина прямоугольника, если его площадь больше 48 см^2?

4. Найдите область определения функции
$y=\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2+x-x^2}$.

5. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2\geqslant 4x \\ x^2<1 \end{array}\right.$.

6. Найдите сумму целых положительных решений неравенства $\frac{x^2 - 8x - 5}{x - 1} < -5$.

7. Найдите все такие значения переменной, при которых выполняется ровно два неравенства из трёх:
$\frac{3}{b-3} + 1 > \frac{1}{6 + b - b^2}$, $\frac{2}{7}b + 1 \geqslant 0$, $\frac{1}{b-1} > \frac{1}{3}$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $x^2 + 4x + 3 \geqslant 0$, используя: а) метод параболы; б) метод сведения к совокупности двух систем; в) метод интервалов.

2. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2 + 4x + 3}{x} < 0$; в) $x + 4 \leqslant -\frac{3}{x}$;

б) $x + 4 + \frac{3}{x} > 0$; г) $\frac{4x + 3}{x} \geqslant -x$.

3. Периметр прямоугольника равен 30 см. В каких пределах может меняться длина прямоугольника, если его площадь больше 54 см^2?

4. Найдите область определения функции
$y = \sqrt{x^2 + x - 6} - \sqrt{6 + x - x^2}$.

5. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2 \leqslant x \\ x^2 > 1 \end{array}\right.$.

6. Найдите сумму целых отрицательных решений неравенства $\frac{x^2 + 5x + 18}{x - 4} > -2$.

7. Найдите все такие значения переменной, при которых выполняется ровно два неравенства из трёх:
$\frac{a-3}{a} + \frac{1}{a-3} < \frac{2}{3a - a^2}$, $\frac{2}{3}a - 6 > 4 - a$, $\frac{a^2 + 15}{a - 1} \leqslant 10$.

Вариант 3

1. Решите неравенство $3x^2 + x - 2 > 0$, используя:
а) метод параболы;
б) метод сведения к совокупности двух систем;
в) метод интервалов.

2. Решите неравенство:

а) $\frac{3x^2 + x - 2}{x} < 0;$ в) $3x + 1 \leqslant \frac{2}{x};$

б) $3x + 1 - \frac{2}{x} > 0;$ г) $3x \geqslant \frac{2 - x}{x}.$

3. Из двух прямоугольных треугольников ABD и BCD, сумма всех катетов которых равна 45 см, составили треугольник ABC. В каких пределах может меняться длина высоты BD треугольника ABC, если его площадь не меньше 126 см^2?

4. Найдите область определения функции $y = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \frac{x + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x}{2 - x}}} + 2.$

5. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2 \geqslant 4x - 3, \\ x^2 < 2. \end{array}\right.$

6. Найдите сумму целых неотрицательных решений неравенства $x \leqslant \frac{20}{x - 1}.$

7. Найдите все такие значения переменной, при которых выполняется ровно два неравенства из трёх:

$\frac{1}{3 + 2b - b^2} > \frac{1}{4}, \quad \frac{b + 1}{2} \leqslant 3, \quad \frac{2}{b + 2} < 1.$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, решают одним из пяти способов: используя геометрический смысл модуля, графически, по определению модуля (методом промежутков), с помощью равносильных переходов или заменой переменной.

Решение уравнений вида $|x - a| = b$, где $b > 0$, иногда проводят с использованием геометрического определения модуля. Для этого отмечают на координатной прямой точку с координатой a и откладывают от неё влево и вправо b единичных отрезков. Координаты найденных точек являются решениями уравнения.

Графический способ решения уравнения $|f(x)| = g(x)$ состоит в отыскании абсцисс общих точек графиков функций $y = |f(x)|$ и $y = g(x)$.

Иногда уравнение с модулем удаётся решить заменой переменной.

Метод промежутков (метод интервалов) используется при решении уравнений, содержащих несколько модулей вида $|x - a|$, т. е. уравнений вида $|x - a| + \ldots + |x - b| = c$ и т. п. Для решения нужно отметить на координатной прямой все числа, обращающие модули в нуль, и на каждом из полученных промежутков решать уравнение отдельно, раскрывая модули с соответствующим знаком. При этом необходимо помнить, что решением уравнения будут лишь те корни, которые принадлежат данному промежутку, на котором решается уравнение.

Равносильные преобразования уравнений с модулем сводятся к двум правилам.

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{array}\right.$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = -g(x); \end{cases} \end{array}\right. \text{ или } \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Подготовительный вариант

1. Найдите координаты точек, находящихся на координатной прямой на расстоянии 5 единиц от точки с координатой 7. Выполните соответствующий рисунок. Запишите уравнение, содержащее переменную под знаком модуля и соответствующее данной задаче.

2. Решите уравнение:
   а) $|x - a| = 2$; в) $|x - a| = -2$;
   б) $|x - a| = 0$; г) $|x - a| = b$.

3. Решите уравнение $\dfrac{3x^2 - 5}{|x| - 2} = 2|x|$, выполнив замену переменной.

4. Найдите наибольший корень уравнения $|x^2 - 5x + 4| = 4$.

5. Решите графически уравнение $\left|\dfrac{2 - x}{x}\right| = x^3$ и выполните проверку подстановкой.

6. Найдите наименьший корень уравнения
$|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$.

7. Решите уравнение $|x^2 - 2x - 4| = 3x - 2$.

8. Найдите сумму корней уравнения $4 \cdot |x - 1| - |2x - 3| = 8$.

9. Решите уравнение $||2x - 1| - 5| + x = |6 - x|$.

Вариант 1

1. Найдите координаты точек, находящихся на координатной прямой на расстоянии 3 единицы от точки с координатой -1. Выполните рисунок и запишите уравнение, соответствующее данной задаче.

2. Решите уравнение:
а) $|x + 2| = 1$; в) $|x + 2| = -0{,}5$;
б) $|x + 2| = 0$; г) $|x + 2| = a$, a — параметр.

3. Решите уравнение $x^2 + 2x + 2|x + 1| = 7$, выполнив замену переменной.

4. Найдите наибольший корень уравнения $|x^2 - 5x| = 6$.

5. Решите графически уравнение $|x^2 - 2x| = 1 - |x - 1|$ и выполните проверку подстановкой.

6. Найдите наименьший корень уравнения
$|x^2 - 3x - 3| = |x^2 + 7x - 13|$.

7. Решите уравнение $|2 - x| = 5 - 4x$.

8. При каких значениях переменной значение выражения
$|x| - 2|x - 1| + 3|x - 2|$ равно 4?

9. Решите уравнение $|x - 2 - |4 - x|| + x = 7$.

Вариант 2

1. Найдите координаты точек, находящихся на координатной прямой на расстоянии 2 единицы от точки с координатой -3. Выполните рисунок и запишите уравнение, соответствующее данной задаче.

2. Решите уравнение:
а) $|2 - x| = 1$; в) $|2 - x| = -1$;
б) $|2 - x| = 0$; г) $|2 - x| = a$, a — параметр.

3. Решите уравнение $x^2 - 2x - 5|x - 1| + 5 = 0$, выполнив замену переменной.

4. Найдите наибольший корень уравнения $|x^2 + 2x| = 3$.

5. Решите графически уравнение $|x^2 + 2x| = 1 - |x + 1|$ и выполните проверку подстановкой.

6. Найдите наименьший корень уравнения
$|3x^2 - 3x + 5| = |2x^2 + 6x - 3|$.

7. Решите уравнение $|1 - 2x| = 4x - 6$.

8. При каких значениях переменной значение выражения
$|x| + |x - 7| + 2|x - 4|$ равно 2?

9. Решите уравнение $\big|x + 1 + |-x - 3|\big| - x = 6$.

Вариант 3

1. Найдите координаты точек, находящихся на координатной прямой на расстоянии 5,5 единиц от точки с координатой −0,5. Выполните рисунок и запишите уравнение, соответствующее данной задаче.

2. Решите уравнение:

а) $|x - 7| = 17$; в) $|x - 7| = -17$;
б) $|x - 7| = 0$; г) $|x - 7| = 1 - a$, a — параметр.

3. Решите уравнение $x^2 - 4x - |2 - x| = 8$, выполнив замену переменной.

4. Найдите наименьший корень уравнения $|x^2 + 5x| = 6$.

5. Решите графически уравнение $\left|1 - \sqrt{|x|}\right| = 1 - |x|$ и выполните проверку подстановкой.

6. Найдите наименьший корень уравнения
$|x^2 + 2x - 3| = |x^2 + x - 6|$.

7. Решите уравнение $|2x + 1| = 1 - x$.

8. При каких значениях переменной значение выражения
$|x| - 3|x - 2| + 2|x - 3|$ равно 2?

9. Решите уравнение $\big|2x + 1 + |x + 2|\big| - 3x = 3$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля, решают одним из пяти основных способов: используя геометрический смысл модуля, графически, по определению модуля (методом промежутков), с помощью равносильных переходов или заменой переменной.

Решение неравенств вида $|x - a| < b$ или $|x - a| > b$, где $b > 0$, иногда проводят с использованием геометрического определения модуля. Для этого отмечают на координатной прямой точку с координатой a и откладывают от неё влево и вправо b единиц. Если решается неравенство $|x - a| < b$, то решением будут все точки интервала $(a - b;\ a + b)$, а если решается неравенство $|x - a| > b$, то точки двух открытых лучей $(-\infty;\ a - b)$ и $(a + b;\ +\infty)$. Если $b = 0$, то неравенство $|x - a| < 0$ не имеет решений, а неравенство $|x - a| > 0$ имеет решением все числа, кроме $x = a$. Если $b < 0$, то решением неравенства $|x - a| < b$ будет пустое множество, а решением неравенства $|x - a| > b$ — все действительные числа.

Равносильные переходы для решения неравенств, содержащих модуль выражения $f(x)$:

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases} \text{ или}$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x);$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x); \end{array}\right.$$

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x),$$
$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x).$$

Подготовительный вариант

1. Изобразите на координатной прямой точки, расстояние от которых до точки с координатой 7:
   а) больше 3;
   б) не больше 5.
   Задайте множество точек, удовлетворяющих данному условию, либо в виде системы, либо в виде совокупности двух неравенств.

2. Решите неравенство:

а) $|x - a| > 2$; в) $|x - a| < 2$;
б) $|x - a| > -2$; г) $|x - a| < -2$.

3. Решите неравенство $3x^2 - |x| - 2 < 0$, выполнив замену переменной.

4. Решите двойное неравенство $4 < |2 - x| < 8$.

5. С помощью графиков функций $y = |x^2 + 2x|$ и $y = x + 2$ решите неравенство $|x^2 + 2x| < x + 2$.

6. Решите неравенство $|2 - x| \leqslant |x^2 + 1|$.

7. Найдите длину промежутка, являющегося решением неравенства $x^2 - |25 - 12x| \leqslant 12x$.

8. Найдите множество решений неравенства $|x + 3| + |x - 3| \leqslant 10$.

Вариант 1

1. Изобразите на координатной прямой точки, расстояние от которых до точки с координатой 2:
а) больше 1;
б) не больше 3.
Задайте множество точек, удовлетворяющих данному условию, либо в виде системы, либо в виде совокупности двух неравенств.

2. Решите неравенство:

а) $|x + 2| > 1$; в) $|x + 2| < 1$;
б) $|x + 2| > -1$; г) $|x + 2| < -1$.

3. Решите неравенство $x^2 - |x| - 12 < 0$, выполнив замену переменной.

4. Решите двойное неравенство $1 < |3 + x| < 2$.

5. С помощью графиков функций $y = |2 + x - x^2|$ и $y = 2 - x$ решите неравенство $|2 + x - x^2| \leqslant 2 - x$.

6. Решите неравенство $|2x + 1| \leqslant |x^2 - 2x|$.

7. Найдите длину промежутка, являющегося решением неравенства $x^2 - |5x - 9| \leqslant 5x$.

8. Найдите множество решений неравенства
$|x - 1| + |2x - 3| \leqslant 2$.

Вариант 2

1. Изобразите на координатной прямой точки, расстояние от которых до точки с координатой 3:
   а) больше 2;
   б) не больше 1.
   Задайте множество точек, удовлетворяющих данному условию, либо в виде системы, либо в виде совокупности двух неравенств.

2. Решите неравенство:
   а) $|x + 1| > 3$; в) $|x + 1| < 3$;
   б) $|x + 1| > -3$; г) $|x + 1| < -3$.

3. Решите неравенство $x^2 + |x| - 20 < 0$, выполнив замену переменной.

4. Решите двойное неравенство $2 < |x + 5| < 3$.

5. С помощью графиков функций $y = 3 + 2|x| - x^2$ и $y = x + 3$ решите неравенство $3 + 2|x| - x^2 \geqslant x + 3$.

6. Решите неравенство $|x + 1| \leqslant |x^2 + x|$.

7. Найдите длину промежутка, являющегося решением неравенства $x^2 - |8{,}5x - 16| \leqslant 8{,}5x$.

8. Найдите множество решений неравенства
   $|2x - 5| + |2x + 7| \leqslant 4$.

Вариант 3

1. Изобразите на координатной прямой точки, расстояние от которых до точки с координатой -12:
   а) больше 5;
   б) не больше 2.
   Задайте множество точек, удовлетворяющих данному условию, либо в виде системы, либо в виде совокупности двух неравенств.

2. Решите неравенство:
   а) $|x - 5| > 3$; в) $|x - 5| < 3$;
   б) $|x - 5| > -3$; г) $|x - 5| < -3$.

3. Решите неравенство $x^2 + |x| - 2 < 0$, выполнив замену переменной.

4. Решите двойное неравенство $3 < |x - 5| < 5$.

5. С помощью графиков функций $y = |x^2 - x - 12|$ и $y = 4 - x$ решите неравенство $|x^2 - x - 12| \leqslant 4 - x$.

6. Решите неравенство $|2x + 1| \leqslant |x^2 - 3x|$.

7. Найдите длину промежутка, являющегося решением неравенства $x^2 - |3x - 5| \leqslant 3x$.

8. Найдите множество решений неравенства
$|x + 1| + |2x - 3| \leqslant 4$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9

Уравнения с параметрами

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Если в уравнении $f(x; a) = 0$ буквой x обозначается неизвестное число, а буквой a — некоторое фиксированное число (параметр), то это уравнение называют *уравнением с параметром*. Решить уравнение с параметром — это значит установить соответствие, позволяющее для любого значения параметра найти соответствующее множество корней этого уравнения.

Часто приходится не только решать уравнение для каждого значения параметра, но и проводить исследование уравнения: при каких значениях параметра корни уравнения положительны, отрицательны, обладают заданными свойствами, существуют.

Решение линейного уравнения $ax = k$ с параметром a разбивают на два случая: если коэффициент перед переменной x равен нулю и если не равен нулю.

При решении уравнений вида $ax^2 + mx + n = 0$, где a — параметр (m и n — некоторые числа, x — переменная) рассматривают два случая: если $a = 0$ и если $a \neq 0$. Иначе говоря, рассматривают линейное уравнение и квадратное уравнение.

Заметим, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, принадлежащие промежутку $(m; n)$, если выполняется система $\begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(m) > 0, \\ a \cdot f(n) > 0. \end{cases}$ где $f(x) = ax^2 + bx + c$,

При решении дробно-рациональных уравнений следует обращать внимание на область допустимых значений переменной.

Иногда при решении уравнений с параметрами используют графическую интерпретацию уравнения.

Подготовительный вариант

1. Решите уравнение при всех значениях параметра k:
а) $kx + 1 = x - 2$;
б) $kx + 3k + 4 = 1 - x$;
в) $k^2x = 1 - x$.

2. Решите уравнение относительно x:

а) $x - \frac{2}{a}x = 1$; б) $\frac{x-a}{2} - a = \frac{x-2}{a} - 2$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 6 = 0$ имеет:
а) два положительных корня;
б) два корня, принадлежащие промежутку $[-3; 3]$?

4. Решите уравнение $ax^2 - (2a+7)x + a + 3 = 0$ относительно переменной x.

5. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\frac{x^2 - (2b+3)x + b^2 + 3b}{x^2 - 9} = 0$ имеет единственный корень.

6. Решите уравнение $\frac{x-2}{x+3} - \frac{b}{x-3} = 1$ (b — параметр).

7. Запишите уравнение прямой, касающейся графика функции $y = -x^2 + 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Вариант 1

1. Решите уравнение при всех значениях параметра k:
а) $kx - 1 = x + 2$; в) $2x = 2 - k^2x$.
б) $kx - 3k = x - 3$;

2. Решите уравнение:

а) $2x + \frac{x}{a-1} = 3$; б) $\frac{x-a}{a} - 3 = \frac{x-3}{3} - a$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + a = 0$ имеет:
а) два отрицательных корня;
б) два корня, расстояние между которыми равно 2?

4. Решите уравнение $ax^2 - (2a+1)x + a - 2 = 0$ относительно переменной x.

5. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\frac{x^2 - (2b+1)x + b^2 + b}{x^2 - 16} = 0$ имеет единственный корень.

6. Решите относительно x уравнение $\frac{x+1}{x+2} - \frac{b}{x-2} = 1$.

7. Запишите уравнение прямой, касающейся графика функции $y = -x^2 - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Вариант 2

1. Решите уравнение при всех значениях параметра k:
а) $kx - 2 = 1 - x$;
б) $3kx - 3k = 1 - x$;
в) $k^2x = 4 - 3x$.

2. Решите уравнение:
а) $x + \frac{2x}{a+1} = 2$;
б) $\frac{x+3}{3} - a = \frac{x+a}{a} - 3$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a = 0$ имеет:
а) два корня разных знаков;
б) два корня, расстояние между которыми равно 3?

4. Решите уравнение $ax^2 - (2a - 3)x + a + 2 = 0$ относительно переменной x.

5. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\frac{x^2 - (2b - 1)x + b^2 - b}{x^2 - 4} = 0$ имеет единственный корень.

6. Решите относительно x уравнение $\frac{x-2}{x-1} + \frac{b}{x+1} = 1$.

7. Запишите уравнение прямой, касающейся графика функции $y = x^2 - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Вариант 3

1. Решите уравнение при всех значениях параметра k:
а) $kx - k^2x = 2$;
б) $kx + 2k = x + 2$;
в) $x + 2k^2x = \frac{1}{2}$.

2. Решите уравнение:
а) $3x - \frac{x}{a} = 2$;
б) $\frac{x-a}{a} - 7 = \frac{x-7}{7} - a$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - (2a - 1)x + a^2 - a - 2 = 0$ имеет:
а) два положительных корня;
б) два корня, принадлежащие промежутку $[-1; 5]$?

4. Решите уравнение $(a - 1)x^2 + (2a + 1)x + a - 2 = 0$ относительно переменной x.

5. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\frac{x^2 - (2b + 3)x + b^2 + 3b}{\sqrt{9 - x^2}} = 0$ имеет единственный корень.

6. Решите относительно x уравнение $\frac{x+2}{x+1} - \frac{b-1}{x-4} = 1$.

7. Запишите уравнение прямой, касающейся графика функции $y = x^2 + 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10

Уравнения второй степени с двумя переменными и их системы

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнение вида $F(x; y) = 0$, где $F(x; y)$ — многочлен от двух переменных, называется *уравнением с двумя переменными*. Степень многочлена $F(x; y)$ называется *степенью уравнения* $F(x; y) = 0$.

Решением уравнения $F(x; y) = 0$ является упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$ такая, что $F\ (x_0; y_0) = 0$, т. е. при подстановке в уравнение обращающая его в верное числовое равенство. Уравнения, имеющие одинаковые множества решений, называются *равносильными*.

Если все решения уравнения $F(x; y) = 0$ изобразить точками координатной плоскости xOy, то они составят *график уравнения* $F(x; y) = 0$.

Графиком линейного уравнения вида $ax + by + c = 0$ при $a = b = c = 0$ является вся координатная плоскость, при $a = b = 0$, $c \neq 0$ — пустое множество, при $a^2 + b^2 \neq 0$ (т. е. коэффициенты a и b одновременно не обращаются в нуль) — прямая. Уравнение вида $xy = k$ задаёт гиперболу, асимптотами которой являются оси координат. Можно доказать, что уравнение $x^2 - y^2 = m$ также задаёт гиперболу, но с асимптотами $y = x$ и $y = -x$. Уравнение вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ задаёт окружность с центром в точке $M(a; b)$ и радиусом R. Уравнение вида $ax^2 + bx + cy + d = 0$ задаёт параболу с ветвями, направленными вдоль оси y (вверх или вниз), уравнение вида $ax + by^2 + cy + d = 0$ — параболу с ветвями, направленными вдоль оси x (вправо или влево).

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ УРАВНЕНИЙ

График уравнения $F(-x; y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ с помощью его симметрии относительно оси y.

График уравнения $F(x; -y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ с помощью его симметрии относительно оси x.

График уравнения $F(-x;\ -y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ с помощью его центральной симметрии относительно начала координат.

График уравнения $F(x - a;\ y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ его сдвигом вдоль оси x на $|a|$ единиц (вправо, если $a > 0$, или влево, если $a < 0$).

График уравнения $F(x;\ y - b) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ его сдвигом вдоль оси y на $|b|$ единиц (вверх, если $b > 0$, или вниз, если $b < 0$).

График уравнения $F(kx;\ y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ с помощью его сжатия к оси y в k раз, если $k > 1$, или растяжения от оси y в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$.

График уравнения $F(x;\ ny) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ с помощью его сжатия к оси x в n раз, если $n > 1$, или растяжения от оси x в $\frac{1}{n}$ раз, если $0 < n < 1$.

График уравнения $F(|x|;\ y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ следующим образом: отбросить ту часть графика уравнения $F(x;\ y) = 0$, которая расположена в левой полуплоскости, и с помощью симметрии относительно оси y отобразить в эту полуплоскость ту часть графика, которая расположена в правой полуплоскости.

График уравнения $F(x;\ |y|) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ следующим образом: отбросить ту часть графика уравнения $F(x;\ y) = 0$, которая расположена в нижней полуплоскости, и с помощью симметрии относительно оси x отобразить в эту полуплоскость ту часть графика, которая расположена в верхней полуплоскости.

При сжатии или растяжении окружности получается фигура, называемая *эллипс*. Остальные фигуры (прямая, гипербола, парабола) при сжатии и растяжении остаются самими собой. Уравнение эллипса имеет вид $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, а построить его можно из окружности $x^2 + y^2 = 1$ растяжением в a раз от оси y и в b раз от оси x (если $a > 1$ и $b > 1$).

Пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы уравнений с двумя переменными $\begin{cases} F(x;\ y) = 0, \\ G(x;\ y = 0 \end{cases}$ в верное числовое равенство, называется *решением системы*. Решить систему — значит найти множество её решений.

Среди основных методов решения систем уравнений выделяют *графический способ*, *способ подстановки* и *способ сложения*.

Однако графический способ часто даёт лишь приближённые значения переменных, а способ подстановки и способ сложения для систем уравнений выше первой могут и не получаться.

Подготовительный вариант

1. Среди пар чисел (2; −1), (−1; 2) и (−2; 1) укажите те, которые являются решением:
   а) уравнения $2x^2 + xy - 3y^2 = 3$;
   б) системы $\begin{cases} xy = -2, \\ x^2 + 2xy - y = 1. \end{cases}$

2. Постройте график уравнения:
   а) $x^2 - 8x + y^2 + 6y = 0$; в) $(|x| + y - 1)(x + |y| + 1) = 0$.
   б) $x + y^2 + 2y - 3 = 0$;

3. Решите систему уравнений:
   а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26, \\ xy = 5. \end{cases}$

4. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0, \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$ не имеет решений.

5. Найдите число решений системы уравнений $\begin{cases} x = 1 - y^2, \\ x^2 = 3 - y^2, \end{cases}$ построив графики каждого уравнения.

6. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x^2 - y^2 = 2p \end{cases}$ имеет ровно одно решение?

Вариант 1

1. Среди пар чисел (2; −1), (−2; 1) и (−1; 2) укажите те, которые являются решением:
   а) уравнения $x^2 + xy + 2y^2 = 4$;
   б) системы $\begin{cases} xy = -2, \\ x^2 - 2xy + y = 7. \end{cases}$

2. Постройте график уравнения:
   а) $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$; в) $(|x| + y + 3)(x - |y| + 2) = 0$.
   б) $x + y^2 - 2y - 3 = 0$;

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$

4. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 5 = 0, \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ не имеет решений.

5. Найдите число решений системы уравнений $\begin{cases} x = 2 + y^2, \\ x^2 = 5 - y^2, \end{cases}$ построив графики каждого уравнения.

6. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0, \\ x^2 - y^2 = 2p \end{cases}$ имеет ровно одно решение?

Вариант 2

1. Среди пар чисел $(-2; -2)$, $(2; 2)$ и $(1; 4)$ укажите те, которые являются решением:

а) уравнения $2x^2 + xy - 3y^2 = 0$;

б) системы $\begin{cases} xy = 4 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 6 \end{cases}$.

2. Постройте график уравнения:

а) $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 0$;

б) $x + y^2 + y - 2 = 0$;

в) $(|x| - y + 3)(x + |y| + 2) = 0$.

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = -4. \end{cases}$

4. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y + 2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ не имеет решений.

5. Найдите число решений системы уравнений $\begin{cases} x = 1 + y^2 \\ x^2 = 4 - y^2, \end{cases}$ построив графики каждого уравнения.

6. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0, \\ x^2 - y^2 = 2p \end{cases}$ имеет ровно одно решение?

Вариант 3

1. Среди пар чисел (2; −1), (−2; −1) и (1; 2) укажите те, которые являются решением:
   а) уравнения $2x^2 - xy - 3y^2 = 3$;
   б) системы $\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$

2. Постройте график уравнения:
   а) $x^2 + 8x + y^2 - 4y - 44 = 0$;
   б) $x + y^2 + 2y - 8 = 0$;
   в) $(|x|y - 2)(x + |y - 1| + 3) = 0$.

3. Решите систему уравнений:
   а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26, \\ xy = -5. \end{cases}$

4. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$ не имеет решений.

5. Найдите число решений системы уравнений $\begin{cases} x = 1 - (y - 2)^2, \\ (x + 1)^2 = 3 - y^2, \end{cases}$ построив графики каждого уравнения.

6. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0, \\ x^2 - y^2 = 2p \end{cases}$ имеет ровно одно решение?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11

Уравнения второй степени с двумя переменными и их системы

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для решения систем уравнений с двумя переменными степени выше первой применяют ряд специальных приёмов.

1. Если одно из уравнений системы, например уравнение $F(x; y) = 0$, — уравнение второй степени, то его можно попытаться *разложить на множители*, т. е. записать в виде $f_1(x; y) \cdot f_2(x; y) = 0$. В этом случае исходная система $\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ G(x; y) = 0 \end{cases}$

разбивается на совокупность двух систем $\begin{cases} f_1(x; y) = 0 \\ G(x; y) = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f_2(x; y) = 0 \\ G(x; y) = 0. \end{cases}$

2. Если левая часть одного из уравнений системы, например уравнения $F(x; y) = 0$, есть *однородный многочлен* (т. е. многочлен, все члены которого имеют одну и ту же степень n), то сначала решают это уравнение относительно новой переменной $z = \frac{x}{y}$ (для этого все слагаемые уравнения делят на y^n) и потом возвращаются к совокупности нескольких систем вида $\begin{cases} x = z_i \cdot y \\ G(x; y) = 0 \end{cases}$, где z_i — корень уравнения $F(z) = 0$.

   Замечание 1. Следует помнить, что пара чисел (0; 0) является решением однородного уравнения $F(x; y) = 0$.

   Замечание 2. Этот приём можно применить в случае, если в системе левые части обоих уравнений — однородные многочлены одной и той же степени, а правые части отличны от нуля, т. е. $\begin{cases} F(x; y) = a \\ G(x; y) = b \end{cases}$. Тогда первое уравнение умножают на число b, а второе — на число a, после чего из первого уравнения вычитают второе и получают однородное уравнение $b \cdot F(x; y) - a \cdot G(x; y) = 0$.

3. Если каждое уравнение системы $\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ G(x; y) = 0 \end{cases}$ можно представить в виде $F(\alpha(x; y); \beta(x; y)) = 0$ и $G(\alpha(x; y); \beta(x; y)) = 0$, то целесообразно ввести *замену переменных* $\begin{cases} a = \alpha(x; y) \\ b = \beta(x; y). \end{cases}$ В частности, если каждое уравнение является симметрическим выражением относительно переменных x и y (т. е. замена в уравнении переменной x на y и переменной y на x приводит к тому же уравнению), то применятся замена $\begin{cases} x + y = u \\ xy = v. \end{cases}$

   Замечание 1. Все симметрические многочлены выражаются через элементарные симметрические многочлены $u = x + y$ и $v = xy$. Например, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$, $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - 3v)$ и т. д.

З а м е ч а н и е 2. После решения новых систем нужно не забыть вернуться к прежним переменным.

4. Иногда бывает выгодно выполнить деление одного уравнения системы на другое, если в этом случае получается более простое уравнение или уравнение, содержащее только одну переменную.

При решении задач с помощью системы уравнений с несколькими переменными поступают следующим образом:

обозначают неизвестные величины буквами;

составляют систему уравнений, используя условие задачи;

решают эту систему;

истолковывают результат в соответствии с условием задачи.

При решении задач с помощью системы уравнений с несколькими переменными, как правило, составляют столько уравнений, сколько введено неизвестных.

Подготовительный вариант

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ xy + 2y^2 = 14. \end{cases}$

2. Найдите значение выражения xy, если $(x;\ y)$ — решение системы $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8} \\ x + y = 12. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + xy + y = 7 \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$

4. В бак проведены две трубы. Если открыть обе трубы, то бак наполнится через 18 минут. Если открыть только вторую трубу, то бак наполнится на 15 минут быстрее, чем через первую трубу. За сколько минут может наполнить бак каждая труба, работая отдельно?

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 7xy + 12y^2 = 0 \\ 3x^2 + xy - 28y^2 = 24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 4. \end{cases}$

6. При каком значении параметра p система

$\begin{cases} xy + \left(x - \sqrt{xy} - y\right)\left(x + \sqrt{xy} - y\right) = 4 - 2xy \\ x^2 + p^2 = \sqrt{y^2} \end{cases}$ не имеет решений?

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ xy - 3y^2 = -2. \end{cases}$

2. Найдите значение выражения $x - y$, если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4} \\ xy = 4. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 4xy + y = 6 \\ x^2y + xy^2 = 2. \end{cases}$

4. Резервуар объёмом 18 м^3 можно наполнить с помощью двух труб. Обе трубы, работая одновременно, заполняют резервуар за 3 ч. Если сначала вода поступает только через первую трубу, имеющую большую производительность, и заполняет $\dfrac{3}{4}$ объёма, а потом оставшуюся часть заполняет вода только из второй трубы, то резервуар будет наполнен через 6 ч. Сколько воды поступает в 1 час через каждую трубу?

5. Решите систему уравнений:

   а) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x^2 - 2xy + y^2 = 4 \\ 3x^2 - 3xy + 2y^2 = 2. \end{cases}$

6. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} |x| + 4|y| = a \\ |y| + x^2 = 1 \end{cases}$ имеет четыре различных решения?

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3xy + y^2 = 7. \end{cases}$

2. Найдите значение выражения $x + y$, если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ xy = 6. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - xy + 3y = 8 \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y = -12. \end{cases}$

4. Бассейн может наполняться водой с помощью двух насосов разной производительности. Если половину бассейна наполнить, включив лишь первый насос, а затем, выключив его, продолжить наполнение с помощью второго насоса, то весь бассейн наполнится за 2 ч 30 мин. При одновременной работе обоих насосов бассейн наполняется за 1 ч 12 мин. Какую часть бассейна наполняет за 20 мин работы насос меньшей производительности?

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0 \\ x^2 - 5xy + 2y^2 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 3xy - 3y^2 = 1 \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2. \end{cases}$

6. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} |x| + 2|y| = 1 \\ |y| + x^2 = a \end{cases}$ имеет четыре различных решения?

Вариант 3

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 7 \\ xy - x^2 = 21. \end{cases}$

2. Найдите значение выражения xy, если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \\ x - y = -2. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - xy + y = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11. \end{cases}$

4. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой трассе с постоянными скоростями в одном направлении, оказываются рядом каждые 3 ч. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются через каждые 20 мин. За какое время проедет всю трассу каждый автомобиль?

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 = 0 \\ 2x^2 + xy - y^2 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5. \end{cases}$

6. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} |y| + x^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет четыре различных решения?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12

Неравенства с двумя переменными и их системы

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая его в верное неравенство.

Линейным неравенством с двумя переменными называется неравенство вида $ax + by < c$ или $ax + by > c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа.

Множество всех решений неравенства, отмеченных в координатной плоскости точками, называется *графиком неравенства с двумя переменными*.

Графиком линейного неравенства является либо вся координатная плоскость, либо пустое множество, либо полуплоскость, ограниченная графиком уравнения $ax + by = c$ (прямой). В последнем случае сама граничная прямая изображается пунктирной линией (если неравенство не строгое, то — сплошной линией).

Для построения в координатной плоскости фигуры, задаваемой неравенством $F(x; y) < 0$ или $F(x; y) > 0$, строят график уравнения $F(x; y) = 0$ и методом пробной точки определяют, какая из полученных частей плоскости содержит решения неравенства.

Решением системы неравенств с двумя переменными является множество общих решений неравенств, входящих в систему (пересечение множеств решений неравенств, входящих в систему).

Подготовительный вариант

1. Является ли пара чисел $(2; -1)$ решением:
а) неравенства $2x^2 + xy - 3y^2 < 3$;
б) системы неравенств $\begin{cases} xy > -6 \\ x^2 + xy + y^2 < 7\end{cases}$?

2. Графиком неравенства $2x - 3y \leqslant 6$ является полуплоскость. Пересекает ли границу этой полуплоскости отрезок AB, если:
а) $A(1; 1)$, $B(-2; -1)$; б) $A(-1; 2)$, $B(2; -1)$?

3. Изобразите в координатной плоскости множество решений неравенства:
а) $|x| + y \leqslant 2$; в) $x + y^2 + 2y > 3$;
б) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1$; г) $(|x| + y - 1)(x + |y| + 1) \leqslant 0$.

4. Задайте системой неравенств треугольник с вершинами в точках $A(0;\ 2)$, $B(3;\ 0)$ и $C(2;\ 3)$.

5. Найдите площадь фигуры, задаваемой системой неравенств
$$\begin{cases} 1 \leqslant |x| \leqslant 3 \\ 2 \leqslant |y| \leqslant 3. \end{cases}$$

6. При каком значении параметра b система неравенств $\begin{cases} xy \geqslant 4 \\ x^2 + y^2 \leqslant b \end{cases}$ не имеет решений?

Вариант 1

1. Является ли пара чисел $(-2;\ 1)$ решением:
   а) неравенства $2x + xy + 2y < 5$;
   б) системы неравенств $\begin{cases} xy > -6 \\ x^2 + xy - 2y^2 < 3 \end{cases}$?

2. Графиком неравенства $3x - 2y \leqslant 6$ является полуплоскость. Пересекает ли границу этой полуплоскости отрезок AB, если:
   а) $A(-1;\ 1)$, $B(-2;\ -1)$; б) $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ -1)$?

3. Изобразите в координатной плоскости множество решений неравенства:
   а) $|x - 1| + y > 3$; в) $x + y^2 + y > 6$;
   б) $x^2 + 9y^2 \leqslant 9$; г) $(|x| - y - 2)(x - |y| + 1) \leqslant 0$.

4. Задайте системой неравенств треугольник с вершинами в точках $A(0;\ -1)$, $B(-3;\ 0)$ и $C(-1;\ 1)$.

5. Найдите площадь фигуры, задаваемой системой неравенств
$$\begin{cases} 2 \leqslant |x| \leqslant 3 \\ 2 \leqslant |y| \leqslant 4 \end{cases}.$$

6. При каком значении параметра b система неравенств $\begin{cases} xy \geqslant b \\ x^2 + y^2 \leqslant 4 \end{cases}$ не имеет решений?

Вариант 2

1. Является ли пара чисел $(2;\ -1)$ решением:
   а) неравенства $2x + xy - 3y > 2$;
   б) системы неравенств $\begin{cases} xy > -6 \\ x^2 - xy - 2y^2 < 6 \end{cases}$?

2. Графиком неравенства $3x + 2y \geqslant 6$ является полуплоскость. Пересекает ли границу этой полуплоскости отрезок AB, если:
а) $A(1; 1)$, $B(-2; -1)$; б) $A(-1; 2)$, $B(2; 1)$?

3. Изобразите в координатной плоскости множество решений неравенства:
а) $|x + 2| - y \leqslant 4$; в) $x + y^2 - y > 6$;
б) $4x^2 + y^2 \leqslant 4$; г) $(|x| + y + 2)(x + |y| - 3 \geqslant 0$.

4. Задайте системой неравенств треугольник с вершинами в точках $A(0; 3)$, $B(-2; 0)$ и $C(1; 1)$.

5. Найдите площадь фигуры, задаваемой системой неравенств $\begin{cases} 1 \leqslant |x| \leqslant 2 \\ 3 \leqslant |y| \leqslant 4 \end{cases}$.

6. При каком значении параметра b система неравенств $\begin{cases} xy \geqslant 9 \\ x^2 + y^2 \leqslant b \end{cases}$ не имеет решений?

Вариант 3

1. Является ли пара чисел $(2; 2)$ решением:
а) неравенства $2x^2 + xy - y^2 < 3$;
б) системы неравенств $\begin{cases} xy > 4 \\ x^2 + xy + y^2 < 9 \end{cases}$?

2. Графиком неравенства $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} \leqslant 1$ является полуплоскость. Пересекает ли границу этой полуплоскости отрезок AB, если:
а) $A(1; 1)$, $B(-2; 1)$; б) $A(-1; 2)$, $B(2; 1)$?

3. Изобразите в координатной плоскости множество решений неравенства:
а) $|2x + y| \leqslant 2$; в) $x + y^2 + y > 2$;
б) $4x^2 + 9y^2 \leqslant 36$; г) $(|x|y - 1)(x|y| - 2) \leqslant 0$.

4. Задайте системой неравенств треугольник с вершинами в точках $A(0; 1)$, $B(-2; 0)$ и $C(-1; 2)$.

5. Найдите площадь фигуры, задаваемой системой неравенств $\begin{cases} 1 \leqslant |x - 1| \leqslant 2 \\ 2 \leqslant |y + 1| \leqslant 3 \end{cases}$.

6. При каком значении параметра b система неравенств $\begin{cases} xy \geqslant 8 \\ x^2 + y^2 \leqslant b \end{cases}$ не имеет решений?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13

Свойства последовательностей

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Числовая последовательность — это функция натурального аргумента. Вместо функциональной символики $y = f(n)$ используется алгебраическая: $a_n = f(n)$, где $f(n)$ — *формула n-ого члена последовательности.*

Часто последовательность задаётся *рекуррентной* формулой: указывается один или несколько первых членов последовательности и формула (или правило), позволяющая найти любой член последовательности по известным предшествующим членам последовательности. Например, *последовательность Фибоначчи* задаётся рекуррентной формулой: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

Последовательность, в которой каждый последующий член больше предыдущего, называется *возрастающей.* Последовательность, в которой каждый последующий член меньше предыдущего, называется *убывающей.* Возрастающая или убывающая последовательность называется *монотонной.*

Последовательность (a_n) называется *ограниченной сверху,* если существует такое число M, что для любого $n \in N$ $a_n \leqslant M$. Последовательность (a_n) называется *ограниченной снизу,* если существует такое число m, что для любого $n \in N$ $a_n \geqslant m$. Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется *ограниченной.*

МЕТОД ПОЛНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Утверждение $P(n)$ справедливо для любого натурального n, если:

1) утверждение $P(n)$ верно для $n = 1$;

2) из справедливости утверждения $P(n)$ при $n = k$ следует его справедливость при $n = k + 1$.

Подготовительный вариант

1. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = n^2 - 2n - 3$. Среди чисел -3, 0, 1, 5 найдите те, которые являются членами этой последовательности, и укажите их номер.

2. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_1 = 5$, $x_{n+1} = x_n + 3$.
а) Найдите первые пять членов этой последовательности.
б) Докажите, что $x_n = 3n + 2$ для любых $n \in N$.

3. Определите характер монотонности последовательности:
а) $x_n = n^2 - 2n - 3$; в) $b_n = n^2 - 8n + 1$.
б) $c_n = \dfrac{4 - 2n}{n + 1}$;
Ответ обоснуйте (можно использовать геометрическую иллюстрацию).

4. Является ли ограниченной, ограниченной снизу или ограниченной сверху последовательность:
а) $x_n = n^2 - 2n - 3$; в) $b_n = n^2 - 8n + 1$?
б) $c_n = \dfrac{4 - 2n}{n + 1}$;
Ответ обоснуйте (можно использовать геометрическую иллюстрацию).

5. Докажите, что:
а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$, где $n \in N$;
б) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \dfrac{n}{2n + 1}$, где $n \in N$.

6. Дана последовательность $a_n = 4^n + 6n - 1$. Докажите, что a_n кратно 9 при любом $n \in N$.

Вариант 1

1. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = -n^2 + 6n - 5$. Среди чисел −3, 0, 3, 5 найдите те, которые являются членами этой последовательности, и укажите их номер.

2. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_1 = 3$, $x_{n+1} = 2 \cdot x_n - 1$.
а) Найдите первые пять членов этой последовательности.
б) Докажите, что $x_n = 2^n + 1$ для любых $n \in N$.

3. Определите характер монотонности последовательности:
а) $x_n = -n^2 + 6n - 5$; в) $b_n = n^2 + 4n + 1$.
б) $c_n = \dfrac{4n + 4}{n + 2}$;
Ответ обоснуйте.

4. Является ли ограниченной, ограниченной снизу или ограниченной сверху последовательность:
а) $x_n = -n^2 + 6n - 5$; в) $b_n = n^2 + 4n + 1$?
б) $c_n = \frac{4n + 4}{n + 2}$;
Ответ обоснуйте.

5. Докажите, что:
а) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \ldots + n \cdot (2n + 1) = \frac{n(n + 1)(4n + 5)}{6}$ где $n \in N$;
б) $\frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \ldots + \frac{1}{(5n - 3)(5n + 2)} = \frac{n}{2(5n + 2)}$, где $n \in N$.

6. Докажите, что $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{2n + 1}$ при любом $n \in N$.

Вариант 2

1. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = -n^2 + 6n - 8$. Среди чисел -3, -1, 1, 5 найдите те, которые являются членами этой последовательности, и укажите их номер.

2. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_1 = 4$, $x_{n+1} = 3 \cdot x_n - 2$.
а) Найдите первые пять членов этой последовательности.
б) Докажите, что $x_n = 3^n + 1$ для любых $n \in N$.

3. Определите характер монотонности последовательности:
а) $x_n = n^2 + 6n - 8$; в) $b_n = n^2 + 2n + 3$.
б) $c_n = \frac{2n + 6}{n + 4}$;
Ответ обоснуйте.

4. Является ли ограниченной, ограниченной снизу или ограниченной сверху последовательность:
а) $x_n = -n^2 + 6n - 8$; в) $b_n = n^2 + 2n + 3$?
б) $c_n = \frac{2n + 6}{n + 4}$;
Ответ обоснуйте.

5. Докажите, что:
а) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (4n - 1) = \frac{n(n + 1)(8n + 1)}{6}$, где $n \in N$;
б) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n - 3)(4n + 1)} = \frac{n}{4n + 1}$, где $n \in N$.

6. Докажите, что $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(3n)^2} < \frac{1}{3n + 1}$ при любом $n \in N$.

Вариант 3

1. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = 4^n - 3^n + 2n + 1$. Среди чисел -4, 4, 7, 12 найдите те, которые являются членами этой последовательности, и укажите их номер.

2. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_1 = 11$, $x_{n+1} = x_n + 4$.
   а) Найдите первые пять членов этой последовательности.
   б) Докажите, что $x_n = 4n + 7$ для любых $n \in N$.

3. Определите характер монотонности последовательности:
   а) $x_n = 5 + 4n - n^2$; в) $b_n = \dfrac{5 - 2n}{n - 1}$?
   б) $c_n = \sqrt{2n + 1} - \dfrac{2}{n}$;
   Ответ обоснуйте (можно использовать геометрическую иллюстрацию).

4. Является ли ограниченной, ограниченной снизу или ограниченной сверху последовательность:
   а) $x_n = 5 + 4n - n^2$; в) $b_n = \dfrac{5 - 2n}{n - 1}$?
   б) $c_n = \sqrt{2n + 1} - \dfrac{2}{n}$;
   Ответ обоснуйте (можно использовать геометрическую иллюстрацию).

5. Докажите, что:
   а) $5 \cdot 1 + 9 \cdot 5 + 13 \cdot 5^2 + \ldots + (4n + 1) \cdot 5^{n-1} = n \cdot 5^n$ где $n \in N$;
   б) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n + 1}{2n}$, где $n \in N$.

6. Дана последовательность $a_n = 7^n + 3n - 1$. Докажите, что a_n кратно 9 при любом $n \in N$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 14

Арифметическая прогрессия

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

Если (a_n) — арифметическая прогрессия, то для любого $n \in N$ разность $a_{n+1} - a_n$ равна одному и тому же числу, которое называется разностью арифметической прогрессии и обозначается буквой d.

Рекуррентная формула, задающая арифметическую прогрессию: $a_{n+1} = a_n + d$.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Из формулы n-го члена арифметической прогрессии следует, что арифметическая прогрессия является линейной функцией натурального аргумента, которая при $d > 0$ является возрастающей, при $d < 0$ — убывающей последовательностью.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Полезное свойство арифметической прогрессии: если $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$. Т. е., сумма двух членов арифметической прогрессии, равноудалённых от двух данных, равна сумме этих двух членов.

Сумма n первых членов арифметической прогрессии находится по одной из формул: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ или $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Подготовительный вариант

1. Найдите пятый член арифметической прогрессии, если её второй член равен $2 + \sqrt{3}$, а шестой равен $6 - 3\sqrt{3}$.

2. Найдите сумму пятидесяти первых членов арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 0{,}5n - 14$.

3. Сколько положительных членов содержится в арифметической прогрессии 18,3; 17,5; ...? Найдите наименьший положительный член этой прогрессии.

4. Между числами -8 и 18 вставьте четыре числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали шесть первых членов арифметической прогрессии.

5. Найдите x, при котором числа $1 - 5x$, $-x + 2$, $x^2 + 5$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию.

6. В арифметической прогрессии $\frac{a_{17}}{a_2} = 4$. Найдите $\frac{a_4}{a_{11}}$.

7. Найдите сумму всех трёхзначных чисел:
а) кратных 7; б) не кратных 7.

8. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 12 - 0{,}5n$. При каком количестве членов прогрессии их сумма будет наибольшей?

Вариант 1

1. Найдите пятый член арифметической прогрессии, если её первый член равен $2\sqrt{5} - 11$, а третий равен $2 - 3\sqrt{5}$.
2. Найдите сумму двадцати шести первых членов арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 4n - 3$.
3. Сколько отрицательных членов содержится в арифметической прогрессии $-32{,}4$; $-29{,}9$; ...? Найдите наибольший отрицательный член этой арифметической прогрессии.
4. Между числами 8 и 26 вставьте три числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали пять первых членов арифметической прогрессии.
5. Найдите x, при котором числа $x - 1$, $2x - 1$, $x^2 - 5$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию.
6. В арифметической прогрессии $\frac{a_{170}}{a_2} = 15$. Найдите $\frac{a_{21}}{a_{12}}$.
7. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не делящихся на 13.
8. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 18 - 3n$. При каком количестве членов прогрессии их сумма будет наибольшая?

Вариант 2

1. Найдите пятый член арифметической прогрессии, если её первый член равен $2\sqrt{2} - 6$, а третий равен $4 - 6\sqrt{2}$.
2. Вычислите сумму девятнадцати первых членов арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 15 - 3n$.
3. Сколько положительных членов содержится в арифметической прогрессии 12,6; 12,1; ...? Найдите наименьший положительный член этой арифметической прогрессии.
4. Между числами 4 и 22 вставьте три числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали пять первых членов арифметической прогрессии.
5. Найдите x, при котором числа $x + 1$, $4x - 1$, $x^2 + 3$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию.

6. В арифметической прогрессии $\frac{a_{133}}{a_5} = 17$. Найдите $\frac{a_{25}}{a_{47}}$.

7. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не делящихся на 17.

8. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 12 - 5n$. При каком количестве членов прогрессии (начиная с первого) их сумма будет наибольшая?

Вариант 3

1. Найдите первый член арифметической прогрессии, если её второй член равен 1, а третий равен $\sqrt{5}$.

2. Найдите сумму сорока первых членов арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 0{,}5n - 6$.

3. Сколько положительных членов содержится в арифметической прогрессии 18,3; 17,1; ...? Найдите наибольший отрицательный член этой прогрессии.

4. Между числами −8 и 7 вставьте четыре числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали шесть первых членов арифметической прогрессии.

5. Найдите все x, при которых числа $3 - 2x$, $4x - 2$, $x^2 + 2$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию.

6. В арифметической прогрессии $\frac{a_{17}}{a_2} = 4$. Найдите $\frac{a_{11}}{a_4}$.

7. Найдите сумму всех трёхзначных чисел:
   а) кратных 11;   б) не кратных 11.

8. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 24 - 2n$. При каком количестве членов прогрессии их сумма будет наибольшей?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 15

Геометрическая прогрессия

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число.

Если (b_n) — геометрическая прогрессия, то для любого $n \in N$ частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ равно одному и тому же числу, которое называется *знаменателем* геометрической прогрессии и обозначается буквой q.

Рекуррентная формула, задающая геометрическую прогрессию: $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Из этой формулы следует, что геометрическая прогрессия задаётся функцией вида $y = k \cdot a^x$, где a, k — константы.

Характеристическое свойство геометрической прогрессии: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Полезное свойство геометрической прогрессии (b_n): если $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии, у которой $q \neq 1$, находится по одной из двух формул: $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1}$ или $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Если в геометрической прогрессии $q = 1$, то каждый её член равен b_1 и $S_n = nb_1$.

Из формулы $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ при $b_1 = 1$ и $q \neq 1$ следует, что $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, откуда получается тождество $q^n - 1 = (q - 1)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$.

Подготовительный вариант

1. В геометрической прогрессии $\sqrt{2} - 1$; $2 - \sqrt{2}$; ... найдите:
   а) знаменатель;
   б) пятый член;
   в) формулу n-го члена прогрессии;
   г) сумму восьми первых членов прогрессии.

2. Изобразите в координатной плоскости первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_7 = \frac{1}{8}$, $b_9 = \frac{1}{32}$ и $q < 0$ (где q — знаменатель геометрической прогрессии).

3. В геометрической прогрессии (b_n) все члены положительны. Найдите S_6, если известно, что $S_2 = 9$ и $S_3 = 21$.

4. Найдите x, при котором числа $x - 3$, $\sqrt{5x}$, $x + 16$ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию.

5. В геометрической прогрессии (b_n) $b_5 - b_3 = 4$, $b_7 - b_5 = 12$. Найдите $b_9 - b_7$.

6. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 84, а сумма средних равна −24. Найдите эти числа.

7. Сколько денег будет на счёте вкладчика банка через 4 года, если он положил 20000 рублей под 5 % годовых?

Вариант 1

1. Дана геометрическая прогрессия 30; 15; ... .. Найдите:
а) её знаменатель;
б) её четвёртый член;
в) формулу n-го члена прогрессии;
г) сумму первых шести членов.

2. Изобразите в координатной плоскости первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_5 = 4$, $b_7 = 16$ и $q < 0$, где q — знаменатель прогрессии.

3. В геометрической прогрессии (b_n) все члены положительны. Найдите S_5, если известно, что $S_2 = 5$, $S_3 = 21$.

4. Найдите все значения x, при которых значения выражений $3x - 5$, $2x$, $3x$ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию.

5. Первый член возрастающей геометрической прогрессии равен 2. Разность между третьим и вторым членами этой прогрессии равна 12. Найдите второй и третий её члены.

6. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 252, а сумма средних членов равна 60. Найдите эти числа.

7. Первоначальный вклад в 400 рублей банк увеличивает на 15 % ежегодно. Каким станет этот вклад через 4 года?

Вариант 2

1. Дана геометрическая прогрессия −32; −16; ... . Найдите:
а) её знаменатель;
б) её четвёртый член;
в) формулу n-го члена прогрессии;
г) сумму восьми первых членов прогрессии.

2. Изобразите в координатной плоскости первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_5 = 9$, $b_7 = 81$ и $q < 0$, где q — знаменатель прогрессии.

3. В геометрической прогрессии (b_n) все члены положительны. Найдите S_5, если известно, что $S_2 = 8$, $S_3 = 26$.

4. Найдите все значения x, при которых значения выражений $5x - 9$, $2x$, x в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию.

5. Второй член геометрической прогрессии равен 9. Сумма третьего и четвёртого членов этой прогрессии равна 4. Найдите первый и третий её члены, если произведение первого и второго членов положительно.

6. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 140, а сумма средних членов равна 60. Найдите эти числа.

7. Первоначальный вклад в 300 рублей банк увеличивает на 5 % ежегодно. Каким станет этот вклад через 4 года?

Вариант 3

1. В геометрической прогрессии $\sqrt{2} - 1$; 1; ... найдите:
а) знаменатель;
б) четвёртый член;
в) формулу n-го члена прогрессии;
г) сумму пяти первых членов прогрессии.

2. Изобразите в координатной плоскости первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_6 = \frac{1}{8}$, $b_8 = \frac{1}{32}$ и $q > 0$ (где q — знаменатель геометрической прогрессии).

3. В геометрической прогрессии (b_n) все члены положительны. Найдите S_6, если известно, что $S_2 = 8$ и $S_3 = 26$.

4. Найдите значение переменной x, при котором числа $x - 1$, $2\sqrt{x}$, $x + 3$ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию.

5. В геометрической прогрессии (b_n) $b_5 + b_3 = 8$, $b_7 + b_5 = 24$. Найдите $b_9 + b_7$.

6. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна -21, а сумма средних равна 6. Найдите эти числа.

7. Сколько денег будет на счёте вкладчика банка через 3 года, если он положил 50000 рублей под 4 % годовых?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 16

Сходящиеся последовательности

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Число b называется *пределом последовательности* (a_n), если для любого положительного числа ε существует такой номер n_0, что при любых $n > n_0$ верно неравенство $|a_n - b| < \varepsilon$. Это означает, что при любом наперёд заданном $\varepsilon > 0$ можно найти $n_0 \in N$ такое, что все члены последовательности с бо́льшим номером окажутся «пойманными в ловушку», будут принадлежать промежутку $(b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$, т. е. для них будет выполняться двойное неравенство $b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$ или $\lim a_n = b$ (без указания того, что $n \to \infty$), а также запись $a_n \to b$ при $n \to \infty$.

Последовательность (a_n), имеющая предел, называется *сходящейся*. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*. Последовательность, пределом которой является число 0, называется *бесконечно малой* последовательностью. Например, последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$ является бесконечной малой.

СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Последовательность может иметь только один предел.
2. Если все члены последовательности равны b, то предел этой последовательности равен b.
3. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.
4. Геометрическая прогрессия (b_n), у которой $|q| < 1$, является сходящейся.

Бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем q, где $|q| < 1$, называют *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*. Заметим, что термин «бесконечно убывающая» характеризует здесь изменение не самих членов прогрессии, а только их модулей.

Последовательность (S_n) сумм $S_1 = b_1$, $S_2 = b_1 + b_2$, $S_3 = b_1 + b_2 + b_3$, ..., $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, ..., где (b_n) — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, является сходящейся, предел этой последовательности называется *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии*, т. е. $\lim S_n = S$. При этом формула $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$ называется формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Подготовительный вариант

1. Представьте в виде обыкновенной дроби:
а) 0,(15); б) 0,2(09).

2. Вычислите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4n - 1}{2n + 3}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 - 11n + 3}{3 - 2n - 4n^2}$.

3. Найдите сумму $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \ldots$.

4. Найдите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 3n - 2} - 2n - 1\right)$;

б) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + 5 + \ldots + (4n - 3)}{3 - 2n - 4n^2}$.

5. Найдите номер последовательности, начиная с которого выполняется неравенство $|a_n| < 0{,}0001$, если $a_n = \frac{2}{3n - 1}$.

6. Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(5n - 4)(5n + 1)}\right).$$

7. В угол вписаны окружности с уменьшающимися радиусами так, что каждая следующая окружность касается предыдущей. Найдите сумму длин всех этих окружностей, если радиус первой равен 1, а площадь круга, ограниченного второй окружностью, равна $0{,}64\pi$.

Вариант 1

1. Представьте в виде обыкновенной дроби:
а) 0,(12); б) 0,5(39).

2. Вычислите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n + 1}{4n + 2}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 - n}{7 - 2n - n^2}$.

3. Вычислите сумму $4 + 44 + 444 + \ldots + 44\ldots44$, состоящую из ста слагаемых.

4. Найдите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n^2 - n + 4} - 2n + 2\right)$;

б) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2 + 5 + \ldots + (3n - 1)}{n^2 + n + 2}$.

5. Найдите номер последовательности, начиная с которого выполняется неравенство $|a_n| < 0{,}001$, если $a_n = \dfrac{15}{5n+7}$.

6. Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \ldots + \frac{1}{(5n-3)(5n+2)} \right).$$

7. В правильный треугольник со стороной 3 см вписана окружность, в которую вписан ещё один правильный треугольник, и т.д. Найдите сумму площадей всех треугольников.

Вариант 2

1. Представьте в виде обыкновенной дроби:
а) 0,(21); б) 0,3(42).

2. Вычислите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3-4n}{2+3n}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n^2-3n+11}{9-4n-n^2}$.

3. Вычислить сумму 3 + 33 + 333 + ... + 33...33, состоящую из ста слагаемых.

4. Найдите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n^2+5n-3} - 2n + 3\right)$;

б) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1+7+\ldots+(6n-5)}{3+7n-4n^2}$.

5. Найдите номер последовательности, начиная с которого выполняется неравенство $|a_n| < 0{,}001$, если $a_n = \dfrac{12}{4n+5}$.

6. Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} \right).$$

7. В окружность радиуса 4 см вписан квадрат, в который снова вписана окружность, и т.д. Найдите сумму длин всех таких окружностей.

Вариант 3

1. Представьте в виде обыкновенной дроби:
а) 0,(51); б) 0,7(63).

2. Вычислите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4 - 3n}{2n + 1}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n^2 - 13}{3n - n^2}$.

3. Найдите сумму $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{16} - \frac{1}{18} + \ldots$.

4. Найдите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{9n^2 + 3n - 2} - 3n - 2\right)$;

б) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 4 + \ldots + (3n - 2)}{n^2 - 2n - 3}$.

5. Найдите номер последовательности, начиная с которого выполняется неравенство $|a_n| < 0{,}001$, если $a_n = \dfrac{5}{2n - 3}$.

6. Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 17} + \ldots + \frac{1}{(6n - 1)(6n + 5)}\right).$$

7. Длины трёх отрезков составляют геометрическую прогрессию. При каких значениях знаменателя прогрессии из этих отрезков можно составить треугольник?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 17

Взаимно обратные функции

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Функция с областью определения X и областью значений Y называется *обратимой*, если обратное ей соответствие между множеством Y и множеством X является функцией. Если функция f обратима на множестве X, то обратное соответствие называют ***функцией, обратной функции f***.

Обратимой является та, и только та, функция, которая каждое своё значение принимает лишь при одном значении аргумента. В частности, ***монотонная функция обратима***.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (относительно биссектрисы I и III координатных углов). Из этого следует, что $f(g(x)) = x$ и $g(f(x)) = x$, где $f(x)$ и $g(x)$ — взаимно обратные функции.

СВОЙСТВА ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — взаимно обратные, то $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$.

2. Функция, обратная возрастающей, также является возрастающей. Функция, обратная убывающей, является убывающей.

3. Если обратимая функция $y = f(x)$ нечётная, то обратная ей функция $y = g(x)$ также нечётная.

Степенная функция с нечётным показателем $y = x^n$, где $n \in N$, монотонна, следовательно, обратима. Степенная функция с чётным показателем $y = x^n$, где $n \in N$, монотонна на промежутке $[0; +\infty)$, следовательно, обратима на нём.

Определение. *Арифметическим корнем n-ой степени из числа a* называется такое неотрицательное число b, n-я степень которого равна a. Т. е.,

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ b^n = a \end{cases}.$$

Из определения следует, что $a \geqslant 0$ и $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Т. к. степенная функция $y = x^{2n+1}$ где $n \in N$, обратима на $\boldsymbol{R}$, то для $a < 0$ корень нечётной степени из числа a выражают через арифметический корень: $\sqrt[2n+1]{a} = -\sqrt[2n+1]{-a}$.

Для степенной функции с нечётным показателем $y = x^{2n+1}$ обратной является функция $y = \sqrt[2n+1]{x}$, определённая на $\boldsymbol{R}$. График функции $y = \sqrt[2n+1]{x}$ изображён на рисунке 1. Для степенной функции с чётным показателем $y = x^{2n}$ обратной является функция $y = \sqrt[2n]{x}$, определённая на $[0; +\infty)$. Её графиком является правая ветвь графика, изображённого на рисунке 2.

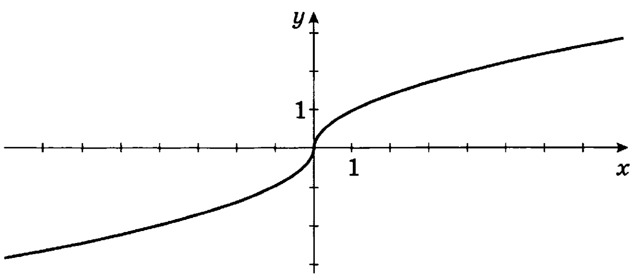


Рис. 2

Подготовительный вариант

1. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — взаимно обратные, причём $D(f) = (-\infty; 0]$, $E(f) = \boldsymbol{R}$. Найдите область определения и область значений функции $y = g(x)$.

2. Задайте формулой функцию, обратную функции:

а) $y = 2x + 5$; б) $y = 5 + \sqrt{x - 4}$.

3. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x}}$; б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}$; в) $y = \sqrt[4]{|2x+1| - 2}$.

4. В одной системе координат изобразите схематически графики функций:

а) $y = x^{10}$ и $y = \sqrt[10]{x}$; б) $y = x^{101}$ и $y = \sqrt[101]{x}$.

5. Решите уравнение:

а) $x^5 = 5$; б) $x^6 = 6$; в) $\sqrt[8]{x} = -2$; г) $\sqrt[9]{x} = -2$.

6. При каком значении параметра a уравнение $x^{104} - 4x^{52} + a = 0$ имеет:

а) два действительных корня;

б) четыре действительных корня?

7. Найдите область допустимых значений переменной, входящей в выражение $\sqrt[24]{|x-1| - |x+1|}$.

Вариант 1

1. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — взаимно обратные, причём $D(f) = [0; \pi]$, $E(f) = [-1; 1]$. Найдите область определения и область значений функции $y = g(x)$.

2. Задайте формулой функцию, обратную функции:

а) $y = -5x + 2$; б) $y = 2 - \sqrt{x + 1}$.

3. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x+2}}$; б) $y = \sqrt[7]{\dfrac{x-1}{x-2}}$; в) $y = \sqrt[12]{3 - |2 - x|}$.

4. В одной системе координат изобразите схематически графики функций:

а) $y = x^4$ и $y = \sqrt[4]{x}$; б) $y = x^7$ и $y = \sqrt[7]{x}$.

5. Решите уравнение:

а) $x^3 = -3$; б) $x^4 = 2$; в) $\sqrt[4]{-x} = -4$; г) $\sqrt[5]{x} = -3$.

6. При каком значении параметра a уравнение $x^8 + 2x^4 + 2a = 0$ имеет:

а) ровно два действительных корня;

б) четыре действительных корня?

7. Найдите область допустимых значений переменной, входящей в выражение $\sqrt[12]{|x| - |x + 4|}$.

Вариант 2

1. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — взаимно обратные, причём $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $E(f) = [-1; 1]$. Найдите область определения и область значений функции $y = g(x)$.

2. Задайте формулой функцию, обратную функции:

а) $y = -2x + 3$; б) $y = 1 - \sqrt{x + 2}$.

3. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt[6]{\frac{x + 1}{x}}$; б) $y = \sqrt[5]{\frac{x}{x - 2}}$; в) $y = \sqrt[4]{5 - |2x - 1|}$.

4. В одной системе координат изобразите схематически графики функций:

а) $y = x^6$ и $y = \sqrt[6]{x}$; б) $y = x^5$ и $y = \sqrt[5]{x}$.

5. Решите уравнение:

а) $x^3 = -2$; б) $x^4 = 3$; в) $\sqrt[6]{-x} = -3$; г) $\sqrt[7]{-x} = -2$.

6. При каком значении параметра a уравнение $x^8 - 2x^4 - 2a = 0$ имеет:

а) ровно два действительных корня;

б) четыре действительных корня?

7. Найдите область допустимых значений переменной, входящей в выражение $\sqrt[10]{|x| - |x + 2|}$.

Вариант 3

1. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — взаимно обратные, причём $D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = \boldsymbol{R}$. Найдите область определения и область значений функции $y = g(x)$.

2. Задайте формулой функцию, обратную функции:

а) $y = 1 - 2x$; б) $y = 1 - \sqrt{2 - x}$.

3. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt[4]{\frac{x + 1}{x^2}}$; б) $y = \sqrt[5]{\frac{x + 1}{x^2}}$; в) $y = \sqrt[4]{2 - |x - 1|}$.

4. В одной системе координат изобразите схематически графики функций:

а) $y = x^8$ и $y = \sqrt[8]{x}$; б) $y = x^9$ и $y = \sqrt[9]{x}$.

5. Решите уравнение:

а) $x^7 = -7$; б) $x^6 = 2$; в) $\sqrt[8]{x} = -2$; г) $\sqrt[11]{-x} = -2$.

6. При каком значении параметра a уравнение $x^4 + 2x^2 + a = 0$ имеет:

а) два действительных корня;

б) четыре действительных корня?

7. Найдите область допустимых значений переменной, входящей в выражение $\sqrt[4]{|2x - 1| - |3x + 2|}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 18

Корни n-ой степени и степени с рациональными показателями

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. *Арифметическим корнем n-ой степени из числа a* называется такое неотрицательное число b, n-я степень которого равна a. Т. е.,

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ b^n = a \end{cases}.$$

Из определения следует, что $a \geqslant 0$ и $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Для $a < 0$ корень нечётной степени из числа a выражают через арифметический корень так: $\sqrt[2n+1]{a} = -\sqrt[2n+1]{-a}$.

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ n-ОЙ СТЕПЕНИ

1. Для любых $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

В частности, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ для любых $a \geqslant 0$, m, $n \in N$.

2. Для любых $a \geqslant 0$, $b > 0$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3. Для любых $a \geqslant 0$, m, $n \in N$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

В частности, $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ для любых $a \geqslant 0$, m, n, $k \in N$ (основное свойство корня).

Определение. Если $a > 0$, $m \in Z$, $n \in N$, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; если $m, n \in N$, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

В частности, если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1. Для любого $a > 0$, $r_1 \in Q$, $r_2 \in Q$ $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.
2. Для любого $a > 0$, $r_1 \in Q$, $r_2 \in Q$ $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}$.
3. Для любого $a > 0$, $r_1 \in Q$, $r_2 \in Q$ $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.
4. Для любых $a > 0$, $b > 0$, $r \in Q$ $(ab)^r = a^r \cdot b^r$.
5. Для любых $a > 0$, $b > 0$, $r \in Q$ $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Обратите внимание на то, что выражение $\sqrt[3]{x}$ определено для всех $x \in R$, а выражение $x^{\frac{1}{3}}$ — только для $x \geqslant 0$.

Подготовительный вариант

1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{-\sqrt{64}} + \sqrt[5]{-1}$; б) $\sqrt[8]{(-4)^8} + \sqrt[5]{(-2)^5}$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-64} : \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[3]{3 - \sqrt{17}} \cdot \left(3 + 17^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{1,5}}{(a^2)^{\frac{1}{3}}}$; б) $\sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}$.

4. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[5]{27a^7b^{10}}$; б) $\sqrt[4]{9a^5b^{12}}$, где $b \leqslant 0$.

5. Сравните $\sqrt[8]{a^2}$ и $a^{\frac{2}{3}}$, если:
а) $a = 0,12$; б) $a = 1,2$.

6. Решите уравнение:

а) $x^6 + x^3 - 56 = 0$; б) $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} - 12 = 0$.

7. Вычислите значение выражения $a^3 + 3a$, если $a = \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$.

8. Докажите, что число $4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}$ является корнем уравнения $x^3 + 6x - 2 = 0$.

9. Существует ли треугольник, стороны которого равны числам $2^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{1}{3}}$ и $7^{\frac{1}{3}}$?

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[7]{128} - \sqrt[3]{1 + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[6]{(-3)^6} + \sqrt[3]{(-2)^3}$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{-32} : \left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{3} - 2} \cdot \left(2 + 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a} \cdot a^{\frac{2}{15}}}{\sqrt[15]{a^4} \cdot a^{-0,3}}$; б) $\sqrt[4]{a \cdot \sqrt[5]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}$.

4. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{-4x^3}$; б) $\sqrt[4]{5a^4b^{12}}$, где $a < 0$, $b > 0$.

5. Сравните $\sqrt[5]{a^3}$ и $a^{\frac{1}{2}}$, если:
а) $a = 0,3$; б) $a = 3$.

6. Решите уравнение:

а) $x^6 - 4x^3 - 5 = 0$; б) $x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} - 3 = 0$.

7. Вычислите значение выражения $\dfrac{a^3}{3} - a$, если

$a = \sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

8. Докажите, что число $5^{\frac{1}{3}} + 25^{\frac{1}{3}}$ является корнем уравнения $x^3 - 15x - 30 = 0$.

9. Существует ли треугольник, стороны которого равны числам $2^{\frac{1}{3}}$, $4^{\frac{1}{3}}$ и $15^{\frac{1}{3}}$?

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[6]{64} + \sqrt[3]{0 - \sqrt{1}} + \sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[10]{(-3)^{10}} + \sqrt[7]{(-4)^7}$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-27} : \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt[3]{3 - \sqrt{10}} \cdot \left(3 + 10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{7}{12}}}{a^{-\frac{3}{4}}}$; б) $\sqrt[4]{a \cdot \sqrt[5]{a \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a}}}}$.

4. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{-9x^3}$; б) $\sqrt[4]{7a^4b^8}$, где $a < 0$, $b < 0$.

5. Сравните $\sqrt[5]{a^2}$ и $a^{\frac{1}{2}}$, если:
а) $a = 0{,}7$; б) $a = 7$.

6. Решите уравнение:

а) $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$; б) $x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} - 5 = 0$.

7. Вычислите значение выражения $a^3 + 3a$, если $a = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

8. Докажите, что число $9^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}$ является корнем уравнения $x^3 + 9x - 6 = 0$.

9. Существует ли треугольник, стороны которого равны числам $3^{\frac{1}{3}}$, $9^{\frac{1}{3}}$ и $31^{\frac{1}{3}}$?

Вариант 3

1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[8]{256} + \sqrt[3]{-\sqrt{27}} + \sqrt[7]{-1}$; б) $\sqrt[4]{(-2)^4} + \sqrt[3]{(-4)^3}$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{-243} : \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[5]{10 - 2\sqrt{17}} \cdot \left(10 + 2 \cdot 17^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^{-2}} \cdot (a^{1,5})^{-\frac{2}{3}}}{\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^2}$; б) $\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a}}}}$.

4. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[5]{64a^6b^{12}}$; б) $\sqrt[4]{243a^6b^{10}}$, где $a \leqslant 0$.

5. Сравните $\sqrt[4]{a^2}$ и $a^{\frac{2}{3}}$, если:
а) $a = 0,5$; б) $a = 5$.

6. Решите уравнение:

а) $x^6 + x^3 - 12 = 0$; б) $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} - 42 = 0$.

7. Вычислите значение выражения $\dfrac{a^3}{3} - a$, если
$a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

8. Докажите, что число $9^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ является корнем уравнения $x^3 - 9x - 12 = 0$.

9. Существует ли треугольник, стороны которого равны числам $3^{\frac{1}{3}}$, $5^{\frac{1}{3}}$ и $15^{\frac{1}{3}}$?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 19

Иррациональные уравнения и неравенства

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнения, содержащие переменную под знаком корня или переменную в основании степени с дробным показателем, называют *иррациональными*.

Среди методов решений иррациональных уравнений отметим два главных: замена переменной и замена уравнения ему равносильным уравнением или системой уравнений и неравенств.

Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ при нечётном $n \in N$, $n > 1$ равносильно уравнению $f(x) = g^n(x)$. Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ при чётном $n \in N$, $n > 1$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g^n(x). \end{cases}$

Иногда при решении иррациональных уравнений используют свойства монотонности функций (для обоснования единственности найденного подбором корня). В некоторых случаях при решении иррациональных уравнений проводят неравносильные преобразования, после чего выполняют проверку корней подстановкой в исходное уравнение.

Неравенства, содержащие переменную под знаком корня или переменную в основании степени с дробным показателем, называют *иррациональными*.

При решении иррациональных неравенств обычно используют равносильные преобразования, приводящие к равносильным неравенствам или системам неравенств. Неравенства $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ или $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ при нечётном $n \in N$, $n > 1$ равносильны неравенствам $f(x) < g^n(x)$ или $f(x) > g^n(x)$ соответственно.

Неравенство $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ при чётном натуральном n равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^n(x). \end{cases}$

Неравенство $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ при чётном натуральном n равносильно совокупности систем $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^n(x). \end{cases}$

Подготовительный вариант

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x - 4} = -2$;   в) $\sqrt{x - 4} = 2$;

б) $(x - 4)^{\frac{1}{3}} = -2$;;   г) $\sqrt{x - 4} = -2$.

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 1} = x - 2$;   б) $\sqrt{2x + 5} = 4 - x$.

3. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{7 + \sqrt{3 + x}} = 4;$ в) $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42.$

б) $x^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot x^{\frac{1}{4}} - 12 = 0;$

4. Решите неравенство:

а) $\dfrac{\sqrt{x+3} - 1}{5 - \sqrt{x+3}} \geqslant 0;$ б) $\sqrt{x + 2} > 0{,}5x + 1.$

5. Докажите, что не имеет корней уравнение:

а) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x^2 + 3} = 1;$ б) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x}.$

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x + 2} = -1;$ в) $\sqrt{x + 2} = 1;$

б) $(x + 2)^{\frac{1}{3}} = -1;$ г) $\sqrt{x + 2} = -1.$

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 4} = 2x - 1;$ б) $\sqrt{x - 2} = 4 - x.$

3. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{6 - \sqrt{2 + x}} = 2;$ в) $x^2 + 7 - \sqrt{x^2 + 7} = 12.$

б) $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} - 12 = 0;$

4. Решите неравенство:

а) $\dfrac{7}{\sqrt{x-1} + 5} < 1 + \dfrac{2}{5 - \sqrt{x-1}};$ б) $\sqrt{x + 2} < 4 - x.$

5. Докажите, что не имеет корней уравнение:

а) $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{x^2 + 5} = 2;$ б) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{x - 1}.$

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x - 1} = -3;$ в) $\sqrt{x - 1} = 3;$

б) $(x - 1)^{\frac{1}{3}} = -3;$ г) $\sqrt{x - 1} = -3.$

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 4} = 1 - 2x$; б) $\sqrt{x + 2} = 4 - x$.

3. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{3 + \sqrt{x - 3}} = 2$; в) $x^2 + 5 + \sqrt{x^2 + 5} = 12$.

б) $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 12 = 0$;

4. Решите неравенство:

а) $\dfrac{5}{\sqrt{x + 2} + 4} < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x + 2} - 4}$; б) $\sqrt{x - 2} < 4 - x$.

5. Докажите, что не имеет корней уравнение:

а) $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x^2 + 5} = 2$;

б) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2}$.

Вариант 3

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x + 2} = -2$; в) $\sqrt{x + 2} = 3$;

б) $(x + 2)^{\frac{1}{3}} = -2$; г) $\sqrt{x + 2} = -3$.

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{4 - x^2} = x - 2$; б) $\sqrt{4 - x} = x - 2$.

3. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{5 - \sqrt{2 + x}} = 2$; в) $x^2 + 8 - 2\sqrt{x^2 + 8} = 3$.

б) $x^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot x^{\frac{1}{4}} - 3 = 0$;

4. Решите неравенство:

а) $\dfrac{\sqrt{x + 1} - 3}{2\sqrt{x + 1} - 5} \geqslant 0$; б) $\sqrt{2x - 1} > x - 2$.

5. Докажите, что не имеет корней уравнение:

а) $\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{2x^2 + 5} = 3$;

б) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x + 2}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 20

Тригонометрические функции

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат — точке O. Радиус OA, соединяющий центр окружности с точкой пересечения окружности и положительного направления оси абсцисс, называется *начальным радиусом*. При повороте начального радиуса OA вокруг точки O на некоторый угол α точка A перейдёт в точку B. Радиус OB называют *конечным радиусом*. При повороте начального радиуса против часовой стрелке угол поворота считают положительным, по часовой стрелке — отрицательным. Градусная мера угла поворота α может выражаться любым числом, т. е. $\alpha \in (-\infty; +\infty)$.

Градусную меру любого угла поворота α можно представить в виде $\alpha = \alpha_0 + 360° \cdot n$, где $0° \leqslant \alpha_0 < 360°$ и n — некоторое целое число. Если $0° < \alpha_0 < 90°$, то угол α является углом I четверти (принадлежит I четверти), если $90° < \alpha_0 < 180°$, то угол α является углом II четверти, если $180° < \alpha_0 < 270°$, то α является углом III четверти, если $270° < \alpha_0 < 360°$, то углом IV четверти. Заметим, что углы вида $\alpha = 90° \cdot n$, где n — некоторое целое число, не принадлежат какой-либо четверти.

Угол поворота начального радиуса, при котором его подвижный конец (точка A) описывает дугу, равную радиусу, называется ***радианом***. Чтобы выразить угол поворота α в радианах, нужно дугу окружности l_α, которую описывает точка A, разделить на радиус, т. е. $\frac{l_\alpha}{R} = \frac{\pi\alpha}{180}$. В частности, радианная мера угла в 1° равна $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}017...$, радианная мера развёрнутого угла (180°) равна числу π. Градусная мера угла в 1 радиан равна $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$.

При повороте начального радиуса OA вокруг точки O на некоторый угол α точке A будет соответствовать число $p_\alpha = \frac{\pi\alpha}{180}$. Таким образом, каждому числу p_α, равному длине соответствующей дуги тригонометрической окружности, ставится в соответствие точка A_α этой окружности. С другой стороны, каждой точке A_α тригонометрической окружности соответствует бесконечное множество чисел вида $p_\alpha = p_0 + 2\pi n$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$, отличающихся на целое число углов в 2π радиан.

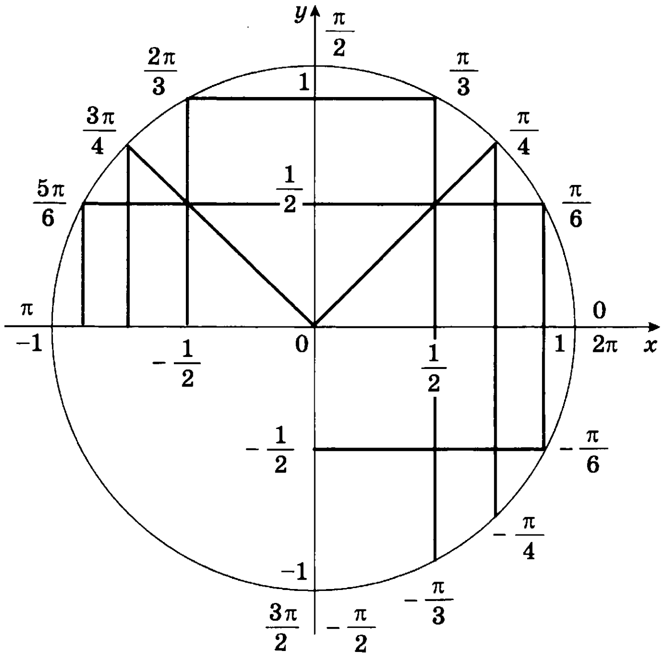


Рис. 3. Тригонометрическая окружность

На рисунке 3 показано, как отложить на тригонометрической окружности числа, соответствующие радианной мере основных углов.

Если при повороте около начала координат на угол α начальный радиус OA переходит в конечный радиус OB, где $B(x_0;\ y_0)$, то отношение $\frac{y_0}{R}$ называется ***синусом угла*** α и обозначается $\frac{y_0}{R} = \sin\alpha$. Если угол поворота выражен в радианах (числах), то $\sin x$ — числовая функция. Её область определения — все числа, область значений — отрезок $[-1;\ 1]$. Аналогично, отношение $\frac{x_0}{R} = \cos\alpha$ (***косинус угла*** α) является числовой функцией с такими же областью определения и областью значений, как и у функции синус.

Аналогично даются определения остальных тригонометрических функций:

тангенс: $\frac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg}\alpha$; ***котангенс***: $\frac{x_0}{y_0} = \operatorname{ctg}\alpha$;

секанс: $\frac{R}{x_0} = \sec\alpha$; ***косеканс***: $\frac{R}{y_0} = \operatorname{cosec}\alpha$.

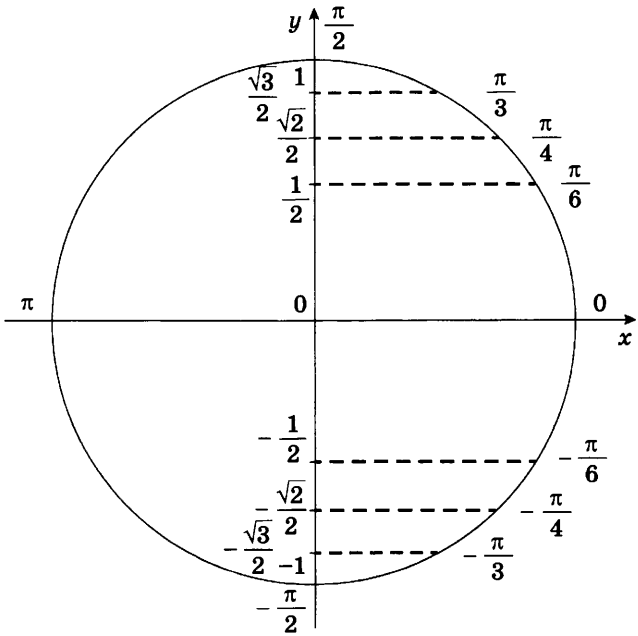


Рис. 4. Линия синусов

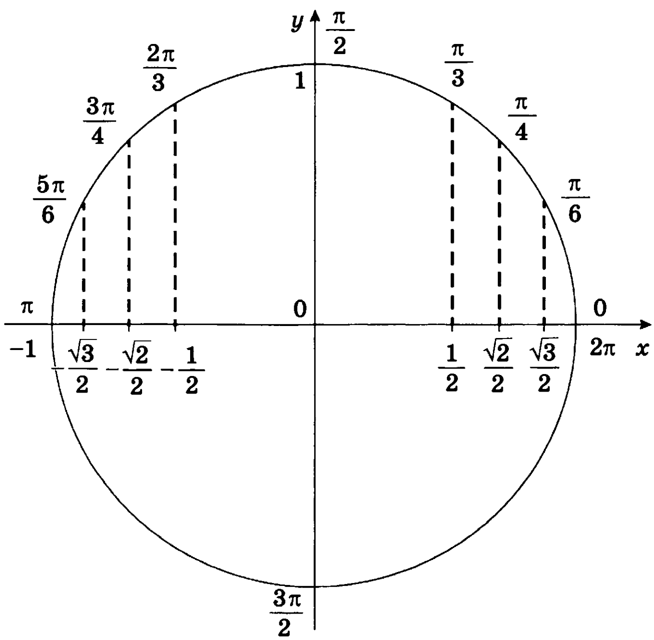


Рис. 5. Линия косинусов

Область определения тангенса и секанса — все числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — любое целое число, а область определения котангенса и косеканса — все числа, кроме чисел вида πn, где n — любое целое число. Областью значений тангенса и котангенса являются все числа. Областью значений секанса и косеканса — множество $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Поскольку секанс и косеканс выражаются через косинус и синус соответственно

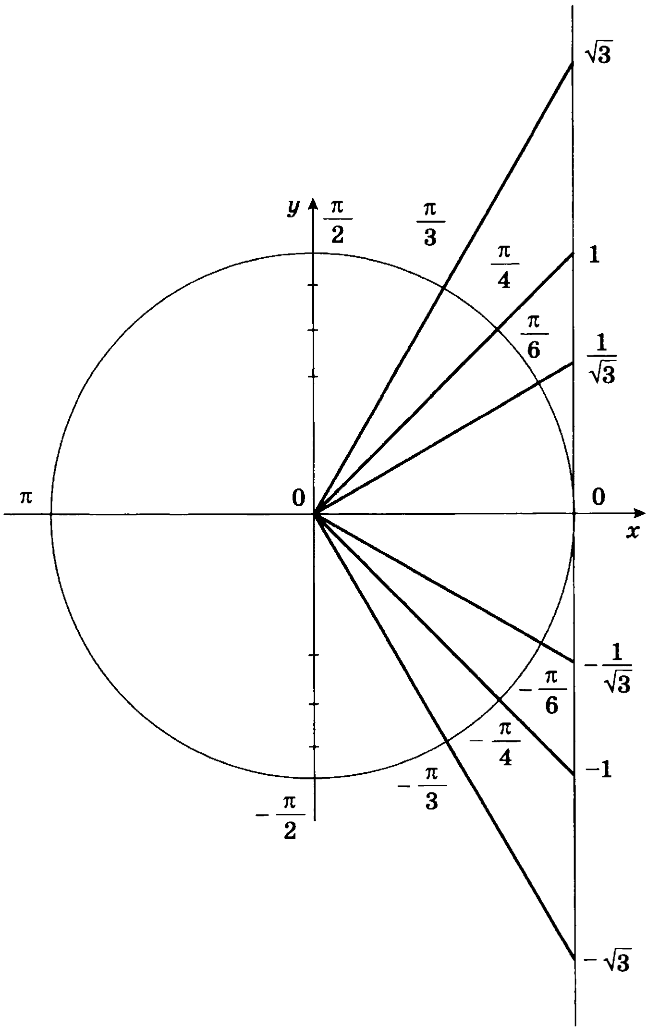


Рис. 6. Линия тангенсов

формулами $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, то функции секанс и косеканс в школьном курсе алгебры подробно не рассматривают. Поскольку котангенс выражается через тангенс формулой $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, то функцию котангенс рассматривают менее подробно.

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса легко запомнить с помощью числовой окружности. На рисунке 4 показаны значения синусов основных углов, лежащие на отрезке $[-1; 1]$ вертикальной оси координат. Этот отрезок называют *линией синусов*. На рисунке 5 показаны значения косинусов, лежащие на отрезке $[-1; 1]$ горизонтальной оси. Этот отрезок называют *линией косинусов*.

На рисунке 6 показаны значения тангенсов основных углов, лежащие на вертикальной касательной к тригонометрической окружности. Эту касательную называют *линией тангенсов*. Аналогично линии тангенсов устроена *линия котангенсов* — горизонтальная касательная, проходящая через точку $\frac{\pi}{2}$ тригонометрической окружности (рисунок 7).

Заметим, что выражения $(\cos x)^2$ и $\cos(2x)$ принято записывать как $\cos^2 x$ и $\cos 2x$ соответственно.

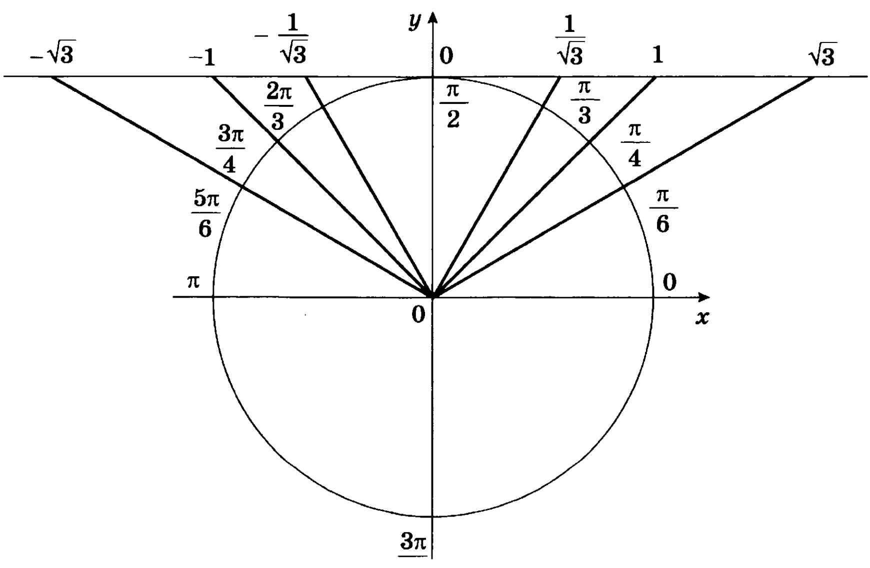


Рис. 7. Линия котангенсов

Подготовительный вариант

1. Углом какой четверти является угол поворота α, если:

а) $\alpha = 175°$; в) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; д) $\alpha = 8$?

б) $\alpha = -359°$; г) $\alpha = -\frac{19\pi}{3}$;

2. Выразите в радианах угол поворота начального радиуса:
а) $115°$; б) $-150°$; в) $585°$; г) $-1260°$.

3. Выразите в градусной мере угол поворота:

а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $-\frac{25\pi}{6}$; в) 2,5; г) $-0,3$.

4. Изобразите тригонометрическую окружность и с её помощью покажите, как найти:

а) $\sin\frac{\pi}{4}$; б) $\cos\frac{2\pi}{3}$; в) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

5. Изобразите тригонометрическую окружность и с её помощью покажите, как найти:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$; в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

6. Найдите значение выражения:

а) $\sin 30° \cdot \cos(-60°) - \sin^2 135° + \sqrt{3}\operatorname{tg}(-720°)$;

б) $\dfrac{3\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\cos^2\frac{\pi}{6}}{3\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

7. Сравните наибольшее значение выражения $3\cos\alpha - 2$ с наименьшим значением выражения $2 - \frac{\sqrt{5}}{2}\sin\alpha$.

8. Найдите три значения переменной x, при которых выполняется равенство $\sec\alpha = \cos x$. Запишите общую формулу таких чисел.

Вариант 1

1. Углом какой четверти является угол поворота α, если:

а) $\alpha = 930°$; в) $\alpha = \frac{19\pi}{4}$; д) $\alpha = 9$?

б) $\alpha = -2130°$; г) $\alpha = -\frac{113\pi}{5}$;

2. Выразите в радианах угол поворота начального радиуса:
а) $72°$; б) $-740°$; в) $1020°$; г) $-920°$.

3. Выразите в градусной мере угол поворота:
а) $\frac{3\pi}{5}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$; в) $0{,}5$; г) -4.

4. Изобразите тригонометрическую окружность и с её помощью покажите, как найти:
а) $\sin\frac{\pi}{3}$; б) $\cos\frac{3\pi}{4}$; в) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

5. Изобразите тригонометрическую окружность и с её помощью покажите, как найти:
а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$; в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

6. Найдите значение выражения:
а) $\dfrac{2\sin 90° + 3\cos 180° - \operatorname{ctg} 45°}{4\cos 270° + \sin 270° + \operatorname{tg} 180°} - 3\cos 90° + \sin 60°$;

б) $\dfrac{2\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{3\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

7. Укажите наибольшее и наименьшее значение выражения:
а) $2 + 3\sin x$; б) $3 - 2\cos x$.

8. Найдите три значения переменной x, при которых выполняется равенство $\operatorname{ctg} x = \cos x$. Запишите общую формулу таких чисел.

Вариант 2

1. Углом какой четверти является угол поворота α, если:
а) $\alpha = 890°$; в) $n = \frac{21\pi}{4}$; д) $\alpha = 11$?
б) $\alpha = -2310°$; г) $n = -\frac{132\pi}{5}$;

2. Выразите в радианах угол:
а) $18°$; б) $-650°$; в) $1280°$; г) $-780°$.

3. Выразите в градусах угол поворота:
а) $\frac{4\pi}{5}$; б) $-\frac{10\pi}{3}$; в) $0{,}7$; г) -5.

4. Изобразите тригонометрическую окружность и с её помощью покажите, как найти:

а) $\sin\frac{\pi}{6}$; б) $\cos\frac{5\pi}{6}$; в) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

5. Изобразите тригонометрическую окружность и с её помощью покажите, как найти:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$; в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

6. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{2\sin 90^\circ + 4\cos 270^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{\cos 180^\circ + 4\sin 180^\circ + 2\operatorname{ctg} 90^\circ} - 5\cos 90^\circ + \cos 30^\circ$;

б) $\dfrac{3\sin^2\frac{\pi}{3} - \cos^2\frac{\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

7. Укажите наибольшее и наименьшее значение выражения:
а) $3 + 2\sin x$; б) $4 - 5\cos x$.

8. Найдите три значения переменной x, при которых выполняется равенство $\operatorname{tg} x = \sin x$. Запишите общую формулу таких чисел.

Вариант 3

1. Углом какой четверти является угол поворота α, если:

а) $\alpha = 195^\circ$; в) $\alpha = \frac{7\pi}{4}$; д) $\alpha = 5$?

б) $\alpha = -379^\circ$; г) $\alpha = -\frac{19\pi}{6}$;

2. Выразите в радианах угол поворота начального радиуса:
а) 135°; б) -330°; в) 475°; г) -2160°.

3. Выразите в градусной мере угол поворота:

а) $\frac{2\pi}{5}$; б) $-\frac{23\pi}{6}$; в) 4,5; г) −0,7.

4. Изобразите тригонометрическую окружность и с её помощью покажите, как найти:

а) $\sin\frac{5\pi}{4}$; б) $\cos\frac{4\pi}{3}$; в) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

5. Изобразите тригонометрическую окружность и с её помощью покажите, как найти:

а) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$; в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

6. Найдите значение выражения:

а) $\sin 60° \cdot \cos(-30°) - \sin^2 135° + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,(-720°)$;

б) $\dfrac{5\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\frac{\pi}{6}}{3\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}} + \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

7. Сравните наибольшее значение выражения $2\cos\alpha - 3$ с наименьшим значением выражения $2 - \frac{\sqrt{5}}{2}\sin\alpha$.

8. Найдите три значения переменной x, при которых выполняется равенство $\mathrm{cosec}\,x = \sin x$. Запишите общую формулу таких чисел.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 21

Свойства и графики тригонометрических функций

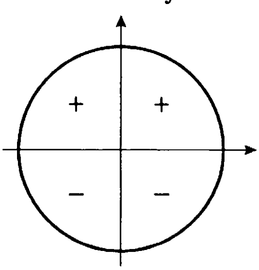
ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для любых целых k справедливы равенства $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$, $\mathrm{tg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{ctg}\,\alpha$.

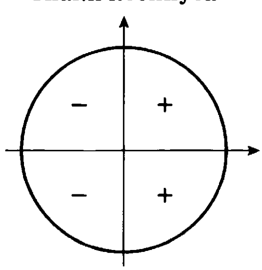
Из симметрии точек тригонометрической окружности следуют равенства $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$.

ЗНАКИ ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

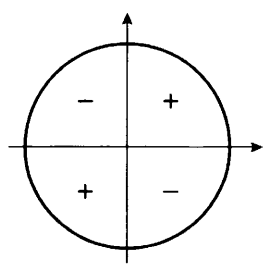
Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса



О п р е д е л е н и е. *Периодом функции* $y = f(x)$ называется такое число $T \neq 0$, что вместе с любым $x \in D(f)$ верно $(x + T) \in D(f)$, $(x - T) \in D(f)$ и $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Если T — период данной функции, то числа $(-T)$, $2T$, $(-2T)$ и т. д. также являются её периодом. Среди всех периодов выделяют наименьший положительный период — его называют *основным периодом* (и иногда обозначают T_0). Функции, имеющие периоды, называются *периодическими*.

Основной период синуса и косинуса — число 2π, тангенса и котангенса — число π.

Можно доказать, что если основной период функции $y = f(x)$ равен T_0, то основным периодом функции $y = f(kx)$ является число $\frac{T_0}{|k|}$, где k — некоторое число.

Все тригонометрические функции не обратимы.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \sin x$ И ЕЁ ГРАФИК

1. Область определения — все числа.
2. Область значений — отрезок $[-1; 1]$; функция ограничена.
3. Функция является нечётной.
4. Функция является периодической, основной период равен 2π.
5. Нули функции — числа вида πk, где k — любое целое число.

График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой* (рис. 8).

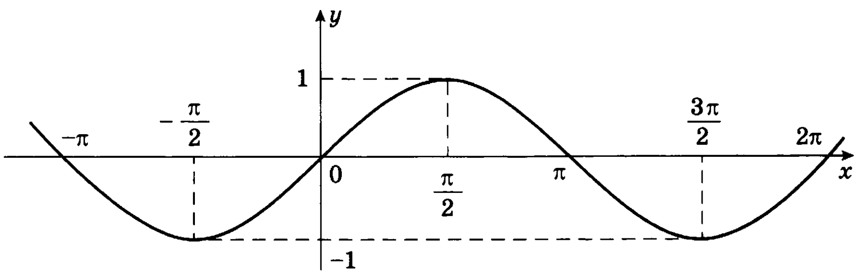


Рис. 8

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \cos x$ И ЕЁ ГРАФИК.

1. Область определения — все числа.
2. Область значений — отрезок $[-1; 1]$; функция ограничена.

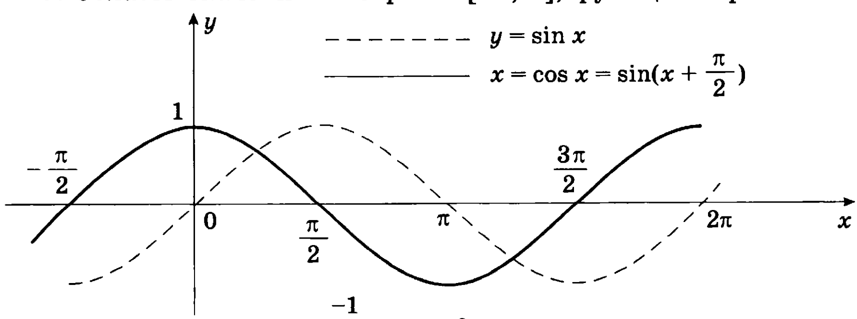


Рис. 9

3. Функция является чётной.

4. Функция является периодической, основной период равен 2π.

5. Нули функции — числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число.

График функции $y = \cos x$ (рис. 9) тоже называется *синусоидой* (т. к. его можно получить из графика функции $y = \sin x$ сдвигом на $\frac{\pi}{2}$ влево).

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \operatorname{tg} x$ И ЕЁ ГРАФИК

1. Область определения — все числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число.

2. Область значений — все числа; функция не ограничена.

3. Функция является нечётной.

4. Функция является периодической, основной период равен π.

5. Нули функции — числа вида πk, где k — любое целое число.

График функции $y = \operatorname{tg} x$ показан на рис. 10.

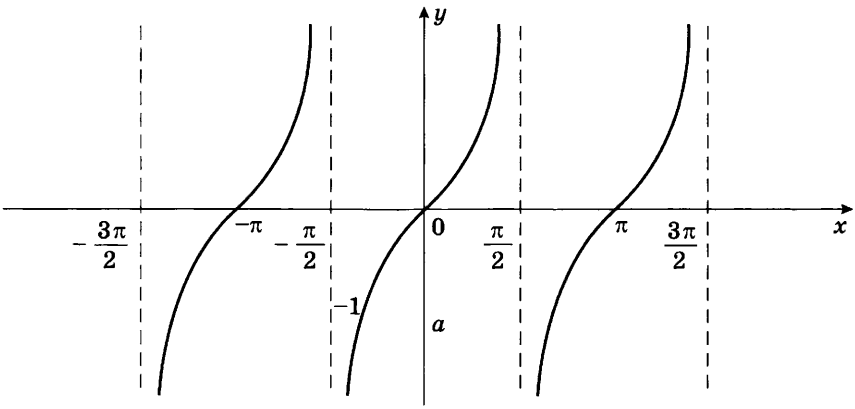


Рис. 10

Подготовительный вариант

1. Найдите значение выражения:
   а) $\cos(-30°)$; в) $\operatorname{ctg}(-405°)$;
   б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $\sin\left(-\frac{22\pi}{3}\right)$.

2. Углом какой четверти является угол α, если:
   а) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; б) $\cos\alpha > 0$ и $\operatorname{tg}\alpha < 0$?

3. Исследуйте на чётность-нечётность функцию:
   а) $y = x^2\cos x$; б) $y = x\cos^2 x$; в) $y = x\cos x^2$.

4. Определите знак выражения:

а) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{5\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)}$; б) $\dfrac{\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$,

если α — угол второй четверти.

5. Найдите область значений функции:

а) $y = 2\sqrt{3} - 3\left|\cos\frac{x}{2}\right|$; б) $y = \left|2\sqrt{2} - 3\sin 2x\right|$.

6. Найдите основной период функции:

а) $y = \cos 4x$; в) $y = 2\operatorname{tg}\frac{3}{4}x$;

б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{3\pi}{7}\right)$.

7. Запишите нули функции:

а) $y = \cos 4x$; в) $y = 2\operatorname{tg}\frac{3}{4}x$;

б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{3\pi}{7}\right)$.

8. Докажите неравенство $0{,}5 < \cos(\sin\alpha) \leqslant 1$.

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

а) $\sin(-30°)$; в) $\operatorname{tg}(-405°)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right)$.

2. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$; б) $\cos\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$?

3. Исследуйте на чётность-нечётность функцию:

а) $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x$; б) $y = x \cdot \operatorname{ctg}^2 x$; в) $y = x \cdot \sin x^2$.

4. Определите знак выражения:

а) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$; б) $\dfrac{\cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$,

если α — угол третьей четверти.

5. Найдите область значений функции:

а) $y = 2 - 3|\sin x|$; б) $y = |2 - 3\cos x|$.

6. Найдите основной период функции:

а) $y = \sin 3x$; в) $y = -2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$;

б) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $y = \operatorname{tg}\left(-2x + \frac{5\pi}{7}\right)$.

7. Запишите нули функции:

а) $y = \sin 3x$; в) $y = -2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$;

б) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $y = \operatorname{tg}\left(-2x + \frac{5\pi}{7}\right)$.

8. Докажите неравенство $|\operatorname{tg}(\cos\alpha)| < \sqrt{3}$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

а) $\cos(-60°)$; в) $\operatorname{ctg}(-390°)$;

б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; г) $\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

2. Углом какой четверти является угол α, если:
а) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$; б) $\cos\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$?

3. Исследуйте на чётность-нечётность функцию:
а) $y = x^2 \cdot \sin x$; б) $y = x \cdot \operatorname{tg}^2 x$; в) $y = x \cdot \operatorname{ctg} x^2$.

4. Определите знак выражения:

а) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{3}\cos\frac{3\pi}{5}}{\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$; б) $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$,

если α — угол четвёртой четверти.

5. Найдите область значений функции:
а) $y = 3 - 4|\cos x|$; б) $y = |3 - 4\sin x|$.

6. Найдите основной период функции:

а) $y = \cos\frac{1}{2}x$; в) $y = -4\operatorname{tg} 3x$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$; г) $y = \operatorname{ctg}\left(-2x - \frac{3\pi}{5}\right)$.

7. Запишите нули функции:

а) $y = \cos\frac{1}{2}x$; в) $y = -4\,\mathrm{tg}\,3x$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$; г) $y = \mathrm{ctg}\left(-2x - \frac{3\pi}{5}\right)$.

8. Докажите неравенство $|\mathrm{ctg}\,(\sin\alpha)| > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения:

а) $\sin(-60°)$; в) $\mathrm{tg}\,(-390°)$;

б) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; г) $\cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

2. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\sin\alpha > 0$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0$; б) $\cos\alpha < 0$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha < 0$?

3. Исследуйте на чётность-нечётность функцию:

а) $y = x^2 \cdot \mathrm{ctg}\,x$; б) $y = x \cdot \sin^2 x$; в) $y = x \cdot \mathrm{tg}\,x^2$.

4. Определите знак выражения:

а) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{7\pi}{3}}{\mathrm{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$; б) $\dfrac{\cos\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha}{\sin\alpha}$,

если α — угол четвёртой четверти.

5. Найдите область значений функции:

а) $y = 4\sqrt{3} - 7 \cdot \left|\cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)\right|$; б) $y = \left|4\sqrt{3} - 7 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)\right|$.

6. Найдите основной период функции:

а) $y = \sin(-2x)$; в) $y = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{4}$;

б) $y = \cos\left(-x - \frac{\pi}{3}\right)$; г) $y = \mathrm{ctg}\left(2x + \frac{2\pi}{9}\right)$.

7. Запишите нули функции:

а) $y = \sin(-2x)$; в) $y = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{4}$;

б) $y = \cos\left(-x - \frac{\pi}{3}\right)$; г) $y = \mathrm{ctg}\left(2x + \frac{2\pi}{9}\right)$.

8. Докажите неравенство $|\sqrt{3}\sin(\cos\alpha)| < 1{,}5$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 22

Основные тригонометрические формулы

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для приведения выражений вида $\sin\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $\cos\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, где k — некоторое целое число, α — угол I четверти, к выражениям вида $\pm\sin\alpha$, $\pm\cos\alpha$, $\pm\operatorname{tg}\alpha$, $\pm\operatorname{ctg}\alpha$ используются *формулы приведения*. Формулы приведения легко запоминаются с помощью мнемонического правила: 1) если отбрасывается целое число π, то в правой части формулы записывается та же функция, если отбрасывается «полуцелое» число вида $\frac{\pi k}{2}$ (k — нечётное число), то название функции меняется на «кофункцию» (синус на косинус, тангенс на котангенс и т. д.); 2) в правой части формулы ставится тот знак, который имеет первоначальная функция (учитывая то, что α — угол I четверти).

Основные тригонометрические тождества

(соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \text{ (или } \sin\alpha \cdot \sec\alpha = \operatorname{tg}\alpha\text{), где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha \text{ (или } \cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\text{), где } \alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \text{ где } \alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ (или } 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha\text{), где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \text{ (или } 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha\text{), где } \alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Подготовительный вариант

1. Упростите выражение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

2. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg}\alpha\ \ \operatorname{ctg}\alpha - \sin^2\alpha$; б) $\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$.

3. Найдите значения остальных тригонометрических функций угла β, если известно, что $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{5}{12}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

4. Докажите тождество $\dfrac{\sqrt{3} - 2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2} - 1} = \dfrac{1 + 2\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{3}}$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin 6^\circ \cos 12^\circ \sin 24^\circ \cos 48^\circ}{\sin 138^\circ \sin 102^\circ \cos 84^\circ \cos 66^\circ}$.

6. Найдите $\dfrac{2\sin x + \cos x}{\sin x - 2\cos x}$, если $\operatorname{tg} x = 0{,}5$.

7. Вычислите значение выражения
$\left(\sqrt{1 - \sin^2 153^\circ} + \sqrt{\operatorname{tg}^2 207^\circ - \sin^2 207^\circ}\right)\cdot\sin 63^\circ$.

8. Зная, что $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}2$, найдите:
а) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

Вариант 1

1. Упростите выражение
$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\sin(\pi - \alpha)$.

2. Упростите выражение:
а) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}^2\beta$; б) $\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha$.

3. Найдите значения остальных тригонометрических функций угла β, если известно, что $\operatorname{ctg}\beta = -2{,}4$ и $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

4. Докажите тождество $\dfrac{1 - \sqrt{5}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{5}\cos\frac{\alpha}{2} - 2} = \dfrac{2 + \sqrt{5}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{5}\sin\frac{\alpha}{2} + 1}$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{ctg} 80^\circ}$.

6. Найдите $\dfrac{2\sin x + \cos x}{3\sin x - 2\cos x}$, если $\operatorname{tg} x = 2$.

7. Вычислите значение выражения

$$\frac{\cos 170^\circ \cdot \sqrt{\sin^2 69^\circ + \cos^2 21^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 170^\circ}}{\cos 201^\circ}.$$

8. Зная, что $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}2$, найдите:
а) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(2\pi - \alpha).$$

2. Упростите выражение:
а) $\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\sin\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

3. Найдите значения остальных тригонометрических фун угла β, если известно, что $\operatorname{tg}\beta = -0{,}75$ и $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

4. Докажите тождество $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2} - 1} = \dfrac{1 + \sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2}}$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{ctg} 15^\circ \operatorname{tg} 25^\circ \operatorname{ctg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{ctg} 65^\circ \operatorname{tg} 75^\circ \operatorname{ctg} 85^\circ}$.

6. Найдите $\dfrac{6\sin x + 5\cos x}{3\cos x - 2\sin x}$, если $\operatorname{tg} x = \dfrac{5}{6}$.

7. Вычислите значение выражения

$$\frac{\sqrt{\sin^2 23^\circ - \cos^2 67^\circ \cdot \cos^2 200^\circ}}{\cos 113^\circ \cdot \sin 340^\circ}.$$

8. Зная, что $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}2$, найдите:
а) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

Вариант 3

1. Упростите выражение

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) - \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

2. Упростите выражение:
а) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} + \cos^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha - \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

3. Найдите значения остальных тригонометрических функций угла β, если известно, что $\operatorname{tg}\beta = -\frac{4}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

4. Докажите тождество $\dfrac{1 - \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 1} = \dfrac{1 + \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} + 1}$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin 2^\circ \cos 6^\circ \sin 18^\circ \cos 54^\circ}{\sin 126^\circ \sin 96^\circ \cos 108^\circ \cos 88^\circ}$.

6. Найдите $\dfrac{3\sin x - 2\cos x}{5\sin x + 6\cos x}$, если $\operatorname{tg} x = \dfrac{2}{15}$.

7. Вычислите значение выражения
$\left(\sqrt{1 - \cos^2 193^\circ} + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 167^\circ - \cos^2 167^\circ}\right) \cdot \cos 77^\circ$.

8. Зная, что $\sin\alpha - \cos\alpha = 1{,}1$, найдите:
а) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 23

Формулы сложения и их следствия

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Формулы сложения

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;
$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, где $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi m$, $\alpha + \beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$, $n, m, k \in \boldsymbol{Z}$;
$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, где $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi m$, $\alpha - \beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$, $n, m, k \in \boldsymbol{Z}$.

Формулы двойного аргумента

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, или $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, или $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;
$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, где $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $\alpha \ne \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

Формулы половинного аргумента

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\text{ где } \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

или $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, где $\alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$,

или $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, где $\alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Формулы универсальной подстановки

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\text{ где } \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\text{ где } \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\text{ где } \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Формулы преобразования суммы или разности тригонометрических функций в произведение

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, где $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $n, m \in \boldsymbol{Z}$;

$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, где $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $n, m \in \boldsymbol{Z}$.

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

Подготовительный вариант

1. Найдите значение выражения:

   а) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}}{\sin 15^\circ}$; б) $1 - 8\sin^2\dfrac{\pi}{16}\cos^2\dfrac{\pi}{16}$.

2. Упростите выражение $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

3. Найдите:

   а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\dfrac{8}{17}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

   б) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)$, если $\sin\alpha = \dfrac{9}{41}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

   в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \dfrac{2}{3}$.

4. Вычислите:

   а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos\dfrac{5\pi}{12}$; в) $\operatorname{tg}(-15^\circ)$.

5. Найдите острые углы α и β прямоугольного треугольника, если $\sin 2\alpha - \sin(3\alpha - \beta) = 1$.

6. Докажите тождество $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

7. Найдите значение выражения $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$.

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}}$; б) $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$.

2. Упростите выражение $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$.

3. Найдите:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{40}{41}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{2}$.

4. Вычислите:

а) $\sin 225^\circ$; б) $\cos\frac{7\pi}{12}$; в) $\cos(-105^\circ)$.

5. Найдите острые углы α и β прямоугольного треугольника, если $\cos 2\alpha - \sin(\alpha - \beta) = 1$.

6. Докажите тождество $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{\sin 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha}$.

7. Найдите значение выражения $\cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ$.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $2\sin\alpha - 3\cos\alpha$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}}$; б) $4\cos^2 210^\circ - \sin^2 210^\circ$.

2. Упростите выражение $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}$.

3. Найдите:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{40}{41}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{3}$.

4. Вычислите:

а) $\sin 240°$; б) $\sin\frac{5\pi}{12}$; в) $\cos(-75°)$.

5. Найдите острые углы α и β прямоугольного треугольника, если $\cos 2\alpha + \sin(\alpha - \beta) = 0$.

6. Докажите тождество $\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha - 1}$.

7. Найдите значение выражения $\sin 54° \cdot \cos 72°$.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $3\sin\alpha + 2\cos\alpha$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{20} + \cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20}}{\cos 15°}$;

б) $2\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24}\right)$.

2. Упростите выражение $\frac{\sin 3\alpha + \cos 2\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha}$.

3. Найдите:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$.

4. Вычислите:

а) $\cos 135°$; б) $\sin \frac{7\pi}{12}$; в) $\operatorname{tg}(-75°)$.

5. Найдите острые углы α и β прямоугольного треугольника, если $\cos\alpha + \sin(\alpha - \beta) = 1$.

6. Докажите тождество $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

7. Найдите значение выражения $\sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70°$.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 24

Основные понятия и формулы комбинаторики

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Конечное множество, в котором установлен порядок его элементов, называют *перестановкой*. Число перестановок из n элементов обозначается P_n.

Число перестановок из n элементов можно найти по формуле $P_n = n!$ (напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$).

Определение. *Размещением* из n элементов конечного множества по k, где $k \leqslant n$, называют упорядоченное множество, содержащее k элементов. Число всех размещений из n элементов по k обозначают A_n^k. Из определения следует, что два размещения являются различными, если различаются элементами или порядком элементов.

Число размещений из n по k можно найти по формуле $A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Удобнее пользоваться другой формулой для числа размещений из n по k: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. При $n = k$ получается число размещений из n по n, которое можно найти по формуле $A_n^n = n!$ (напомним, что по определению факториала $0! = 1$). Легко видеть, что размещение из n по n есть перестановка из n элементов, и при этом $A_n^n = P_n$. Полезной может оказаться формула $A_n^k = n \cdot A_{n-1}^{k-1}$.

Определение. Подмножества, составленные из n элементов данного множества и содержащие k элементов в каждом подмножестве, называют *сочетаниями* из n элементов по k. В отличие от размещений, сочетания различаются только элементами. Так, множества $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$ — это одно и то же сочетание. Число сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k. Число сочетаний из n элементов по k находят по формуле $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$ или $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Число подмножеств множества из n элементов может быть найдено как сумма всех сочетаний из n элементов по k при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, т. е. как $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$. Заметим, что справедливы формулы $C_n^k = C_n^{n-k}$ и $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. Эти формулы легко увидеть в треугольной таблице, называемой «треугольник Паскаля» и выражающей биномиальные коэффициенты при возведении бинома в степень n.

Подготовительный вариант

1. Найдите:
   а) P_7 б) A_7^4; в) C_7^4.

2. Сколько четырёхзначных чисел, у которых все цифры различные, можно составить из цифр:
   а) 1, 2, 3, 4; б) 0, 1, 2, 3, 4?

3. Сколько существует различных вариантов расписания уроков на один из дней недели для 9 класса, если в этот день должно быть 6 уроков, причём два последних — уроки физкультуры, а остальные уроки — алгебра, геометрия, физика и литература?

4. Сколько существует вариантов различных посадок троих учащихся на 7 свободных мест в классе?

5. У учащихся 9 класса 15 учебных предметов. Сколькими способами завуч может составить расписание уроков для 9 класса на один день, если в этот день должно быть семь различных уроков?

6. У ученика из 12 учебников 3 учебника по математике. Сколькими способами он может выбрать 6 учебников, если в каждый из этих комплектов должны войти все учебники по математике?

7. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{A_n^8}{A_n^5} = 120$.

Вариант 1

1. Найдите:
   а) P_6; б) A_6^4; в) C_6^3.

2. Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры различные, можно составить из цифр:
а) 1, 3, 5; б) 0, 2, 4, 8?

3. Сколько существует различных вариантов расписания уроков на один из дней недели для 9 класса, если в этот день должно быть 5 уроков, причём первым должен быть урок литературы, а остальные уроки — алгебра, физика, история и физкультура?

4. Сколько существует вариантов различных посадок двоих учащихся на 6 свободных мест в классе?

5. У учащихся 9 класса 11 учебных предметов. Сколькими способами завуч может составить расписание уроков для 9 класса на один день, если в этот день должно быть шесть различных уроков?

6. У ученика из 10 учебников 2 учебника по математике. Сколькими способами он может выбрать 5 учебников, если в каждый из этих комплектов должны войти все учебники по математике?

7. Решите в натуральных числах уравнение $\dfrac{A_n^7 + A_n^5}{A_n^5} = 91$.

Вариант 2

1. Найдите:
а) P_5; б) A_6^3; в) C_6^4.

2. Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры различные, можно составить из цифр:
а) 2, 4, 8; б) 0, 1, 5, 9?

3. Сколько существует различных вариантов расписания уроков на один из дней недели для 9 класса, если в этот день должно быть 5 уроков, причём вторым уроком должен быть урок алгебры, а остальные уроки — русский язык, биология, география и физкультура?

4. Сколько существует вариантов различных посадок троих учащихся на 5 свободных мест в классе?

5. У учащихся 9 класса 12 учебных предметов. Сколькими способами завуч может составить расписание уроков для 9 класса на один день, если в этот день должно быть шесть различных уроков?

6. У ученика из 11 учебников 2 учебника по математике. Сколькими способами он может выбрать 6 учебников, если в каждый из этих комплектов должны войти все учебники по математике?

7. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{A_n^7 - A_n^5}{A_n^5} = 109$.

Вариант 3

1. Найдите:
а) P_8; б) A_7^3; в) C_7^3.

2. Сколько четырёхзначных чисел, у которых все цифры различные, можно составить из цифр: а) 9, 8, 7, 6; б) 6, 7, 8, 9, 0?

3. Сколько существует различных вариантов расписания уроков на один из дней недели для 9 класса, если в этот день должно быть 7 уроков, причём два последних — уроки физкультуры, а остальные уроки — алгебра, геометрия, история, география и литература?

4. Сколько существует вариантов различных посадок четверых учащихся на 7 свободных мест в классе?

5. У учащихся 9 класса 15 учебных предметов. Сколькими способами завуч может составить расписание уроков для 9 класса на один день, если в этот день должно быть шесть различных уроков?

6. У ученика из 11 учебников 3 учебника по математике. Сколькими способами он может выбрать 7 учебников, если в каждый из этих комплектов должны войти все учебники по математике?

7. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{A_n^8}{A_n^5} = 60$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 25

Элементы теории вероятностей

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Событие, которое может произойти, а может и не произойти, называют *случайным* событием. Отношение числа опытов, в которых произошло данное событие, к общему числу всех проведённых опытов называется *частотой* случайного события. Если в длинной серии экспериментов со случайными исходами значения частот близки к некоторому постоянному числу, то это число принимают за вероятность данного события (статистическое определение вероятности события).

События, которые нельзя разделить на более простые, называются *элементарными событиями* или *исходами*. В результате опыта обязательно наступает только одно элементарное событие, только один исход. Элементарные события, шансы которых равны, называют *равновозможными*. Исходы, при которых наступает некоторое событие, называются *благоприятными* для наступления данного события.

Определение. *Вероятностью события A* называется отношение числа благоприятных для A исходов к числу всех равновозможных для данного события исходов. Обозначение: $P(A)$. Вероятность события равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих этому событию.

Событие, которое происходит в любом случае, называют *достоверным*. Вероятность достоверного события равна 1. Событие, которое при данных условиях опыта не произойдёт никогда, называется *невозможным* событием. Вероятность невозможного события равна 0. Событие, вероятность которого очень мала, называют *маловероятным*.

Если некоторое случайное событие составляют несколько элементарных событий, то сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1. Событием, *противоположным* событию A, называют событие, которому благоприятствуют все элементарные события, не благоприятствующие событию A. Событие, противоположное событию A, обозначают $\bar{A}$. События A и $\bar{A}$ называют взаимно противоположными или дополнениями друг для друга. Справедливо равенство $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Если события A и B не имеют общих благоприятствующих элементарных событий, то они не могут наступить одновременно в ходе одного и того же опыта. Такие события называют *несовместными*.

Событие $A \cup B$ наступает, если наступает хотя бы одно из событий A и B. Это означает, что наступает либо A, либо B, либо A и B вместе. Вероятность объединения несовместных событий равна сумме их вероятностей, т. е. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ — правило сложения несовместных событий.

События, вероятность появления каждого из которых не зависит от появления или не появления другого события, называются *независимыми* событиями. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятности появления каждого события, т. е. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Подготовительный вариант

1. Имеется 35 красных и 65 синих шаров. Какова вероятность случайным образом взять синий шар?
2. Пять одинаковых шаров пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и сложены в коробку. Шары случайным образом по одному

вынимают. Какова вероятность того, что шары будут вытянуты в последовательности 1, 2, 3, 4, 5?

3. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляют трёхзначное число с неповторяющимися цифрами. Какова вероятность того, что будет составлено число, кратное 5?

4. В одной коробке 18 тетрадей, 6 из которых в клетку, а в другой — 8 тетрадей, 6 из которых в клетку. Из коробки вынули по одной тетради. Какова вероятность того, что обе тетради в клетку?

5. В цехе работают два станка. Вероятность поломки в течение смены для одного из них равна 0,05, а для другого — 0,08. Какова вероятность того, что оба станка в течение смены будут работать без поломки?

6. К олимпиаде по математике готовятся 20 девятиклассников и 15 десятиклассников. Команда должна насчитывать 10 человек. Какова вероятность того, что в команде окажется 8 девятиклассников?

Вариант 1

1. На полке школьной библиотеки стоят 15 учебников по математике и 35 учебников по физике. Какова вероятность случайным образом выбрать книгу по физике?

2. Шесть одинаковых шаров пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и сложены в коробку. Шары случайным образом по одному вынимают. Какова вероятность того, что шары будут вынуты в последовательности убывания их номеров?

3. Из цифр 1, 2, 4, 8 составляют трёхзначное число с неповторяющимися цифрами. Какова вероятность того, что будет составлено нечётное число?

4. В одной коробке 10 деталей, 2 из которых с браком, а в другой — 8 деталей, 2 из которых с браком. Из коробки вынули по одной детали. Какова вероятность того, что обе детали с браком?

5. В цехе работают два станка. Вероятность поломки в течение смены для одного из них равна 0,25, а для другого — 0,12. Какова вероятность того, что оба станка в течение смены будут работать без поломки?

6. К олимпиаде по математике готовятся 24 девятиклассника и 18 десятиклассников. Команда должна насчитывать 15 человек. Какова вероятность того, что в команде окажется 10 девятиклассников?

Вариант 2

1. Имеется 15 красных и 35 синих шаров. Какова вероятность случайным образом взять синий шар?

2. Шесть одинаковых шаров пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и сложены в коробку. Шары случайным образом по одному вынимают. Какова вероятность того, что шары будут вынуты в последовательности возрастания их номеров?

3. Из цифр 1, 3, 5, 8 составляют трёхзначное число с неповторяющимися цифрами. Какова вероятность того, что будет составлено чётное число?

4. В одной вазе 12 конфет, 4 из которых с фруктовой начинкой, а в другой вазе 8 конфет, 6 из которых с фруктовой начинкой. Из каждой вазы взяли по одной конфете. Какова вероятность того, что обе конфеты с фруктовой начинкой?

5. Два орудия стреляют по цели. Первое орудие поражает цель с вероятностью 0,9, второе — с вероятностью 0,85. Какова вероятность того, что, сделав по одному выстрелу, орудия не поразят цель?

6. В казарме находятся 6 сержантов и 28 рядовых военнослужащих. Для выполнения задания требуется 8 солдат. Какова вероятность того, что для выполнения задания будут выбраны 4 сержанта?

Вариант 3

1. Имеется 5 красных и 20 синих шаров. Какова вероятность случайным образом взять синий шар?

2. Восемь одинаковых шаров пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и сложены в коробку. Шары случайным образом по одному вынимают. Какова вероятность того, что шары будут вынуты в последовательности возрастания их номеров?

3. Из цифр 1, 3, 5, 7, 8 составляют трёхзначное число с неповторяющимися цифрами. Какова вероятность того, что будет составлено чётное число?

4. В одной коробке 10 карандашей, 2 из которых красные, а в другой — 8 карандашей, 3 из которых не красные. Из коробок вынимают по одному карандашу. Какова вероятность того, что оба карандаша красные?

5. Два орудия стреляют по цели. Первое орудие поражает цель с вероятностью 0,7, второе — с вероятностью 0,85. Какова ве-

роятность того, что, сделав по одному выстрелу, орудия не поразят цель? Какова вероятность того, что при тех же условиях цель будет поражена?

6. В казарме находятся 8 сержантов и 32 рядовых военнослужащих. Для выполнения задания требуется 10 солдат. Какова вероятность того, что для выполнения задания будут выбраны 2 сержанта?

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Глава 1. **Функции, их свойства и графики**

Подготовительный вариант

1. Выясните, является ли функция $f(x) = \dfrac{(2x-1)^3 - (2x+1)^3}{x}$ чётной или нечётной.

2. При каком значении параметра a функция $y = x^2 + ax - 2$ убывает на промежутке $(-\infty; 3]$ и возрастает на промежутке $[3; +\infty)$?

3. Найдите область значений функции:

   а) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2x + 2}$;

   б) $f(x) = \dfrac{4x + 4}{x^2 + 2x + 2}$.

4. Постройте график функции $y = x^2 - 4x + a$, если её наименьшее значение равно 2.

5. По данному графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 11) определите знаки коэффициентов a, b, c и знак дискриминанта D. Ответ объясните.

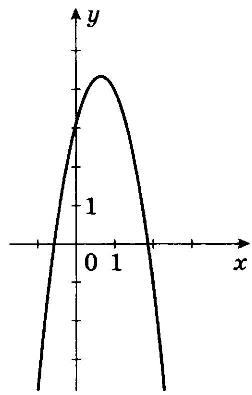


Рис. 11

6. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве всех действительных чисел, является чётной. Известно, что при $x \geqslant 0$ функция задаётся формулой $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Постройте график функции $y = f(x)$ и с его помощью определите:
   а) нули функции;
   б) все значения аргумента, при которых $f(x) > 0$;
   в) промежутки монотонности;
   г) множество значений функции. Задайте данную функцию одной формулой.

7. Постройте график функции $y = \left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|$ и с его помощью укажите количество решений уравнения $\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| = a$ в зависимости от параметра a.

Вариант 1

1. Выясните, является ли функция $f(x) = \dfrac{(2x+3)^5 + (2x-3)^5}{x}$ чётной или нечётной.

2. При каком значении параметра a функция $y = -x^2 + ax + 1$ возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$ и убывает на промежутке $[-1; +\infty)$?

3. Найдите область значений функции:

а) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 2x + 3}$; б) $f(x) = \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}$.

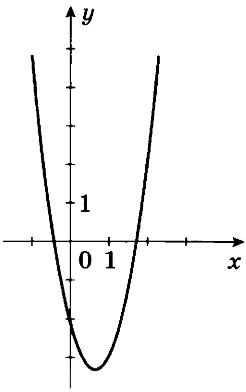


Рис. 12

4. Постройте график функции $y = -x^2 + 4x + a$, если её наибольшее значение равно -1.

5. По данному графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 12) определите знаки коэффициентов a, b, c и знак дискриминанта D. Ответ объясните.

6. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве всех действительных чисел, является нечётной. Известно, что при $x \geqslant 0$ функция задаётся формулой $f(x) = x^2 - 4x$. Постройте график функции $y = f(x)$ и с его помощью определите:

а) нули функции;
б) все значения аргумента, при которых $f(x) > 0$;
в) промежутки монотонности;
г) множество значений функции.

7. Постройте график функции $y = \left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|$ и с его помощью укажите количество решений уравнения $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right| = a$ в зависимости от параметра a.

Вариант 2

1. Выясните, является ли функция $f(x) = \dfrac{(2x+1)^3}{x-2} + \dfrac{(2x-1)^3}{x+2}$ чётной или нечётной.

2. При каком значении параметра a функция $y = -x^2 + ax - 1$ возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$?

3. Найдите область значений функции:

а) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4x + 7}$; б) $f(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$.

4. Постройте график функции $y = -x^2 + 2x + a$, если её наибольшее значение равно -1.

5. По данному графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 13) определите знаки коэффициентов a, b, c и знак дискриминанта D. Ответ объясните.

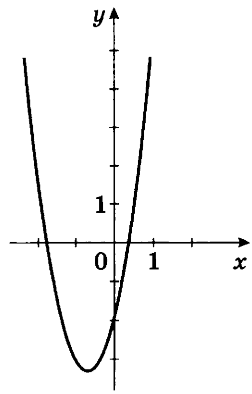


Рис. 13

6. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве всех действительных чисел, является чётной. Известно, что при $x \geqslant 0$ функция задаётся формулой $f(x) = x^2 - x$. Постройте график функции $y = f(x)$ и с его помощью определите:

а) нули функции;

б) все значения аргумента, при которых $f(x) > 0$;

в) промежутки монотонности;

г) множество значений функции.

7. Постройте график функции $y = \left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right|$ и с его помощью укажите количество решений уравнения $\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| = a$ в зависимости от параметра a.

Вариант 3

1. Выясните, является ли функция $f(x) = \dfrac{(2x - 3)^4}{x + 1} - \dfrac{(2x + 3)^4}{x - 1}$ чётной или нечётной.

2. При каком значении параметра a функция $y = 2x^2 + ax + 1$ убывает на промежутке $(-\infty; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$?

3. Найдите область значений функции:

а) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + x + 1}$; б) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 2}$.

4. Постройте график функции $y = x^2 + 2x + a$, если её наименьшее значение равно -2.

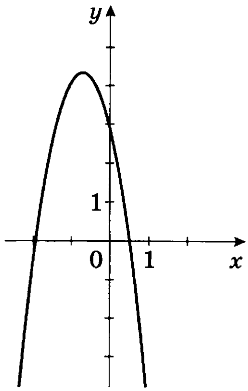


Рис. 14

5. По данному графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 14) определите знаки коэффициентов a, b, c и знак дискриминанта D. Ответ объясните.

6. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве всех действительных чисел, является чётной. Известно, что при $x \geqslant 0$ функция задаётся формулой $f(x) = -x^2 - 3x + 4$. Постройте график функции $y = f(x)$ и с его помощью определите:
   а) нули функции;
   б) все значения аргумента, при которых $f(x) > 0$;
   в) промежутки монотонности;
   г) множество значений функции. Задайте данную функцию одной формулой.

7. Постройте график функции $y = \left|\frac{x+1}{x-2}\right|$ и с его помощью укажите количество решений уравнения $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| = a$ в зависимости от параметра a.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Глава 2. **Уравнения и неравенства с одной переменной**

Подготовительный вариант

1. Решите неравенство $\frac{(x^2 - 7x - 8)\left(x - \sqrt{63}\right)^3}{(x+2)^2(4-x)} \geqslant 0$.

2. Решите уравнение $x^2 - 4|x| - 2 = \frac{15}{x^2 - 4|x|}$.

3. Найдите область определения функции
$$y = \sqrt{12 + x - x^2} + \frac{1}{\sqrt{2|0{,}5 - x| - 5}}.$$

4. Решите уравнение $x^4 - 4x^3 - 23x^2 + 24x - 3 = 0$ разложением на множители (может быть, методом неопределённых коэффициентов).

5. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 5x - 5|x - 3| + 17}{x^2 + x + 2} \leqslant 1$.

6. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\frac{x^2 + (2b - 1)x - 4b - 2}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}} = 0$ имеет ровно один корень.

Вариант 1

1. Решите неравенство $\frac{(x^2 - 6x + 8)(x - 2)^3}{(x + 4)^5(5 - x)^3} \geqslant 0$.

2. Решите уравнение $3x^2 - 2|x| + 2 = \frac{2}{3x^2 - 2|x| + 1}$.

3. Найдите область определения функции
$y = \sqrt{5x + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}$.

4. Решите уравнение $x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 11x - 2 = 0$ разложением на множители (может быть, методом неопределённых коэффициентов).

5. Решите неравенство $\frac{2(x - 1)^2 - 3|x - 1| + 3}{(x - 1)^2 + 1} \geqslant 1$.

6. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\frac{x^2 - (2b + 3)x + b^2 + 3b}{x^2 - 9} = 0$ имеет ровно один корень.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\frac{(x^2 - 4x - 5)(x + 1)^2}{(x + 2)^2(3 - x)^5} \geqslant 0$.

2. Решите уравнение $x^2 - 4|x| + 6 = \frac{21}{x^2 - 4|x| + 10}$.

3. Найдите область определения функции
$y = \sqrt{x^2 - 6x - 7} + \frac{1}{\sqrt{2 - 3x}}$.

4. Решите уравнение $x^4 + 3x^3 - 13x^2 - x + 2 = 0$ разложением на множители (может быть, методом неопределённых коэффициентов).

5. Решите неравенство $\frac{(x + 2)^2 - 3|x + 2| - 3}{|x + 2| + 2} \leqslant 1$.

6. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\frac{x^2 + (1 - 2b)x + b^2 - b}{x^2 - 4} = 0$ имеет ровно один корень.

Вариант 3

1. Решите неравенство $\frac{(x - 3)(x + 2)^2}{x^3} \leqslant 0$.

2. Решите уравнение $x^2 + 2|x| - 13 = \frac{30}{x^2 + 2|x|}$.

3. Найдите область определения функции
$y = \sqrt{6 - x - x^2} - \frac{1}{\sqrt{|x + 3| - 3}}$.

4. Решите уравнение $x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ разложением на множители.

5. Решите неравенство $\frac{(2x - 1)^2 - 3|2x - 1|}{(2x - 1)^2 + 1} \geqslant 0$.

6. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\frac{x^2 + (b + 1)x - 2b^2 - b}{|x - 1| - 2} = 0$ имеет ровно один корень.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Глава 3. **Системы уравнений и системы неравенств с двумя переменными**

Подготовительный вариант

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 10 \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = -12. \end{cases}$

2. Изобразите фигуру, задаваемую системой неравенств

$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 4, \\ |x| \leqslant 2, \\ |y| \leqslant 2, \end{cases}$ и найдите её площадь.

3. Найдите множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} (x - 2y)(5x + 2y) = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases}.$$

4. Дорога от станции до озера идёт сначала в гору, а затем под гору. Пешеход на подъёме шёл со скоростью на 2 км/ч меньшей, чем на спуске. Расстояние до озера пешеход прошёл за 1 ч, а на обратный путь он затратил на 5 мин больше. Найдите скорость пешехода на подъёме и на спуске, если расстояние от станции до озера равно 5 км.

5. В координатной плоскости постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4x + 3 \\ y - x \leqslant 3 \end{cases}$, и укажите точку с наименьшей ординатой и точку с наибольшей ординатой.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy + 3y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Вариант 1

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y^2 + 3xy = -8 \\ x + 3y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ xy = 21. \end{cases}$

2. Изобразите фигуру, задаваемую системой неравенств

$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \geqslant 4 \\ |x - 1| \leqslant 2 \\ |y + 2| \leqslant 2, \end{cases}$ и найдите её площадь.

3. Найдите множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} (3x - 2y)(x - 4y) = 0 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 6. \end{cases}$$

4. По течению реки расположены три пристани: A, B и C, причём $AB = 12$ км, $BC = 8$ км. Катер, отправившись из A, дошёл до C и, повернув обратно, прибыл в B, затратив на весь путь полтора часа. Затем катер отправился в A и тут же вернулся в B, затратив на этот путь 1 ч 21 мин. Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

5. В координатной плоскости постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4x \\ y - x \leqslant 6, \end{cases}$ и укажите точку с наименьшей ординатой и точку с наибольшей ординатой.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3y^2 - 2x^2 - xy - 5y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 4xy = 21 \\ 3x - y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ xy = 24. \end{cases}$

2. Изобразите фигуру, задаваемую системой неравенств

$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 \geqslant 9 \\ |x + 1| \leqslant 3 \\ |y - 2| \leqslant 3, \end{cases}$ и найдите её площадь.

3. Найдите множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} (x - 4y)(2x + 5y) = 0 \\ x^2 + xy - 2y^2 = 28. \end{cases}$$

4. Расстояние между двумя городами, равное 480 км, пассажирский поезд должен проходить на 2 ч быстрее, чем товарный. Из-за ремонта путей пассажирский поезд вынужден был уменьшить скорость на 8 км/ч, а товарный — на 12 км/ч. В результате на путь между городами товарный поезд затратил на 3 ч 20 мин больше, чем пассажирский поезд. Найдите скорость товарного и скорость пассажирского поезда.

5. В координатной плоскости постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \geqslant x^2 - 2x \\ y - x \leqslant 4, \end{cases}$ и укажите точку с наименьшей ординатой и точку с наибольшей ординатой.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - xy - 3y - 2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$

Вариант 3

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 16 \\ 4x - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10. \end{cases}$

2. Изобразите фигуру, задаваемую системой неравенств

$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ |x| + |y| \geqslant 2, \end{cases}$ и найдите её площадь.

3. Найдите множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} (x + 4y)(5x - 2y) = 0 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 27. \end{cases}$$

4. Моторная лодка прошла 21 км по течению реки и вернулась обратно, затратив на весь путь 2 ч 40 мин. В другой раз та же моторная лодка прошла по течению реки 18 км и 14 км — против течения, затратив на этот путь 2 ч. Найдите собственную скорость моторной лодки и скорость течения реки.

5. В координатной плоскости постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \geqslant x^2 - 6x + 8 \\ y - x \leqslant 8, \end{cases}$ и укажите точку с наименьшей ординатой и точку с наибольшей ординатой.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 2y^2 - xy + 3y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Глава 4. **Последовательности**

Подготовительный вариант

1. Найдите сто семьдесят первую цифру после запятой в десятичной записи числа:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{22}$.

2. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{2n + 3}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^n\right)$; в) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n + 4}{4n - 3}$.

3. Последовательность (x_n) задана формулой n-го члена $x_n = \frac{8n+3}{5n-1}$, где $n \in N$. Докажите, что:

а) последовательность (x_n) убывающая;

б) $x_n > 1{,}6$ для любых $n \in N$.

4. В арифметической прогрессии сумма седьмого и тринадцатого членов равна 5, а разность одиннадцатого и восемнадцатого членов равна 7. Найдите число членов прогрессии, не превышающих по абсолютной величине 50.

5. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна $\frac{3}{4}$, а сумма кубов её членов равна $\frac{27}{208}$. Найдите сумму квадратов членов прогрессии.

6. Сумма трёх чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 26. Если первое число оставить без изменения, второе увеличить на 3, а третье уменьшить на 2, то полученные числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Вариант 1

1. Найдите сто семьдесят первую цифру после запятой в десятичной записи числа $\frac{3}{44}$.

2. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{3n-2}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(3 - 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$; в) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{7n+3}{5n-3}$.

3. Последовательность (x_n) задана формулой n-го члена $x_n = \frac{4n-1}{3n+2}$, где $n \in N$. Докажите, что:

а) последовательность (x_n) возрастающая;

б) $x_n < 1\frac{1}{3}$ при всех $n \in N$.

4. Четвёртый член арифметической прогрессии равен 1. При каком значении разности прогрессии сумма попарных произведений первых трёх членов прогрессии будет наименьшей?

5. Сумма кубов членов бесконечной геометрической прогрессии относится к сумме квадратов её членов как $\frac{12}{13}$. Найдите третий член прогрессии, если сумма первых двух её членов равна $\frac{4}{3}$.

6. Сумма трёх чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 21. Если первое число оставить без изменения, второе увеличить на 6, а третье увеличить на 3, то полученные числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Вариант 2

1. Найдите сто семьдесят первую цифру после запятой в десятичной записи числа $\frac{4}{37}$.

2. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4}{n-5}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(2 - 4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$; в) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4n-3}{5n+2}$.

3. Последовательность (x_n) задана формулой n-го члена $x_n = \frac{3n+1}{4n-3}$, где $n \in N$. Докажите, что:

а) последовательность (x_n) убывающая;

б) $x_n > \frac{3}{4}$ при всех $n \in N$.

4. Первый член арифметической прогрессии равен 1. При каком значении разности прогрессии сумма попарных произведений второго, третьего и четвёртого членов прогрессии будет наименьшей?

5. Сумма кубов членов бесконечной геометрической прогрессии относится к сумме квадратов её членов как $\frac{20}{21}$. Найдите третий член прогрессии, если сумма первых двух её членов равна 1,25.

6. Сумма трёх чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 35. Если первое число увеличить на 2, второе оставить без изменения, а третье уменьшить на 7, то полученные числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Вариант 3

1. Найдите сто семьдесят первую цифру после запятой в десятичной записи числа:

а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{17}{22}$.

2. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{23}{2^n + 3}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(2 + 11 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^n\right)$; в) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4 - n}{3 + n}$.

3. Последовательность (x_n) задана формулой n-го члена $x_n = \frac{n+7}{2n+1}$, где $n \in N$. Докажите, что:

а) последовательность (x_n) убывающая;
б) $x_n > 0{,}5$ для любых $n \in N$.

4. В арифметической прогрессии сумма пятого и десятого членов равна 15, а разность одиннадцатого и пятнадцатого членов равна 8. Найдите число членов прогрессии, не превышающих по абсолютной величине 40.

5. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов её членов равна $9\frac{1}{7}$. Найдите сумму квадратов членов прогрессии.

6. Сумма трёх чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 26. Если третье число уменьшить на 8, то полученные числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Глава 5. **Степени и корни**

Подготовительный вариант

1. Представьте в виде произведения выражение:

а) $\sqrt[3]{x} + x^{\frac{1}{6}}$; б) $\sqrt{x} - 5x^{0,25} + 4$; в) $x^{0,75} + 27$.

2. Найдите все пары рациональных чисел вида $(a; b)$, для которых выполняется равенство $(7 + b\sqrt{3})^{\frac{1}{4}} = \sqrt{a - \sqrt{3}}$.

3. Представьте выражение в виде степени с натуральным показателем:

а) $\sqrt[3]{x^2} + 2x^{\frac{1}{3}} + 1$; б) $x + 6 \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot \sqrt[3]{x}\right) + 8$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{6x^{0,7} - 2x}{\sqrt{x} - 3x^{\frac{1}{5}}}$; б) $\dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x + x^{0,5} + 1}$; в) $\dfrac{2\sqrt{x} - 4}{x + x^{\frac{1}{2}} - 6}$.

5. Какое из чисел ближе к единице: $1{,}25 \cdot \sqrt[9]{0{,}8}$ или $0{,}8 \cdot \sqrt[9]{1{,}25}$?

6. Упростите выражение $\left(\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 1}\right)^{-1} + \sqrt[3]{x^{-2}}\right) \cdot \left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{1 - \sqrt[3]{x}}\right)^{-1}$.

7. Решите уравнение $\dfrac{4(x+2)\sqrt{3x-2} - x\sqrt{x} - \sqrt{4x}}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 5} = 0$.

Вариант 1

1. Представьте в виде произведения выражение:

а) $\sqrt{x} - 3x^{\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{x} + 4x^{0,25} - 5$; в) $x - 8$.

2. Найдите все пары рациональных $(a; b)$, для которых выполняется равенство $\left(15 + a\sqrt{6}\right)^{0,25} = \left(\sqrt{6} - b\right)^{0,5}$.

3. Представьте выражение в виде степени с натуральным показателем:

а) $x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 4$; б) $x + 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 1$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{3x^{\frac{4}{5}} - x}{5\sqrt{x} - 15x^{0,3}}$; б) $\dfrac{x^2 - 27\sqrt{x}}{x + 3x^{0,5} + 9}$; в) $\dfrac{2\sqrt{x} + 4}{x - x^{\frac{1}{2}} - 6}$.

5. Какое из двух чисел ближе к единице: $2{,}5 \cdot \sqrt[7]{0{,}4}$ или $0{,}4 \cdot \sqrt[7]{2{,}5}$?

6. Упростите выражение $\left(\dfrac{x - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 1} - 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 1\right) : \left(\dfrac{1 + x^{\frac{1}{3}}}{1 - x^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}$.

7. Решите уравнение $\dfrac{3x\sqrt{x} + \sqrt{4x} - 2(3x+2)\sqrt{2x-1}}{2x^{\frac{2}{3}} - 6\sqrt[3]{x} + 5} = 0$.

Вариант 2

1. Представьте в виде произведения выражение:

а) $\sqrt{x} + 2x^{\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{x} + 4x^{0,25} + 3$; в) $x + 8$.

2. Найдите все пары рациональных (a; b), для которых выполняется равенство $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{0,5}=\left(5-\sqrt{21}\right)^{0,25}$.

3. Представьте выражение в виде степени с натуральным показателем:

а) $x^{\frac{1}{3}}+4x^{\frac{1}{6}}+4$; б) $x-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-1$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2x^{\frac{4}{5}}-x}{5\sqrt{x}-10x^{0,3}}$; б) $\dfrac{x^2+27\sqrt{x}}{x-3x^{0,5}+9}$; в) $\dfrac{3\sqrt{x}+6}{x-x^{\frac{1}{2}}-6}$.

5. Какое из двух чисел ближе к единице: $\frac{3}{5}\cdot\sqrt[8]{1\frac{2}{3}}$ или $\frac{5}{3}\cdot\sqrt[8]{0,6}$?

6. Упростите выражение $\left(1+2\cdot x^{\frac{2}{3}}-\dfrac{x+x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}\right):\left(\dfrac{1-x^{\frac{2}{3}}}{1-x^{\frac{4}{3}}}\right)^{-1}$.

7. Решите уравнение $\dfrac{2(x+1)\sqrt{3x-1}-x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2}=0$.

Вариант 3

1. Представьте в виде произведения выражение:

а) $\sqrt[4]{x}+x^{\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt{x}+6x^{0,25}+8$; в) $x^{0,75}-125$.

2. Найдите все пары рациональных чисел вида (a; b), для которых выполняется равенство $\left(b-4\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt{\sqrt{5}-a}$.

3. Представьте выражение в виде степени с натуральным показателем:

а) $\sqrt[5]{x^2}-6x^{0,2}+9$; б) $x-6\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}-2\cdot\sqrt[3]{x}\right)-8$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{10x^{\frac{4}{5}}-2x}{\sqrt{x}-5x^{0,3}}$; б) $\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-x^{0,5}+1}$; в) $\dfrac{2\sqrt{x}-4}{x-5x^{\frac{1}{2}}+6}$.

5. Какое из чисел ближе к единице: $1,6\cdot\sqrt[5]{0,675}$ или $0,675\cdot\sqrt[5]{1,6}$?

6. Упростите выражение

$$\left(\left(\frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1} - \frac{3\sqrt[3]{x} - 1}{x + 1}\right) : \left(\frac{x + 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1}\right)^{-1}.$$

7. Постройте график функции

$$y = \left[\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{a + x}{a - x}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{2a}{(a - x)^2}}{(a + x)^{\frac{1}{4}}(a - x)^{-0,25}} - \frac{1}{2}a^{-1} \cdot \frac{1}{a^0 + x^2a^{-2}}\right] \cdot \frac{a^4 - x^4}{ax^3}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Глава 6. **Тригонометрические функции и их свойства**

Подготовительный вариант

1. Найдите $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

2. Упростите выражение $\dfrac{\cos\alpha - \cos 4\alpha + \cos 7\alpha - \cos 10\alpha}{\sin\alpha + \sin 4\alpha + \sin 7\alpha + \sin 10\alpha}$.

3. Докажите тождество $\operatorname{tg}\alpha + \cos^{-1}\alpha - 1 = \dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

4. Пусть α, β и γ — углы треугольника. Докажите, что:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma$;

б) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

5. Упростите выражение $\dfrac{\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ - \sin 100^\circ}{\sqrt{1 - \cos^2 320^\circ}}$.

6. Вычислите $\sin 18^\circ$.

Вариант 1

1. Найдите $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Упростите выражение:

а) $4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha$;

б) $1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$.

3. Докажите тождество $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}$.

4. Найдите $\cos 20\alpha$, если
$\sin 2\alpha \cdot \sin 5\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7\alpha\right) - \cos 2\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5\alpha\right) \cdot \cos 7\alpha = \frac{1}{6}$.

5. Вычислите $\frac{\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 100^\circ}{\sqrt{1 - \cos 260^\circ}}$.

6. Докажите тождество
$\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - 2\operatorname{tg} 4\alpha - 4\operatorname{tg} 8\alpha = 8\operatorname{ctg} 16\alpha$.

Вариант 2

1. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \left(\frac{1}{\cos 2\alpha} - 1\right) - \operatorname{tg} 2\alpha$.

3. Докажите тождество $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \frac{5 + 3\cos 4\alpha}{8}$.

4. Найдите $\cos 16\alpha$, если
$\sin 7\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) \cdot \cos 3\alpha + \cos 7\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5\alpha\right) \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{8}$.

5. Вычислите $\frac{\cos 20^\circ + \sin 50^\circ - \cos 80^\circ}{\sqrt{1 + \cos 280^\circ}}$.

6. Докажите тождество
$8\operatorname{ctg} 40\alpha + 4\operatorname{tg} 20\alpha + 2\operatorname{tg} 10\alpha + \operatorname{tg} 5\alpha = \operatorname{ctg} 5\alpha$.

Вариант 3

1. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

2. Упростите выражение $\sqrt{4 - 4\sin 2\alpha} - \sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

3. Докажите тождества:
а) $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 0{,}5\sin 2\alpha$;
б) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha - \cos 6\alpha + \cos 8\alpha}{\cos 4\alpha - \cos\alpha \cdot \cos 3\alpha} = 4\cos 4\alpha$.

4. Найдите $\cos 12\alpha$, если
$$\cos 3\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) \cdot \cos\alpha - \cos 4\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) \cdot \sin\alpha = \frac{1}{3}.$$

5. Вычислите $\operatorname{ctg} 10^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{ctg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ$.

6. Вычислите $\cos 36^\circ$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Глава 7. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

Подготовительный вариант

1. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторения цифр?

2. Из 8 учащихся класса, ставших призёрами школьного тура математической олимпиады, нужно выбрать троих для участия в следующем туре олимпиады. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

3. Из 15 учащихся нужно выбрать редактора школьной газеты и его помощника. Сколькими способами можно это сделать?

4. Из 30 книг, стоящих на полке, 5 учебников, а остальные — художественная литература. Наугад берут с полки одну книгу. Какова вероятность того, что она не окажется учебником?

5. Из 9 книг и 6 журналов надо выбрать 2 книги и 3 журнала. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

6. На пяти карточках написали буквы «о», «у», «к», «и», «с». Карточки перевернули и перемешали. Затем наугад последовательно положили эти карточки в ряд одну за другой и перевернули. Какова вероятность того, что в результате получится слово «конус» или слово «сукно»?

Вариант 1

1. Сколькими способами могут разместиться 5 пассажиров в салоне троллейбуса на пяти свободных местах?

2. Сколько трёхзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9?

3. Победителю конкурса чтецов предлагается в качестве подарка выбрать две книги из 10 различных книг. Сколькими способами он может осуществить этот выбор?

4. В ящике находятся шары с номерами 1, 2, 3, ..., 24, 25. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что будет вынут шар с номером, выражающимся простым числом?

5. Из 8 мальчиков и 5 девочек надо выделить для помощи библиотеке 3 мальчиков и 2 девочек. Сколькими способами это можно сделать?

6. На четырёх карточках написаны цифры 1, 3, 5, 7. Карточки перевернули и перемешали. Затем наугад последовательно положили эти карточки в ряд одну за другой и открыли. Какова вероятность того, что в результате получится число, большее 7000?

Вариант 2

1. Сколькими способами можно определить последовательность выступления 8 участников соревнований?

2. Из 12 членов правления садоводческого товарищества надо выбрать председателя и бухгалтера. Сколькими способами это можно сделать?

3. Из 19 членов бригады, прибывшей для ремонта школы, надо выделить троих для ремонта кабинета математики. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

4. Из 25 билетов по геометрии Антон не успел подготовить 2 первых и 3 последних билета. Какова вероятность того, что ему достанется билет, который он успел подготовить?

5. Из 15 юношей и 12 девушек, прибывших на соревнования по биатлону, тренер должен выбрать для участия в смешанной эстафете 2 юношей и 2 девушек. Сколькими способами он может это сделать?

6. На карточках записаны все возможные четырёхзначные числа, составленные из цифр 1, 2, 3, 4 так, что цифры в каждом из этих чисел не повторяются. Карточки перевернули и перемешали, а затем открыли одну из них. Какова вероятность того, что на этой карточке окажется чётное число?

Вариант 3

1. Сколькими способами можно составить расписание уроков на понедельник, когда изучаются литература, алгебра, геометрия, история, география, причём сдвоенных уроков нет?

2. Сколько прямых можно провести через 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

3. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя, его заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

4. В пакете лежат жетоны с номерами 1, 2, 3, ..., 19, 20. Наугад берут один жетон. Какова вероятность того, что номер, написанный на нём, будет простым числом?

5. Из 10 юношей и 12 девушек, прибывших на соревнования по теннису, тренер должен выбрать 2 юношей и 2 девушек для участия в соревнованиях пар. Сколькими способами он может сделать?

6. На четырёх карточках написаны буквы «о», «к», «у», «м». Карточки перевернули и перемешали. Затем наугад последовательно положили эти карточки в ряд одну за другой и открыли. Какова вероятность того, что в результате получится слово «мука» или слово «кума»?

ТЕСТЫ

Задания в тестовой форме в последние два десятилетия стали широко использоваться для проведения контроля знаний, умений и навыков учащихся при изучении математики. Составление таких заданий, их апробация являются делом непростым. По мнению специалистов, от момента создания теста до признания его приемлемым для использования в школе (валидным) проходит от 3-х до 5 лет, и занимается этим не один человек, а целые коллективы. Поэтому тестовые задания для первичного закрепления материала — именно для этой цели наиболее пригодны, по мнению автора, задания в тестовой форме — лучше не составлять самому, а использовать для этого готовые тесты, составленные специалистами. За основу предложенных ниже тестов взят «Сборник тестовых заданий для тематического и итогового контроля по алгебре для 9 класса», «Интеллект-Центр», Москва, 1999, подобранных в соответствии с содержанием учебника «Алгебра 9» Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, И. Е. Феоктистова, М., «Мнемозина», 2008.

Каждый тест содержит 6 заданий, рассчитанных на 20—25 минут. Тесты носят контролирующий характер, задания охватывают лишь основной материал учебника. Для того чтобы исключить возможность угадывания (а заодно и списывания, которое при выполнении заданий в тестовой форме выполняется значительно легче, чем при выполнении упражнений с записью решений), учащимся можно дать контрольное задание, подтверждающее самостоятельность выполнения заданий теста. Номер этого задания учитель называет ученику непосредственно перед сдачей учеником работы на проверку. Естественно, у разных учащихся должны быть разные контрольные номера. Учащихся нужно предупредить, что если они не решили контрольный номер, то за тест ставится оценка «2» (в этом случае считается, что ученик угадал или списал ответы *всех* заданий, а не только ответ одного контрольного номера). В случае если ученик получил неверный ответ (он, естественно, об этом не знает), он должен привести решение, приводящее к этому ответу. Конечно, этот номер не засчитывается как правильно выполненный, но зато считается, что ученик самостоятельно выполнял задания теста. Критерий оценки может быть таким: за три и четыре задания — «3», за пять заданий — «4», за шесть заданий — «5».

ТЕСТ 1

Функции и их свойства
(п. 1—4)

Вариант 1

1. Функция задана формулой $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$. Сколько положительных чисел содержится среди значений $f(0)$, $f(-2)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(3)$?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

На рисунке 15 изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь данным рисунком выполните упражнения № 2—5.

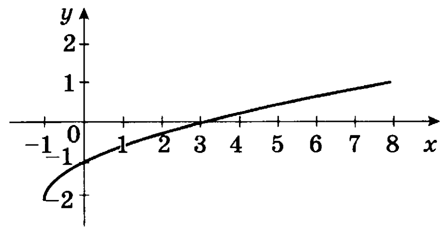


Рис. 15

2. Найдите область определения функции.

1) $[-1; 3]$; 2) $[-2; 1]$;
3) $[-1; 1]$; 4) $[-1; 8]$.

3. Найдите область значений функции.

1) $[-2; 1]$; 2) $[-1; 8]$; 3) $[-1; 3]$; 4) $[-1; 1]$.

4. Решите уравнение $f(x) = 0$.

1) -1; 2) 0; 3) 3; 4) 8.

5. Решите неравенство $f(x) < 0$.

1) $[-2; 0]$; 3) $[-1; 0)$;
2) $[-1; 3)$; 4) $(3; 8]$.

6. На рисунке 16 изображён график линейной функции. Укажите формулу, задающую эту функцию.

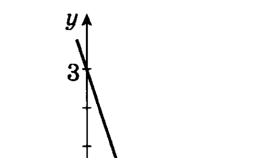


Рис. 16

1) $y = 3x$; 3) $y = x - 1$;
2) $y = 3 - x$; 4) $y = 3 - 3x$.

Вариант 2

1. Функция задана формулой $f(x) = x^3 - x^2$. Сколько положительных чисел содержится среди значений $f(1)$, $f(-2)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(2)$?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

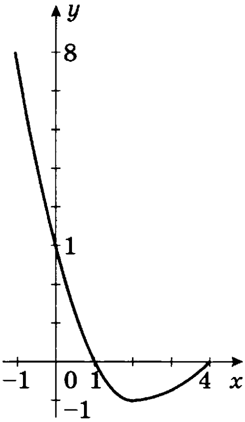


Рис. 17

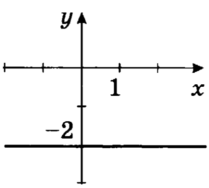


Рис. 18

На рисунке 17 изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь данным рисунком выполните упражнения № 2—5.

2. Найдите область определения функции.
1) [0; 4]; 3) [−1; 3];
2) [−1; 8]; 4) [−1; 4].

3. Найдите область значений функции.
1) [−1; 3]; 3) [−1; 4];
2) [−1; 8]; 4) [0; 8].

4. Решите уравнение $f(x) = 0$.
1) 1;3; 3) 4;
2) 3; 4) 1;4.

5. Решите неравенство $f(x) > 0$.
1) [1; 4); 3) [−1; 1);
2) (−1; 1); 4) (1; 4).

6. На рисунке 18 изображён график линейной функции. Укажите формулу, задающую эту функцию.
1) $y = -2$; 3) $y = 2$;
2) $y = -2x$; 4) $y = x - 2$.

ТЕСТ 2

Квадратный трёхчлен и его корни, квадратичная функция (п. 5—6)

Вариант 1

1. Какой из приведённых многочленов является квадратным трёхчленом:
1) $3x - 1 - 2x^2$; 3) $5 - 6x + 2x^2 - x^3$;
2) $5x^4 - 6x^2 + 2$; 4) $5x^5 - 6x^2 + 2$?

2. Какое из чисел −2; −1; 1; 3 является корнем квадратного трёхчлена $2x^2 - x - 1$?

3. Какой из приведённых квадратных трёхчленов не имеет корней
1) $2x^2 - x$; 3) $x^2 + 4x + 3$;
2) $9x^2 - 6x + 1$; 4) $5x^2 - x + 1$?

4. Найдите область значений функции $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$

1) $[0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2]$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $[2; +\infty)$.

5. При каком положительном значении параметра a можно сократить дробь $\frac{x^2 + x - 12}{x + a}$

1) 2; 2) 6; 3) 3; 4) 4?

6. График функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки с координатами (–4; 0), (–3; –2), (1; 0). Что можно сказать о коэффициентах a и c:

1) $a > 0$, $c > 0$; 3) $a > 0$, $c < 0$;
2) $a < 0$, $c < 0$; 4) $a < 0$, $c > 0$?

Вариант 2

1. Какой из приведённых многочленов является квадратным трёхчленом:

1) $5 - x^5 - 6x^2 + 3$; 3) $-6x - 3x^7 + 2x^2 - 5$;
2) $-2x^4 - 5x^2 + 2$; 4) $3x - 1 - 2x^2$?

2. Какое из чисел –2; –1; 3; 5 является корнем квадратного трёхчлена $2x^2 - 5x - 3$?

3. Какой из приведённых квадратных трёхчленов имеет два корня

1) $4x^2 - 4x + 1$; 3) $2x^2 - x - 3$;
2) $9x^2 + 1$; 4) $3x^2 - 2x + 1$?

4. Найдите область значений функции $y = -(x - 2)^2$

1) $[-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2]$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[-2; 0]$.

5. При каком положительном значении параметра a можно сократить дробь $\frac{x + a}{x^2 - 3x - 10}$

1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 10?

6. График функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки с координатами (1; 0), (2; 2), (4; 0). Что можно сказать о коэффициентах a и c:

1) $a > 0$, $c > 0$; 3) $a > 0$, $c < 0$;
2) $a < 0$, $c > 0$; 4) $a < 0$, $c < 0$?

ТЕСТ 3

Уравнения с одной переменной (п. 9—11)

Вариант 1

1. Укажите корень уравнения $3x^4 - 4x + 1 = 0$:

1) 1; 2) –1; 3) 2; 4) 0.

2. Найдите степень уравнения $3x^2 - 4x^4 + 1 = x^5$.
1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.

3. Решите уравнение $(x - 3)(x + 3) - x(x - 2) = 3$.
1) −6; 2) 3; 3) 6; −6; 4) 6.

4. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^3 - 25x = 0$.
1) 0; 2) 25; 3) 50; 4) 10.

5. Решите уравнение $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.
1) −1; 4; 2) −2; 2; 3) −1; 1; −2; 2; 4) 1; 2.

6. Сколько корней имеет уравнение $(x + 1)^2 - 3 = \frac{1}{x}$ (используйте графическую интерпретацию)?
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

Вариант 2

1. Укажите корень уравнения $3x^5 + 2x + 5 = 0$:
1) −1; 2) 0; 3) 2; 4) 1.

2. Найдите степень уравнения $x^4 - 3 - x^3(4 + x) = 0$.
1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.

3. Решите уравнение $(x - 4)(x + 4) - x(x - 1) = -7$.
1) 4; 2) 9; 3) −9; 4) −9; 9.

4. Найдите сумму квадратов корней уравнения $2x^3 - 8x = 0$.
1) 4; 2) 0; 3) 8; 4) 0; 2; −2.

5. Решите уравнение $x^4 + x^2 - 6 = 0$.
1) −2; 2; 2) −3; 3; 3) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$.

6. Сколько корней имеет уравнение $x^2 + 1 = \frac{2}{x}$ (используйте графическую интерпретацию)?
1) 3; 2) 1; 3) 2; 4) 0.

ТЕСТ 4

Неравенства с одной переменной (п. 12—13)

Вариант 1

1. Какое из перечисленных неравенств является неравенством второй степени:
1) $\frac{3}{x} < 0$; 3) $5 - 6x + 2x^2 - x^3 > 0$;
2) $2 - 6x < 0$; 4) $5x^2 - 6x + 2 < 0$?

2. Сколько решений неравенства $3x^2 - 5x - 12 > 0$ содержится среди чисел -3; -2; 0; 3:

1) 1; 2) 3; 3) 4; 4) 2?

3. Найдите все значения переменной x, при которых квадратный трёхчлен $x^2 - 3x - 10$ принимает отрицательные значения:

1) $(-2; 5)$; 3) $(-5; 2)$;
2) $(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.

4. Решите неравенство $36 - x^2 < 0$:

1) $(-6; 6)$; 3) $(6; +\infty)$;
2) $(-\infty; 6)$; 4) $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$.

5. Найдите наименьшее натуральное число, которое принадлежит области определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x-5)(x+2)}}$.

1) -1; 2) 4; 3) 6; 4) 1.

6. Найдите натуральное значение параметра a, при котором множество решений неравенства $(1 - x)(x - a) \geqslant 0$ содержит пять целых чисел.

1) 1; 2) 3; 3) 5; 4) 6.

Вариант 2

1. Какое из перечисленных неравенств является неравенством второй степени:

1) $5 - 6x < 0$; 3) $\dfrac{5}{x} > 0$;
2) $2 + 14x < 0$; 4) $-2x^2 - 6x + 2 < 0$?

2. Сколько решений неравенства $2x^2 - 5x + 2 < 0$ содержится среди чисел $-1{,}5$; 0; 1; 3:

1) 0; 2) 2; 3) 1; 4) 3?

3. Найдите все значения переменной x, при которых квадратный трёхчлен $x^2 + 2x - 8$ принимает отрицательные значения:

1) $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$;
2) $(-2; 4)$; 4) $(-4; 2)$.

4. Решите неравенство $x^2 - 9 > 0$:

1) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $(-3; 3)$;
2) $(3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3)$.

5. Найдите наименьшее натуральное число, которое принадлежит области определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{(2-x)(4+x)}}$.

1) 4; 2) 6; 3) 2; 4) 1.

6. Найдите натуральное значение параметра a, при котором множество решений неравенства $x(x - a) \leqslant 0$ содержит три целых числа.
1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) 2.

ТЕСТ 5

Уравнения с двумя переменными и их системы (п. 18—21)

Вариант 1

1. Сколько решений уравнения $(x + 2)^2 + y^2 - 2y = 0$ находится среди пар чисел (0; 0), (−3; 1), (−2; 2)?
1) 0; 2) 1; 3) 3; 4) 2.

2. Какая из перечисленных пар чисел является решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y^2 = 7? \end{cases}$
1) (−3; 2); 2) (1; 4); 3) (4; 1); 4) (8; 3).

3. Укажите значение суммы $x_1 + y_1$, где $(x_1; y_1)$ — решение системы $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$
1) 2; 2) 1; 3) −3; 4) 0.

4. Укажите значение произведения $x_1 \cdot y_1$, где $(x_1; y_1)$ — решение системы $\begin{cases} x + y = 1 \\ y^2 - x^2 = 5. \end{cases}$
1) 12; 2) −12; 3) 6; 4) −6.

5. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y^2 - x^2 = 5 \end{cases}$ (воспользуйтесь графической интерпретацией).
1) 2; 2) 1; 3) 0; 4) 3.

6. При каком значении параметра a система уравнений $\begin{cases} y + x^2 = 1 \\ y - ax = 0 \end{cases}$ имеет одно решение?
1) 1; 3) −1;
2) 0; 4) не существует такого значения.

Вариант 2

1. Сколько решений уравнения $2x - x^2 + y^2 = 5$ находится среди пар чисел (1; 2), (−1; 3), (1; −2)?
   1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

2. Какая из перечисленных пар чисел является решением системы уравнений $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 - 2y = 5 \end{cases}$?
   1) (5; 2); 2) (3; 2); 3) (2; 2); 4) (0; −1).

3. Укажите значение суммы $x_1 + y_1$, где $(x_1; y_1)$ — решение системы $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 1. \end{cases}$
   1) 2; 2) 0; 3) 3; 4) 1.

4. Укажите значение произведения $x_1 \cdot y_1$, где $(x_1; y_1)$ — решение системы $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$
   1) 8; 2) 6; 3) 3; 4) 4.

5. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = x^3 \end{cases}$ (воспользуйтесь графической интерпретацией).
   1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

6. При каком значении параметра a система уравнений $\begin{cases} y + x^2 = 3 \\ y - ax = 0 \end{cases}$ имеет одно решение?
   1) −3; 3) 0;
   2) не существует такого значения; 4) 3.

ТЕСТ 6

Арифметическая прогрессия (п. 31—32)

Вариант 1

1. Четвёртый член арифметической прогрессии 13; 9;... равен...
   1) 0; 2) 6; 3) −1; 4) 1.

2. Сумма второго и третьего членов арифметической прогрессии равна 16, разность её равна 4. Первый член прогрессии равен...
1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 6.

3. Число 59,5 является членом арифметической прогрессии −3,5; −2; .... Его порядковый номер равен...
1) 44; 2) 43; 3) 34; 4) 35.

4. Число членов арифметической прогрессии −2; 2; ... , меньших 55, равно...
1) 15; 2) 19; 3) 16; 4) 13.

5. Арифметическую прогрессию можно задать формулой:

1) $a_n = (-2)^n$; 2) $a_n = 1 + \frac{3}{n}$; 3) $a_n = -2n - 3$; 4) $a_n = n^2 - 2$.

6. Сумма четвёртого и пятого членов арифметической прогрессии равна 14. Сумма первых восьми членов прогрессии равна...
1) 56; 2) 75; 3) 52; 4) 112.

Вариант 2

1. Первый член арифметической прогрессии a_1; a_2; 4; 8;... равен...
1) 1; 2) 12; 3) −4; 4) −1.

2. Третий член арифметической прогрессии равен 6, а пятый равен 10. Первый член прогрессии равен...
1) 1; 2) 2; 3) −1; 4) 0.

3. Число −15,8 является членом арифметической прогрессии 8,2; 6,6; .... Его порядковый номер равен...
1) 13; 2) 14; 3) 17; 4) 16.

4. Число членов арифметической прогрессии −12; −8; ... , меньших 48, равно...
1) 15; 2) 18; 3) 16; 4) 12.

5. Арифметическую прогрессию можно задать формулой:

1) $a_n = 4^n + 1$; 3) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$;

2) $a_n = 4n - 3$; 4) $a_n = 2 - n^3$.

6. Четвёртый член арифметической прогрессии равен 18. Сумма первых семи членов прогрессии равна...
1) 80; 2) 126; 3) 52; 4) 112.

ТЕСТ 7

Геометрическая прогрессия (п. 33—34)

Вариант 1

1. Какая из данных последовательностей является геометрической прогрессией?

   1) $-\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 3) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2;

   2) 1,5; 6; 8; 12; 4) 16; −4; −1; $\frac{1}{4}$.

2. Четвёртый член геометрической прогрессии −18; 6; a_3; a_4; ... равен...

   1) −2; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 1.

3. Найдите седьмой член геометрической прогрессии −64; −32; ... .
   1) 1; 2) 2; 3) −2; 4) −1.

4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, если $a_1 = -2$, $q = \frac{3}{4}$.
   1) 8; 2) −8; 3) 6; 4) −16.

5. Дана геометрическая прогрессия b_1; b_2; 25; b_4; 5; b_6; .... Найдите b_4, если $q > 0$:

   1) 10; 2) $-\frac{1}{5}$; 3) $10\sqrt{5}$; 4) $5\sqrt{5}$.

6. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма второго и четвёртого её членов равна −20. Сумма первых шести членов прогрессии равна...
   1) 126; 2) −42; 3) −44; 4) −48.

Вариант 2

1. Какая из данных последовательностей является геометрической прогрессией?
   1) 15; 3; 5; 1; 3) 2; 8; 16; 64;

   2) 1,4; 2,8; −5,6; 11,2; 4) $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; 1.

2. Первый член геометрической прогрессии b_1; b_2; 4; 1; ... равен...
   1) −16; 2) 16; 3) 64; 4) 8.

3. Найдите шестой член геометрической прогрессии 81; −27; ....

1) $-\frac{1}{3}$; 2) 3; 3) $\frac{1}{9}$; 4) −3.

4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, если $a_1 = 6$, $q = -\frac{1}{2}$.

1) 4; 2) 12; 3) −4; 4) −8.

5. Дана геометрическая прогрессия b_1; b_2; b_3; −8; b_5; −16; b_7; .... Найдите b_5, если $q < 0$:

1) −12; 2) 12; 3) $8\sqrt{2}$; 4) $-8\sqrt{2}$.

6. Разность между вторым и первым членами геометрической прогрессии равна −3, а разность между третьим и вторым её членами равна −6. Сумма первых пяти членов прогрессии равна...

1) −27; 2) −33; 3) 93; 4) −93.

ТЕСТ 8

Корень n-ой степени (п. 38—39)

Вариант 1

1. Вычислите $\sqrt[3]{0,027}$.

1) 0,03; 2) 0,06; 3) 0,3; 4) 0,003.

2. Решите уравнение $-x^3 - 3 = 0$.

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $-\sqrt[3]{3}$; 3) $-\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{3}$; 4) −27.

3. Вычислите $\sqrt{28} \cdot \sqrt{7}$.

1) 14; 2) $2\sqrt{7}$; 3) 7; 4) $7\sqrt{2}$.

4. Вынесите множители из-под знака радикала $\sqrt{28a^4b^{11}}$.

1) $14a^2b^5\sqrt{b}$; 3) $3a^2b^5\sqrt{3b}$;

2) $2a^2b^9\sqrt{7}$; 4) $2a^2b^5\sqrt{7b}$.

5. Освободитесь от знаменателя в выражении $\frac{6}{\sqrt[3]{6}}$.

1) $\sqrt[3]{6}$; 2) $\sqrt[3]{36}$; 3) $6\sqrt[3]{6}$; 4) $2\sqrt[3]{6}$.

6. Внесите под корень стоящее перед ним выражение $3m^5p^4\sqrt{p}$, если $m < 0$.

1) $-\sqrt{9m^{10}p^9}$; 3) $\sqrt{9m^7p^7}$;

2) $\sqrt{9m^{10}p^9}$; 4) $-\sqrt{9m^{10}p^8}$.

Вариант 2

1. Вычислите $\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

1) $\frac{5}{9}$; 2) $1\frac{4}{9}$; 3) $1\frac{2}{3}$; 4) $1\frac{1}{3}$.

2. Решите уравнение $x^4 - 28 = 0$.

1) 7; 2) $\sqrt[4]{28}$; 3) $-\sqrt[4]{28}$; $\sqrt[4]{28}$; 4) $2\sqrt{7}$; $-2\sqrt{7}$.

3. Вычислите $\left(\sqrt[4]{3}\right)^8$.

1) 81; 2) 9; 3) 12; 4) 27.

4. Вынесите множители из-под знака радикала $\sqrt[3]{\frac{16p^5}{q^{12}}}$.

1) $\frac{2p}{q^4}\sqrt[3]{2p^2}$; 2) $\frac{2p^2}{q^4}\sqrt[3]{2p}$; 3) $\frac{2p^2}{q^9}\sqrt[3]{2p}$; 4) $\frac{4p}{q^4}\sqrt[3]{p}$.

5. Освободитесь от знаменателя в выражении $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

1) 1; 2) $2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$; 3) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

6. Внесите под корень стоящее перед ним выражение $-2xy^2\sqrt{3}$, если $x < 0$.

1) $-\sqrt{12x^2y^4}$; 2) $\sqrt{12x^2y^4}$; 3) $\sqrt{4x^2y^4}$; 4) $\sqrt{12x^3y^6}$.

ТЕСТ 9

Степень с рациональным показателем (п. 40)

Вариант 1

1. Вычислите $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

1) 1,5; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $-1{,}5$.

2. Представьте в виде степени с рациональным показателем выражение $a^3\sqrt{a}$.

1) $a^{1,5}$; 2) $a^{2,5}$; 3) $a^{3,5}$; 4) a^5.

3. Упростите выражение $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}}$.

1) $a^{\frac{3}{4}}$; 2) $a^{\frac{1}{4}}$; 3) a^2; 4) $a^{\frac{1}{2}}$.

4. Сократите дробь $\dfrac{a^2 - b^2}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}$.

1) $(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$; 2) $a + b$; 3) $(a^2 - b^2)^{1\frac{1}{2}}$; 4) $a - b$.

5. Решите уравнение $x^{\frac{3}{4}} = 27$.
1) 3; 2) 9; 3) 12; 4) 81.

6. Сколько целых чисел на координатной прямой находится между числами $\left(-\frac{4}{5}\right)^5$ и $(34)^{\frac{1}{5}}$?

1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 1.

Вариант 2

1. Вычислите $\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$.

1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{9}{16}$; 3) $\frac{9}{4}$; 4) $\frac{3}{16}$.

2. Представьте в виде степени с рациональным показателем выражение $a^3 \cdot \sqrt[4]{a^3}$.
1) $a^{2,25}$; 2) $a^{3,25}$; 3) a^4; 4) $a^{3,75}$.

3. Упростите выражение $a^{\frac{3}{4}} : a^{-1}$.

1) $a^{1\frac{3}{4}}$; 2) $a^{-\frac{3}{4}}$; 3) $a^{-\frac{1}{4}}$; 4) $a^{-\frac{3}{4}}$.

4. Сократите дробь $\dfrac{a^3 - b^3}{(a^3 - b^3)^{\frac{1}{3}}}$.

1) $a^2 + ab + b^2$; 3) $(a^3 - b^3)^{\frac{2}{3}}$;

2) $(a^3 - b^3)^{\frac{1}{3}}$; 4) $a^2 - b^2$.

5. Решите уравнение $x^{\frac{2}{3}} = 25$.

1) 5; 2) $\frac{1}{125}$; 3) $5\sqrt{5}$; 4) 125.

6. Сколько целых чисел на координатной прямой находится между числами $-25^{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt[6]{1,5}$?
1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 5.

ТЕСТ 10

Тригонометрические функции (п. 43—45)

Вариант 1

1. Известно, что $a = \cos 270°$ и $b = \sin 180°$. В каком из вариантов ответа дана верная информация о значениях a и b?
1) $a = 0$, $b = 1$; 3) $a = -1$, $b = 1$;
2) $a = 0$, $b = 0$; 4) $a = 1$, $b = -1$.

2. Найдите значение выражения $\cos\frac{\pi}{3} : \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.
1) 0,5; 2) $0{,}5\sqrt{3}$; 3) 1; 4) 1,5.

3. Углом какой четверти является угол α, если $\cos\alpha > 0$, а $\operatorname{ctg}\alpha < 0$?
1) I; 2) II; 3) III; 4) IV.

4. Найдите наименьшее значение выражения $3\sin\alpha - 2$.
1) -7; 2) -5; 3) -3; 4) -1.

5. Какое из данных чисел отрицательное?
1) $\operatorname{tg}(-2)$; 2) $\sin 3$; 3) $\cos(-5)$; 4) $\operatorname{ctg} 2$.

6. Какому из данных чисел может быть равно значение $\cos\alpha$?
1) $0{,}5\sqrt{7}$; 2) $(0{,}7)^{-2}$; 3) $\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{7} - 1$.

Вариант 2

1. Известно, что $a = \sin 180°$ и $b = \cos 360°$. В каком из вариантов ответа дана верная информация о значениях a и b?
1) $a = 0$, $b = 1$; 3) $a = 1$, $b = -1$;
2) $a = -1$, $b = 0$; 4) $a = 1$, $b = 0$.

2. Найдите значение выражения $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{4}$.
1) 0,5; 2) $0{,}5\sqrt{3}$; 3) 1; 4) 1,5.

3. Углом какой четверти является угол a, если $\cos\alpha > 0$, а $\sin\alpha < 0$?
1) I; 2) II; 3) III; 4) IV.

4. Найдите наибольшее значение выражения $1{,}5 - 1{,}5\sin\alpha$.
1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

5. Какое из данных чисел положительное?
1) $\operatorname{ctg} 5$; 2) $\sin(-4)$; 3) $\operatorname{tg} 3$; 4) $\cos(-2)$.

6. Какому из данных чисел может быть равно значение $\sin\alpha$?
1) $(0{,}6)^{-2}$; 2) $0{,}6\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{10} - \sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

ТЕСТ 11

Основные тригонометрические тождества (п. 46—53)

Вариант 1

1. Упростите выражение $\sin^2\alpha \cdot (1 + \mathrm{ctg}^2\alpha)$.
1) $\mathrm{tg}^2\alpha$; 2) 1; 3) $\sin^4\alpha$; 4) $\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$.

2. Найдите значение выражения $4\sin^2\frac{\pi}{9} + 4\cos^2\frac{\pi}{9} - 4$.

1) 2; 2) 8; 3) 4; 4) 0.

3. В каком варианте ответа указанные числа являются соответственно значениями $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$?

1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}$.

4. Найдите значение $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

1) $-\frac{8}{15}$; 2) $\frac{15}{17}$; 3) $-\frac{15}{8}$; 4) $\frac{8}{15}$.

5. Найдите наибольшее значение выражения $\sin^2\alpha + (\cos\alpha - 1)^2$.
1) 4; 2) 8; 3) 5; 4) 6.

6. Упростите выражение $\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\alpha}$, если известно, что $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$?

1) $\mathrm{tg}\,\alpha - \sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$; 3) $\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha$;
2) $\sin\alpha$; 4) $-\sin\alpha$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $\mathrm{ctg}^2\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$.
1) $2\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha$; 3) 0; 4) 1.

2. Найдите значение выражения $2 + 2\sin^2\frac{\pi}{11} + 2\cos^2\frac{\pi}{11}$.

1) 6; 2) 2; 3) 4; 4) 0.

3. В каком варианте ответа указанные числа являются соответственно значениями $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$?

1) $\frac{5}{13}; \frac{8}{13}$; 2) $\frac{8}{13}; \frac{13}{8}$; 3) $\frac{8}{13}; -\frac{12}{13}$; 4) $\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}$.

4. Найдите значение $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

1) $-\frac{3}{5}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $-\frac{4}{5}$; 4) $\frac{4}{5}$.

5. Найдите наибольшее значение выражения $\cos^2\alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) - 2\sin\alpha$.
1) -1; 2) 5; 3) 3; 4) -2.

6. Упростите выражение $\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$, если известно, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$?

1) $-\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 4) $1 - \frac{1}{\cos\alpha}$.

ТЕСТ 12

Формулы сложения и их следствия (п. 54—56)

Вариант 1

1. Известно, что $a = \cos(\pi + \alpha)$ и $b = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$. В каком из вариантов ответа дана верная информация о значениях a и b?
1) $a = -\cos\alpha$, $b = \operatorname{tg}\alpha$; 3) $a = -\sin\alpha$, $b = \operatorname{ctg}\alpha$;
2) $a = \sin\alpha$, $b = -\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $a = -\cos\alpha$, $b = -\operatorname{tg}\alpha$.

2. Найдите значение выражения $\cos 128° \cdot \cos 52° - \sin 128° \cdot \sin 52°$.
1) -1; 2) 0; 3) $-0{,}5$; 4) 1.

3. Упростите выражение $\sin 5\alpha \cos\alpha - \cos 5\alpha \sin\alpha$.
1) $\cos 6\alpha$; 2) $\sin 6\alpha$; 3) $\cos 4\alpha$; 4) $\sin 4\alpha$.

4. Упростите выражение $\sin(\alpha - 3\beta) + \sin(\alpha + 3\beta)$.
1) $2\sin\alpha\cos 3\beta$; 3) $2\sin\alpha\sin 3\beta$;
2) $2\cos\alpha\cos 3\beta$; 4) $2\cos\alpha\sin 3\beta$.

5. Найдите значение выражения $\cos 120° \cdot \operatorname{ctg} 150°$.

1) $-0{,}5$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Найдите $\cos(\alpha + \beta)$, если известно, что $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, причём $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

1) $-\frac{7}{25}$; 2) 1; 3) 0; 4) $\frac{7}{25}$.

Вариант 2

1. Известно, что $a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ и $b = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$. В каком из вариантов ответа дана верная информация о значениях a и b?
1) $a = \sin\alpha$, $b = \operatorname{ctg}\alpha$; 3) $a = -\cos\alpha$, $b = \operatorname{tg}\alpha$;
2) $a = \cos\alpha$, $b = -\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $a = -\sin\alpha$, $b = -\operatorname{ctg}\alpha$.

2. Найдите значение выражения $\sin 144^\circ \cdot \cos 54^\circ - \cos 144^\circ \cdot \sin 54^\circ$.
1) -1; 2) 0; 3) 0,5; 4) 1.

3. Упростите выражение $\sin 5\alpha \sin\alpha + \cos 5\alpha \cos\alpha$.
1) $\sin 4\alpha$; 2) $\cos 6\alpha$; 3) $\sin 6\alpha$; 4) $\cos 4\alpha$.

4. Упростите выражение $\cos(3\alpha - \beta) - \cos(3\alpha + \beta)$.
1) $2\cos 3\alpha \cos\beta$; 3) $2\sin 3\alpha \cos\beta$;
2) $2\sin 3\alpha \sin\beta$; 4) $2\cos 3\alpha \sin\beta$.

5. Найдите значение выражения $\frac{\cos 210^\circ}{\sin 150^\circ}$.

1) $-\sqrt{3}$; 2) -1; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Найдите $\sin(\alpha + \beta)$, если известно, что $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos\beta = -\frac{15}{17}$, причём $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

1) $\frac{240}{289}$; 2) -1; 3) $-\frac{161}{289}$; 4) 0.

ТЕСТ 13

Формулы сложения и их следствия (п. 54—56)

Вариант 1

1. Упростите выражение $\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}$.

1) $\sin 3\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\frac{1}{2}\sin 3\alpha$; 4) $2\sin 3\alpha$.

2. Известно, что $a = \sin 155^\circ - \sin 65^\circ$. В каком из вариантов ответа дана верная информация?
1) $a = \sqrt{2}\sin 115^\circ$; 3) $a = \sin 90^\circ$;
2) $a = \sqrt{2}\cos 110^\circ$; 4) $a = \sqrt{2}\sin 220^\circ$.

3. Упростите выражение $\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha$.

1) 0; 2) $2\cos^2 \alpha$; 3) 1; 4) $\cos^2 \alpha$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{\cos 70^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 10^\circ}$.

1) 1; 2) $-0{,}5$; 3) -1; 4) 2.

5. Найдите значение $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \dfrac{8}{17}$.

1) $\dfrac{16}{17}$; 2) $-\dfrac{161}{289}$; 3) $-\dfrac{7}{17}$; 4) $\dfrac{161}{289}$.

6. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{1 - \sin 2\alpha}}{\cos \alpha - \sin \alpha}$, если известно, что $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

1) $-\sin \alpha \cos \alpha$; 2) $\cos \alpha \sin \alpha$; 3) -1; 4) 1.

Вариант 2

1. Упростите выражение $\cos^2 \dfrac{\alpha}{4} - \sin^2 \dfrac{\alpha}{4}$.

1) $\cos \dfrac{\alpha}{2}$; 2) 1; 3) $\cos \dfrac{\alpha}{8}$; 4) $\cos \dfrac{\alpha}{2}$.

2. Известно, что $a = \cos 145^\circ + \cos 55^\circ$. В каком из вариантов ответа дана верная информация?

1) $a = \sqrt{2} \cos 100^\circ$; 3) $a = \sqrt{2} \cos 200^\circ$;
2) $a = \sin 100^\circ$; 4) $a = \cos 200^\circ$.

3. Упростите выражение $\dfrac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha}$.

1) $\operatorname{tg} \alpha$; 2) $\sin \alpha$; 3) 1; 4) $\dfrac{1}{2} \sin \alpha$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 20^\circ}$.

1) -1; 2) 2; 3) 1; 4) 0,5.

5. Найдите значение $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = -\dfrac{8}{17}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

1) $-\dfrac{16}{17}$; 2) $-\dfrac{120}{289}$; 3) $\dfrac{161}{289}$; 4) $-\dfrac{240}{289}$.

6. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{\cos 2\alpha + 1}}{\sqrt{2} \cos \alpha}$, если известно, что $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1) $\cos \alpha$; 2) -1; 3) 1; 4) $-\operatorname{tg} \alpha$.

КОММЕНТАРИЙ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Дидактические материалы написаны в соответствии с содержанием учебника «Алгебра 9» Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова и И. Е. Феоктистова, М., «Мнемозина». Каждому параграфу учебника соответствует одна, в некоторых случаях две самостоятельные работы, каждой главе учебника — одна контрольная работа. Все работы рассчитаны на один урок (40—45 минут). Материал в каждой работе распределён в основном по возрастанию степени трудности, хотя это распределение носит условный характер.

Самостоятельные работы носят контролирующий и, даже в большей степени, обучающий характер. Этому должны, по мнению автора, способствовать ещё и основные теоретические сведения, приводимые перед заданиями подготовительного варианта. При выполнении учащимися самостоятельной работы предполагается использование любой справочной литературы (учебник, рабочая тетрадь и др.), в том числе и решённого дома подготовительного варианта. Контрольные работы носят исключительно контролирующий характер и не предполагают использования каких-либо справочных материалов.

Теоретические сведения, приводимые перед подготовительным вариантом самостоятельной работы, помогут не только учащимся прочнее усвоить основное содержание учебника, но и дадут возможность учителям, работающим по другим учебникам, легче сориентироваться в содержании предлагаемых самостоятельных и контрольных работ.

Некоторые задания самостоятельных работ выходят за рамки учебника Ю. Н. Макарычева, тем не менее, весьма близко примыкая и логически продолжая изложенный в учебнике материал. Поэтому в теоретических сведениях приводятся соответствующие определения, алгоритмы решения задач и минимальные пояснения. Эти задания вместе с соответствующей теорией целесообразно рассмотреть на уроках, предшествующих проведению самостоятельной работы.

Расширение рамок учебника связано не столько с желанием автора «договорить» теоретический материал до логического завершения, что в принципе невозможно в силу возрастных особенностей учащихся, сколько с попыткой немного разгрузить материал 10—11-го профильных классов. Однако в случае недостатка времени или по каким-либо другим причинам этот материал можно не рассматривать, а сами задания контрольных или самостоятельных работ можно исключить или заменить.

Количество упражнений самостоятельных и контрольных работ избыточно. Используемый автором принцип избыточности контрольных и самостоятельных работ — это не только попытка охватить в работе как можно больше различных упражнений, «объять необъятное». Здесь присутствует и общая тенденция укрупнения контрольных работ. Кроме того, учителю значительно проще удалить из текста то или иное задание, нежели додумывать недостающее.

Принцип избыточности контрольных и самостоятельных работ имеет и ещё одну важную причину. Предполагается, что учитель будет предлагать учащимся *все задания*, но критерий выставления оценки будет таким, чтобы у учащихся один или, может быть, два упражнения оказались «лишними», дополнительными — за их выполнение предполагается выставление дополнительной оценки (по желанию учащихся). Подобная практика предлагать учащимся выбирать свой «обязательный» минимальный уровень даёт возможность учащемуся при выполнении работы ответить на вопрос, какой материал он усвоил лучше. Кроме того, дополнительное упражнение в контрольной или самостоятельной работе для сильных учащихся является «запасным парашютом» на случай какой-либо ошибки или описки — учитель вместо упражнения, в котором допущена ошибка, может засчитать дополнительное упражнение.

Наличие дополнительных упражнений и предлагаемая система оценивания контрольных и самостоятельных работ создают благоприятную в психологическом отношении обстановку во время проведения этих работ, что также немаловажно.

Перед началом самостоятельной или контрольной работы учитель должен объявить (а лучше — записать) критерий оценки и напомнить, что последнее задание — вовсе не самое сложное (в действительности часто так и есть!). Это позволит учащимся сознательно подойти к выбору «собственного обязательного минимума», что само по себе является серьёзной мыслительной работой (оценка своих возможностей и свой собственный выбор — это всегда непросто!). Практика показывает, что дополнительное задание, не являясь обязательным, часто вызывает у учащихся даже больший интерес, нежели задания, проверяющие обязательный уровень знаний, умений и навыков. И здесь следует также предостеречь учащихся: они могут за урок решить лишь два последних, два самых трудных и интересных упражнения, но при этом получат за работу неудовлетворительную отметку — не набрали нужного для положительной оценки количества баллов!

Несколько слов об оценке за письменную работу в математическом классе. Оценка «удовлетворительно» для учащихся общеобразовательного и для учащихся математического класса должна быть равноценной. На практике этого не происходит. Ученику математического класса для получения «тройки» приходится выполнять значительно больше заданий, причём куда более высокого качества. По мнению автора, «удовлетворительно» должен получить ученик, выполнивший «общеобразовательную» составляющую письменной работы. Однако автор этой книжки не в состоянии преодолеть сложившиеся за последние 30—40 лет «оценочные ножницы»; «удовлетворительно» в представленных работах получилось несколько выше, чем в работах для общеобразовательных классов.

Контрольные работы носят исключительно контролирующий характер: при их выполнении учащимся нельзя пользоваться никакими справочными материалами, в том числе решённым дома подготовительным вариантом. Несмотря на то, что в программе по математике есть темы, связанные с вычислениями на калькуляторе, автор (по целому ряду причин) считает, что использование калькуляторов во время проведения контрольной или самостоятельной работы (как и вообще на уроке математики, может быть, за редким-редким исключением) нецелесообразно и даже вредно.

Для того чтобы учитель мог правильно расставить некоторые акценты в преподавании алгебры в 9 классе с повышенным уровнем математической подготовки, необходимо кратко прокомментировать содержание заданий самостоятельных и контрольных работ.

Самостоятельная работа № 1. К общеобразовательной части работы можно отнести только упражнение № 3 (определить характер монотонности некоторых функций). В 10—11 классе учащимся общеобразовательного класса будет предложено и упражнение № 6 (задать формулой композицию двух функций). Также в старших классах учащиеся будут решать задачу № 4 (определить характер монотонности функции) и № 5 (решить уравнение, используя монотонность функции), но уже после изучения производной. Остальные задания предназначены для учащихся математического класса. Критерий оценивания работы: «пять» за шесть упражнений, «три» — за три упражнения.

Самостоятельная работа № 2. Упражнения № 1 и 3 можно отнести к общеобразовательной составляющей, поскольку речь идёт об изучаемом в обычных классах свойстве функций (чётность-нечётность). Об ограниченности функций в общеобразовательных классах не рассказывают, и потому упражнения № 2, № 4 и № 5 ученикам таких классов будут совершенно незнакомы. Упражнения № 6 и 7 апеллируют к чётности-нечётности функции, но для общеобразовательного класса будут слишком сложны. Критерий оценивания: «пять» за шесть упражнений, «три» — три упражнения.

Самостоятельная работа № 3. Бóльшая часть упражнений рассчитана на учащихся общеобразовательного класса. Эти упражнения позволяют закрепить основные умения и навыки, связанные с построением графика квадратичной функции. Упражнение № 1 — закрепление формулы для вычисления вершины параболы и её оси симметрии; № 2 — понимание того, что если парабола проходит через заданные точки, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению, задающему данную функцию. Главная идея упражнения № 3 — умение «двигать» параболу вправо-влево и вверх-вниз (при условии, что параболу $y = x^2$ учащиеся умеют строить с 7 класса). Упражнение № 5 — построение графика квадратичной функции по пяти точкам. Упражнения № 4 (с параметром), № 6 (система из трёх уравнений с тремя неизвестными), № 7 (пересечение двух парабол) и № 8 (парабола как геометрическое место точек) превышают базовый уровень. Критерий оценивания: «пять» за семь упражнений, «три» — за четыре.

Самостоятельная работа № 4. Все задания превышают базовый уровень изучения математики и не рассматриваются в 9 общеобразовательном классе. Некоторые преобразования графиков функции рассматриваются в старших классах. Упражнение № 1 проверяет понимание того, что происходит с областью определения и областью значений данной функции при выполнении тех или иных преобразований функции. Упражнение № 2 проверяет умение из графика линейной функции $f(x) = ax + b$ получать графики функций $y = f(-x)$, $y = f(kx)$, $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$. Упражнение № 3 проверяет те же навыки, но для квадратичной функции, а упражнение № 4 — для дробно-линейной функции. Упражнение № 5 — типичное уравнение с параметром, опирающееся на построение графика функции. Критерий оценивания: «пять» за четыре упражнения, «три» — за два упражнения.

Контрольная работа № 1. Работа рассчитана на учащихся 9 класса с расширенным изучением математики. Все упражнения превышают базовый уровень изучения математики. Упражнение № 1 — исследование функции на чётность-нечётность. Упражнение № 2 проверяет представления учащихся о графике квадратичной функции. Упражнение № 3 использует выделение квадрата двучлена из квадратного трёхчлена (пункт а)) для определения наибольшего или наименьшего значения квадратичной функции, а также решение квадратного уравнения с параметром (пункт б)) для определения области значений данной функции. Упражнение № 4 — построение графика квадратичной функции (а перед этим — решение небольшой задачи с параметром). Упражнение № 5 — чтение графика квадратичной функции. Упражнение № 6 — исследование графика функции, содержащей переменную под знаком модуля. Упражнение № 7 — графическое решение дробно-рационального уравнения с переменной под знаком модуля в зависимости от параметра. Критерии оценивания: «пять» за шесть упражнений, «три» — за три упражнения.

Самостоятельная работа № 5. Из всех упражнений доступными для учащихся общеобразовательного класса являются № 1 (биквадратные уравнения знакомы учащимся ещё с 8 класса) и упражнение № 2, апеллирующее к понятию корня уравнения и к решению уравнений разложением на множители. В упражнении № 3 требуется решить уравнение графическим способом, а график дробно-линейной функции учащимся общеобразовательного класса не известен. При решении уравнения из упражнения № 4 учащиеся должны использовать монотонность функций, что в общеобразовательном классе почти никогда не используется. Уравнение из упражнения № 5 а) решается вполне очевидной заменой переменной, что, в общем-то, доступно сильным учащимся общеобразовательного класса. Уравнение из упражнения № 5 б) — симметрическое уравнение. Это уравнение — для учащихся математического класса. Уравнение из упражнения № 6 а) решается методом неопределённых коэффициентов — этот метод и в математическом классе воспринимается учащимися достаточно сложно. И самое сложное — дробно-рациональное уравнение из упражнения № 6 б). Критерий оценивания: «пять» выставляется за пять заданий, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 6. Содержание работы, кроме упражнения № 1 б) и № 5, не превышает базовый уровень. При этом в упражнении № 1 требуется решить одно и то же неравенство тремя различными способами, один из которых учащиеся общеобразовательных классов не знают (речь идёт о сведении квадратного неравенства к совокупности двух систем — метод решения не сложный, но учащимся он незнаком). В упражнении № 6 речь идёт о вычислении суммы всех целых решений дробно-рационального неравенства. Здесь базовый уровень превышается дополнительным требованием вычислить сумму целых решений неравенства. И даже дополнительное упражнение не превышает базовый уровень — трудность только в том, чтобы правильно понять условие. Критерий оценивания: «пять» за шесть упражнений, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 7. Работа рассчитана на учащихся 9 класса с расширенным изучением математики. Первое упражнение посвящено геометрическому смыслу модуля (расстояние между точками координатной прямой) и может быть рассмотрено с учащимися старших классов или с учениками 9-го класса на факультативе. Упражнение № 2 посвящено простейшим уравнениям, содержащим переменную под знаком модуля. Упражнение № 3 (решение уравнения заменой переменной) также может быть предложено и учащимся общеобразовательного класса. Упражнение № 4 содержит уравнение вида $|f(x)| = a$, где a — положительное число. Его решение доступно сильным учащимся общеобразовательного класса, проявляющим повышенный интерес к математике. № 5 — графический метод решения уравнений. № 6 — уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$, простейшие варианты которого встречались в 7—8 классах с расширенным изучением математики. Остальные упражнения значительно сложнее и могут быть предложены учащимся, имеющим опыт работы с подобными уравнениями. Критерий оценивания: «пять» выставляется за восемь упражнений, «три» — за четыре.

Самостоятельная работа № 8. Все упражнения работы превышают базовый уровень. Однако упражнение № 1, апеллирующее к геометрическому смыслу модуля числа, вполне доступно для понимания учащимися общеобразовательного класса. Упражнение № 2 является простейшим неравенством с модулем и может быть предложено сильным учащимся общеобразовательного класса. Неравенство из упражнения № 3 сводится к квадратному неравенству заменой переменной. № 4 — двойное неравенство с модулем, № 5 — графический способ решения неравенств — эти упражнения ещё могут быть доступны сильным учащимся общеобразовательного класса. Все остальные упражнения уже достаточно сложны и для решения требуют специальной подготовки. Критерий оценивания: «пять» за семь упражнений, «три» — за четыре упражнения.

Самостоятельная работа № 9. Содержание работы превышает базовый уровень обучения математике и предназначен для учащихся математического класса. Упражнение № 1 — линейное уравнение с параметром, которое при различных значениях параметра либо не имеет корней, либо имеет бесконечное множество корней, либо имеет единственный корень. Упражнение № 2 — линейное уравнение, которое в добавление к предыдущим случаям может не иметь смысла при определённых значениях параметра. Упражнение № 3 — квадратное уравнение с параметром, корни которого выражаются через параметр. Упражнение № 4 — уравнение, которое может быть при определённых значениях параметра квадратным, а может быть линейным. Упражнение № 5 посвящено дробно-рациональному уравнению с определёнными ограничениями, накладываемыми на нули числителя, выражающиеся через параметр. Упражнение № 6 — решение дробно-рационального уравнения с параметром. В упражнении № 7 требуется составить уравнение касательной к графику квадратичной функции, составив и решив уравнение с параметром. Критерий оценивания: «пять» ставится за шесть упражнений, «три» — за три.

Контрольная работа № 2. Работа рассчитана на учащихся 9 класса с повышенным уровнем математической подготовки. Упражнения работы охватывают объёмный материал. Упражнение № 1 содержит в себе разложение квадратного трёхчлена на множители и решение дробно-рациональных неравенств методом интервалов. Упражнение № 2 — решение дробно-рационального уравнения, содержащего переменную под знаком модуля, с помощью замены переменной. В упражнении № 3 требуется составить систему неравенств, одно из которых является неравенством второй степени, а второе — неравенство с переменной под знаком модуля. Упражнение № 4 (целое уравнение четвёртой степени) решается разложением на множители методом неопределённых коэффициентов. Упражнение № 5 — дробно-рациональное неравенство с переменной под знаком модуля, решение которого разбивается на два случая. Упражнение № 6 — дробно-рациональное уравнение с параметром. Критерий оценивания: «пять» ставится за пять упражнений, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 10. Упражнения № 1 и № 3 доступны учащимся общеобразовательного класса. В первом из них требуется выяснить, является ли данная пара чисел решением уравнения с двумя переменными или системы уравнений с двумя переменными. Отличие этого упражнения от похожих задач курса алгебры 7 — 8 классов только в том, что в этой работе предлагаются уравнения второй степени, а не первой. В упражнении № 3 требуется решить системы уравнений с двумя переменными, причём в пункте а) возможен способ подстановки, а в пункте б) вместо способа подстановки (который здесь тоже возможен) удобнее воспользоваться способом сложения (сложить первое уравнение со вторым уравнением, умноженным на 2). Упражнение № 2 — построение графика уравнения второй степени с двумя переменными, из которых учащимся общеобразовательного класса будет знакомо уравнение окружности (пункт а)). Упражнение № 4 требует доказать, что система несовместна. В упражнении № 5 нужно построить графики уравнений с двумя переменными и найти число решений системы. Смысл задания понятен учащимся общеобразовательного класса, но построить графики уравнений учащиеся без специальной подготовки не смогут. Упражнение № 6 — задача с параметром — нужно графически решить систему уравнений с двумя переменными. Критерий оценивания: «пять» выставляется за шесть заданий, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 11. Упражнения № 1 и 2 доступны сильным учащимся общеобразовательного класса. В первом упражнении применяется необычная замена — первое уравнение является подстановкой для второго. В упражнении № 2 не нужно находить значение переменной, поскольку после преобразования первого уравнения и подстановки второго уравнения сразу получается требуемый ответ. Упражнение № 3 — система двух уравнений, решаемых заменой с элементарными симметрическими многочленами. Упражнение № 4 — текстовая задача, которую могут решить сильные учащиеся обычного класса. Упражнение № 5 содержит две системы, в одной из которых есть однородное уравнение второй степени, а вторая система приводится к системе, содержащей однородное уравнение. Эти системы можно предлагать учащимся, имеющим специальную математическую подготовку. Упражнение № 6 — задача с параметром, которая решается графически. Критерий оценивания: «пять» выставляется за пять заданий, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 12. Из всех упражнений учащимся общеобразовательного класса доступно лишь упражнение № 1, в котором нужно выяснить, является ли данная пара чисел решением неравенства с двумя переменными или решением системы неравенств с двумя переменными. Остальные упражнения предназначены для учащихся класса с расширенным изучением математики. В упражнении № 2 требуется выяснить, пересекает ли данный отрезок прямую, разделяющую плоскость на две полуплоскости. В упражнении № 3 требуется изобразить множество решений неравенства. В упражнении № 4 нужно задать системой неравенств треугольник с вершинами в данных точках. Упражнение № 5 — вычисление площади фигуры, задаваемой системой неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. Упражнение № 6 — задача с параметром. Критерий оценивания: «пять» выставляется за пять заданий, «три» — за три.

Контрольная работа № 3. Решение систем из упражнений № 1 и № 3 доступно учащимся общеобразовательного класса. Сильным учащимся можно предложить решить текстовую задачу (упражнение № 4). Остальные упражнения, связанные либо с системой неравенств с двумя переменными (упражнения № 2 и № 5), либо с достаточно сложной системой двух уравнений второй степени с двумя переменными (упражнение № 6), рассчитаны на учащихся класса с углублённым изучением математики. Критерий оценивания: «пять» за пять заданий, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 13. Для учащихся общеобразовательного класса доступны упражнения № 1 и № 2 а). В первом из упражнений нужно выяснить, является ли данное число членом последовательности, заданной формулой n-го члена. В упражнении № 2 а) учащиеся по формуле должны найти первые пять членов последовательности. В пункте б) упражнения № 2 учащиеся должны методом математической индукции доказать формулу n-го члена последовательности, заданной рекуррентной формулой. В упражнении № 3 нужно определить характер монотонности, а в упражнении № 4 — ограниченность последовательности, заданной формулой n-го члена. Упражнения № 5 и № 6 — доказательство методом математической индукции. Критерий оценивания: «пять» выставляется за пять заданий, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 14. Поскольку тема «Арифметическая прогрессия» является обязательной для учащихся 9 класса любого профиля, то в этой работе бóльшая часть упражнений доступна учащимся общеобразовательного класса. Исключение составляет упражнение № 8, в котором учащиеся должны исследовать квадратичную функцию на экстремумы. Причём функция целочисленного аргумента достигает одного из экстремумов сразу в двух точках. Упражнения № 1, 3, 4 и 6 проверяют знания, умения и навыки решения задач по теме «Формула n-го члена арифметической прогрессии», а упражнения № 2, 7 и 8 — по теме «Сумма первых n членов арифметической прогрессии». Упражнение № 5 проверяет знание характеристического свойства арифметической прогрессии. Критерий оценивания: «пять» выставляется за семь заданий, «три» — за четыре.

Самостоятельная работа № 15. Содержание работы посвящено теме, обязательной для изучения в классах любого профиля. Потому бóльшая часть упражнений рассчитана на всех учащихся. Исключение составляют, может быть, упражнения № 2 (изображение членов последовательности в координатной плоскости) и № 7 (сложные проценты). Но, несмотря на вполне понятное условие, учащимся без специальной подготовки будет непросто решить упражнения № 5 и № 6. Критерии оценивания: «пять» за шесть заданий, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 16. Все упражнения работы, кроме упражнения № 1, рассчитаны на учащихся 9 класса с повышенным уровнем математической подготовки. Упражнение № 1 — умение представлять бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби с помощью бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Этой же теме посвящены упражнения № 3 и № 7, но они значительно сложнее упражнений, предназначенных для учащихся обычного класса. В упражнениях № 2, 4 и 6 требуется вычислить предел последовательности, причём уровень этих упражнений явно превышает уровень упражнений, предложенных в учебнике. Поэтому перед тем, как давать эти задачи, целесообразно вместе с классом рассмотреть методы вычисления пределов последовательностей. Упражнение № 5 — закрепление определения предела последовательности. Критерий оценивания: «пять» выставляется за шесть заданий, «три» — за три.

Контрольная работа № 4. Вся работа рассчитана на учащихся 9 класса с расширенным изучением математики. Исключение составляет упражнение № 1 — запись обыкновенной дроби в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Упражнение № 2 — вычисление пределов последовательности в простейших случаях. В упражнении № 3 требуется доказать, что данная последовательность является возрастающей или убывающей, а также ограниченной. Упражнение № 4 — задача на наибольшее и наименьшее значение. Упражнение № 5 — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия. Упражнение № 6 — смешанная задача на арифметическую и геометрическую прогрессии. Критерий оценивания: «пять» ставится за пять заданий, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 17. Несмотря на то, что взаимно обратные функции не изучаются в курсе математики для общеобразовательных классов, упражнение № 3 а), б) доступно учащимся класса не математического профиля (при условии, что учащимся известно определение корня n-ой степени). Остальные упражнения рассчитаны на учащихся 9 класса с расширенным изучением математики. Упражнение № 1 — связь между областью определения и областью значений взаимно обратных функций. № 2 — умение задать формулой функцию, взаимно обратную данной. Упражнение № 4 закрепляет свойства графиков взаимно обратных функций. В упражнении № 5 необходимо знать графики степенной функции с натуральным показателем и графики им обратных функций, и исходя из этого решать простейшие уравнения. Упражнение № 6 — уравнение с параметром, упражнение № 7 — чуть усложнённое упражнение № 3 б). Критерии оценивания: «пять» выставляется за шесть заданий, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 18. Упражнения № 1 и № 2 — вычисления, использующие корень n-ой степени и степень с дробным показателем. Упражнения № 3 и № 4 — упрощение выражений, содержащих корни n-ой степени. Упражнение № 5 использует представления учащихся о графиках степенных функций с дробными показателями степеней. № 6 — решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям. № 7 и № 8 — вычисления, содержащие корни n-ой степени. В упражнении № 9 требуется сравнить сумму кубических корней из разных чисел с кубическим корнем из третьего числа. Несмотря на то, что в работе предлагается девять упражнений, оценку «пять» можно выставлять за семь упражнений, «три» — всего за три упражнения.

Самостоятельная работа № 19. Все упражнения работы выходят за рамки программы по математике для 9 класса. Изучение этой темы проходит в 10 или 11 общеобразовательном классе. Упражнение № 1 содержит четыре уравнения, в которых проверяются знания учащимися определений арифметического корня n-ой степени и степени с дробным показателем. Упражнения № 2 и № 3 — типичные иррациональные уравнения.

В упражнении № 4 предлагается решить не очень сложное иррациональное неравенство. В последнем упражнении необходимо доказать, что данные иррациональные уравнения не имеют корней. Критерии оценивания: «пять» выставляется за четыре упражнения, «три» — за два.

Контрольная работа № 5. Работа рассчитана на учащихся 9 класса с повышенным уровнем математической подготовки. Упражнение № 1 содержит простейшие преобразования выражений, содержащих корни n-ой степени и степени с дробным показателем. В упражнении № 2 используется определение степени с рациональным показателем и условие равенства двух иррациональных чисел, содержащих корни. Упражнение № 3 — простейшее преобразование выражений, содержащих корни n-ой степени и степени с дробным показателем. Упражнение № 4 — сокращение дробей, числители и знаменатели которых содержат корни n-ой степени и степени с дробным показателем. Упражнение № 5 — сравнение чисел, содержащих корни n-ой степени. Упражнение № 6 — упрощение более сложного выражения, содержащего корни n-ой степени и степени с дробным показателем. Упражнение № 7 — уравнение, содержащее переменную под знаком радикала. Критерии оценивания: «пять» выставляется за шесть упражнений, «три» — за три упражнения.

Самостоятельная работа № 20. Тригонометрия не входит в программу 9 общеобразовательного класса. Поэтому весь материал работы обращён к учащимся математического класса. В 10 или 11 классе не математического профиля большинство из этих задач учащиеся смогут решить. Упражнение № 1 проверяет умения учащихся определять, к какой четверти относится угол поворота начального радиуса, выраженный в градусной или радианной мере. Упражнение № 2 — перевод из градусной меры в радианную, упражнение № 3 — перевод из радианной меры в градусную. Упражнения № 4 и № 5 — умение «увидеть» значения тригонометрических функций на линии синусов, линии косинусов, линии тангенсов и линии котангенсов. Упражнение № 6 — вычисление значений тригонометрических выражений для основных углов. Упражнение № 7 — умение вычислять наибольшее и наименьшее значения простых тригонометрических выражений, опирающееся на знание области значения синуса и косинуса. № 8 — пропедевтика решения тригонометрических уравнений. Критерии оценивания: «пять» выставляется за семь упражнений, «три» — за четыре упражнения.

Самостоятельная работа № 21. Работа рассчитана на учащихся математического класса. Упражнение № 1 — вычисление значений тригонометрических выражений, использующее чётность-нечётность тригонометрических функций. Упражнения № 2 и № 4 — знание знаков тригонометрических функций в координатных четвертях. Упражнение № 3 — исследование на чётность-нечётность функций. Упражнение № 5 — исследование функции на наибольшее и наименьшее значение. Упражнение № 6 — вычисление основного периода функции. Упражнение № 7 — нули тригонометрических функций, № 8 — непривычное тригонометрическое неравенство. Критерий оценивания: «пять» выставляется за семь упражнений, «три» — за четыре.

Самостоятельная работа № 22. Все упражнения работы предназначены для учащихся 9 класса с повышенным уровнем математической подготовки или для учащихся старшего класса любого профиля. Упражнение № 1 — формулы приведения к функции угла первой четверти. Упражнения № 2 и № 4 предполагают использование основных тригонометрических формул. В упражнении № 3 нужно вычислить значения основных тригонометрических функций по данному значению одной из них и четверти, которой принадлежит данный угол (с использованием основных тригонометрических формул). Упражнения № 5 и № 7 — вычисление значений тригонометрических выражений с использованием формул приведения и основных тригонометрических тождеств. Упражнение № 6 апеллирует к формуле $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, хотя может быть решено и другим способом. В упражнении № 8 требуется вычислить значение тригонометрического выражения, зная не значение одной из тригонометрических функций, а сумму значений синуса и косинуса одного и того же аргумента (с использованием симметрических многочленов и основного тригонометрического тождества). Критерии оценивания: «пять» выставляется за семь упражнений, «три» — за четыре.

Самостоятельная работа № 23. Все упражнения рассчитаны на учащихся 9 класса с углублённым изучением математики или учащихся старших классов любого профиля. Упражнение № 1 апеллирует к формулам сложения (пункт а)) и к формулам двойного аргумента (пункт б)). В упражнении № 2 нужно упростить выражение, используя формулы суммы или разности тригонометрических функций. Упражнение № 3 — вычисление значений тригонометрических функций с использованием формул сложения. Упражнение № 4 — вычисление значений тригонометрических функций с помощью формул сложения и формул двойного или половинного аргументов. Упражнение № 5 — упрощение тригонометрических выражений с использованием формул приведения и формул суммы тригонометрических функций. В упражнении № 6 нужно доказать тождество, используя при этом формулы сложения. В упражнении № 7 требуется вычислить произведение значений тригонометрических функций, используя специальный приём — умножение и деление произведения на одно и то же отличное от нуля число. Упражнение № 8 — вычисление наибольшего и наименьшего значения выражения вида $A\cos\alpha + B\sin\alpha$ введением вспомогательного аргумента. Критерии оценивания: «пять» выставляется за семь упражнений, «три» — за четыре упражнения.

Контрольная работа № 6. Все упражнения предназначены для учащихся 9 класса с повышенным уровнем математической подготовки. Упражнение № 1 — вычисление значения тригонометрического выражения, использующее помимо основных тригонометрических тождеств и знания знаков тригонометрических функций в координатных углах формулы сложения и следствия из них (формулы двойного аргумента). Упражнение № 2 — применение формул сложения тригонометрических функций. Упражнение № 3 — тождество, в доказательстве которого используются основные тригонометрические тождества, формулы приведения и формулы половинного угла. Упражнение № 4 — тождества, имеющие место в треугольнике. В упражнении № 5 требуется вычислить значение выражения, используя формулы приведения, основные тригонометрические тождества и формулы сложения. Упражнение № 6 — вычисление значений или доказательство тождеств, использующих весь спектр тригонометрических формул. Критерии оценивания: «пять» — за пять упражнений, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 24. Содержание работы соответствует базовому уровню изучения математики. Все упражнения, кроме последнего, доступны учащимся общеобразовательного класса. Упражнение № 1 проверяет знание формул для вычисления числа перестановок, числа сочетаний и числа размещений. В упражнениях № 2 и № 3 используются перестановки, № 4 и № 5 — размещения, № 6 — сочетания. Упражнение № 7 — уравнение в натуральных числах, сводящееся к кубическому уравнению. Критерий оценивания: «пять» выставляется за шесть заданий, «три» — за три.

Самостоятельная работа № 25. Все упражнения, кроме последнего упражнения, соответствуют базовому уровню изучения математики. Упражнение № 1 — классическое определение вероятности случайного события. Упражнение № 2 — определение вероятности с использованием формул комбинаторики (формулы числа перестановок). В упражнении № 3 используется определение вероятности с более сложным вариантом использования числа благоприятных исходов и числа всех возможных исходов (те же формулы перестановок). В упражнении № 4 используется умножение вероятностей. Упражнение № 5 — умножение вероятностей и вероятности противоположных событий. Упражнение № 6 — более сложный подсчёт вероятности с использованием формул числа сочетаний. Оценка «5» выставляется за пять заданий, «3» — за три.

Контрольная работа № 7. Содержание контрольной работы полностью соответствует уровню математической подготовки учащихся 9 класса базового профиля. Упражнение № 1 — задача на перестановки. Упражнения № 2, № 3 и № 5 — задачи на размещения. Упражнения № 4 и № 6 — задачи на определение вероятности. Оценка «5» выставляется за пять упражнений, «3» — за три.

При подготовке контрольных и самостоятельных работ автор черпал идеи, а иногда, крайне редко, и сами задания из следующих источников (в порядке их значимости для создания материалов):

1. *Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Нешков К. И., Феоктистов И. Е.* Алгебра. Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений. М., «Мнемозина», 2013.
2. *Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И.* Сборник задач по алгебре для 8 — 9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики. М., «Просвещение», 1992.
3. *Звавич Л. И., Рязановский А. Р.* Алгебра 9 класс. Задачник для классов с углублённым изучением математики. М., «Мнемозина», 2002.
4. *Звавич Л. И., Аверьянов Д. И., Пигарев Б. П., Трушанина Т. Н.* Задания для подготовки к письменному экзамену по математике в 9 классе. Пособие для учителя. М., «Просвещение», 1999.
5. *Ершова А. П., Голобородько В. В., Ершова А. С.* Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и геометрии для 9 класса. Разноуровневые дидактические материалы. Москва—Харьков, «Илекса» «Гимназия», 1998.
6. *Зив Б. Г., Гольдич В. А.* Дидактические материалы по алгебре для 9 класса. С.-Петербург, «ЧеРо-на-Неве», 2002.
7. *Кузнецова Л. В., Бунимович Е. А., Пигарев Б. П., Суворова С. Б.* Алгебра 9 класс. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. М., «Дрофа», 2004.

ПРИМЕРНОЕ ПОУРОЧНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Согласно федеральному базисному учебному плану для образовательных учреждений Российской Федерации на изучение математики на ступени основного общего образования отводится не менее 875 ч из расчёта 5 ч в неделю с V по IX класс. Из них на курс алгебры в VII, VIII и IX классах отводится не менее 315 ч из расчёта 3 ч в неделю. При 6-дневной учебной неделе на региональный и школьный компонент отводится по 5 ч в неделю в каждом классе. Учитывая 1 или 2 ч из регионального (регионально-национального) и (или) школьного компонента, на курс изучения алгебры на повышенном уровне в VII, VIII и IX классах можно дать 420 или 525 ч из расчёта 4 или 5 ч в неделю за все три года обучения. В этой связи предлагается два варианта планирования: вариант А — 5 уроков алгебры в неделю (расширенное изучение математики), 175 ч в год, вариант Б — 4 урока алгебры в неделю (расширенное изучение математики), 140 ч в год.

9 класс (175 ч/140 ч в год)

Тема	А	Б
Глава 1. Функции, их свойства и графики	**22**	**21**
§ 1. Свойства функций	**10**	**10**
Возрастание и убывание функций (п. 1)	2	2
Свойства монотонных функций (п. 2)	2	2
Самостоятельная работа № 1 (§ 1)	1	1
Чётные и нечётные функции (п. 3)	2	2
Ограниченные и неограниченные функции (п. 4)	2	2
Самостоятельная работа № 2 (§ 1)	1	1
§ 2. Квадратичная функция	5	5
Функции $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$ (п. 5)	2	2
График и свойства квадратичной функции (п. 6)	2	2
Самостоятельная работа № 3 (§ 2)	1	1
§ 3. Преобразования графиков функций	7	6
Растяжение и сжатие графиков функций к оси ординат (п. 7)	2	2

Продолжение таблицы

Графики функций $y = \|f(x)\|$ и $y = f(\|x\|)$ (п. 8)	2	2
Самостоятельная работа № 4 (§ 3)	1	1
Решение дополнительных упражнений к главе 1	1	–
Контрольная работа № 1 (глава 1)	1	1
Глава 2. Уравнения и неравенства с одной переменной	**29**	**26**
§ 4. Уравнения с одной переменной	9	9
Целое уравнение и его корни (п. 9)	2	2
Приёмы решения целых уравнений (п. 10)	3	3
Решение дробно-рациональных уравнений (п. 11)	3	3
Самостоятельная работа № 5 (§ 4)	1	1
§ 5. Неравенства с одной переменной	6	6
Решение целых неравенств с одной переменной (п. 12)	3	3
Решение дробно-рациональных неравенств с одной переменной (п. 13)	2	2
Самостоятельная работа № 6 (§ 5)	1	1
§ 6. Уравнения и неравенства с переменной под знаком модуля	6	6
Решение уравнений с переменной под знаком модуля (п. 14)	2	2
Самостоятельная работа № 7 (§ 6)	1	1
Решение неравенств с переменной под знаком модуля (п. 15)	2	2
Самостоятельная работа № 8 (§ 6)	1	1
§ 7. Уравнения с параметрами	8	5
Целые уравнения с параметрами (п. 16)	3	2
Дробно-рациональные уравнения с параметрами (п. 17)	2	1
Самостоятельная работа № 9 (§ 7)	1	1

Решение дополнительных упражнений к главе 2	1	–
Контрольная работа № 2 (глава 2)	1	1
Глава 3. Системы уравнений и системы неравенств с двумя переменными	**20**	**19**
§ 8. Уравнения с двумя переменными и их системы	11	11
Уравнение 2-ой степени с двумя переменными и его график (п. 18)	1	1
Система уравнений с двумя переменными (п. 19)	1	1
Решение систем уравнений с двумя переменными способом подстановки и способом сложения (п. 20)	2	2
Самостоятельная работа № 10 (§ 8)	1	1
Другие способы решения систем уравнений с двумя переменными (п. 21)	2	2
Решение задач (п. 22)	3	3
Самостоятельная работа № 11 (§ 8)	1	1
§ 9. Неравенства с двумя переменными и их системы	9	8
Линейное неравенство с двумя переменными (п. 23)	1	1
Неравенство с двумя переменными степени выше первой (п. 24)	1	1
Система неравенств с двумя переменными (п. 25)	2	2
Неравенства с двумя переменными, содержащие знак модуля (п. 26)	2	2
Самостоятельная работа № 12 (§ 9)	1	1
Решение дополнительных упражнений к главе 3	1	–
Контрольная работа № 3 (глава 3)	1	1
Глава 4. Последовательности	**26**	**19**
§ 10. Свойства последовательностей	8	4
Числовые последовательности и способы их задания (п. 27)	2	2
Возрастающие и убывающие последовательности (п. 28)	2	1

Ограниченные и неограниченные последовательности (п. 29)	1	–
Метод математической индукции (п. 30)	2	–
Самостоятельная работа № 13 (§ 10)	1	1
§ 11. Арифметическая прогрессия	5	5
Арифметическая прогрессия. Формула n-го члена арифметической прогрессии (п. 31)	2	2
Сумма первых n членов арифметической прогрессии (п. 32)	2	2
Самостоятельная работа № 14 (§ 11)	1	1
§ 12. Геометрическая прогрессия	6	6
Геометрическая прогрессия. Формула n-го члена геометрической прогрессии (п. 33)	3	3
Сумма первых n членов геометрической прогрессии (п. 34)	2	2
Самостоятельная работа № 15 (§ 12)	1	1
§ 13. Сходящиеся последовательности	7	4
Предел последовательности (п. 35)	2	–
Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии (п. 36)	2	2
Самостоятельная работа № 16 (§ 13)	1	1
Решение дополнительных упражнений к главе 4	1	–
Контрольная работа № 4 (глава 4)	1	1
Глава 5. Степени и корни	**18**	**16**
§ 14. Взаимно обратные функции	5	4
Функция, обратная данной (п. 37)	2	1
Функция, обратная степенной функции с натуральным показателем (п. 38)	2	2
Самостоятельная работа № 17 (§ 14)	1	1
§ 15. Корни n-ой степени и степени с рациональными показателями	6	6
Арифметический корень n-ой степени (п. 39)	2	2

Продолжение таблицы

Степень с рациональным показателем (п. 40)	3	3
Самостоятельная работа № 18 (§ 15)	1	1
§ 16. Иррациональные уравнения и неравенства	7	6
Решение иррациональных уравнений (п. 41)	2	2
Решение иррациональных неравенств (п. 42)	2	2
Самостоятельная работа № 19 (§ 16)	1	1
Решение дополнительных упражнений к главе 5	1	–
Контрольная работа № 5 (глава 5)	1	1
Глава 6. Тригонометрические функции и их свойства	**27**	**16**
§ 17. Тригонометрические функции	5	5
Угол поворота (п. 43)	1	1
Измерение углов поворота в радианах (п. 44)	1	1
Определение тригонометрических функций (п. 45)	2	2
Самостоятельная работа № 20 (§ 17)	1	1
§ 18. Свойства и графики тригонометрических функций	5	3
Некоторые тригонометрические тождества (п. 46)	1	1
Свойства тригонометрических функций (п. 47)	1	1
Графики и основные свойства синуса и косинуса (п. 48)	1	–
Графики и основные свойства тангенса и котангенса (п. 49)	1	–
Самостоятельная работа № 21 (§ 18)	1	1
§ 19. Основные тригонометрические формулы	8	7
Формулы приведения (п. 50)	2	2
Решение простейших тригонометрических уравнений (п. 51)	1	–
Связь между функциями одного и того же аргумента (п. 52)	2	2
Преобразование тригонометрических выражений (п. 53)	2	2

Окончание таблицы

Самостоятельная работа № 22 (§ 19)	1	1
§ 20. Формулы сложения и их следствия	9	1
Синус, косинус, тангенс и котангенс суммы и разности двух углов (п. 54)	2	–
Формулы двойного и половинного углов (п. 55)	2	–
Формулы суммы и разности тригонометрических функций (п. 56)	2	–
Самостоятельная работа № 23 (§ 20)	1	–
Решение дополнительных упражнений к главе 6	1	–
Контрольная работа № 6 (глава 6)	1	1
Глава 7. Элементы комбинаторики и теории вероятностей	**16**	**15**
§ 21. Основные понятия и формулы комбинаторики	7	7
Перестановки (п. 57)	2	2
Размещения (п. 58)	2	2
Сочетания (п. 59)	2	2
Самостоятельная работа № 24 (§ 21)	1	1
§ 22. Элементы теории вероятностей	9	8
Частота и вероятность (п. 60)	2	2
Сложение вероятностей (п. 61)	2	2
Умножение вероятностей (п. 62)	2	2
Самостоятельная работа № 25 (§ 22)	1	1
Решение дополнительных упражнений к главе 7	1	–
Контрольная работа № 7 (глава 7)	1	1
Итоговое повторение	**12**	**8**
Резерв	**5**	–

ОТВЕТЫ

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Самостоятельная работа № 1

Подготовительный вариант. **1.** а) $[12,1] = 12$, $\{12,1\} = 0,1$; б) $[-12,1] = -13$, $\{-12,1\} = 0,9$. **3.** а) убывающая; б) возрастающая; в) $y \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \searrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; г) $y \nearrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \nearrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$. **4.** а) $y \searrow$ при $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1}{2}\right]$; б) $y \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \searrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; в) $y \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$; г) $y \nearrow$ при $x \in (-\infty;-1)$ и $y \nearrow$ при $x \in (-1;\ +\infty)$. **5.** а) 4; б) -1. **6.** а) $f(g(x)) = 2\sqrt{x} - 3$, $f(g) \nearrow$ при $x \in [0;\ +\infty)$; $g(f(x)) = \sqrt{2x - 3}$, $g(f) \nearrow$ при $x \in [1,5;\ +\infty)$; б) $f(g(x)) = \dfrac{x + 2}{3x}$, $f(g) \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $f(g) \searrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; $g(f(x)) = \dfrac{6}{x - 1}$, $g(f) \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 1)$ и $g(f) \searrow$ при $x \in (1;\ +\infty)$. Вариант 1. **1.** а) $[2,8] = 2$, $\{2,8\} = 0,8$; б) $[-2,8] = -3$, $\{-2,8\} = 0,2$. **3.** а) убывающая; б) возрастающая; в) $y \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \searrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; г) $y \nearrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \nearrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$. **4.** а) $y \nearrow$ при $x \in [2,5;\ +\infty)$; б) убывающая; в) $y \nearrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \nearrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; г) $y \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 1)$ и $y \searrow$ при $x \in (1;\ +\infty)$. **5.** а) 2; б) -1. **6.** а) $f(g(x)) = 3\sqrt{x + 1} + 1$, $f(g) \nearrow$ при $x \in [-1;\ +\infty)$; $g(f(x)) = \sqrt{3x + 2}$, $g(f) \nearrow$ при $x \in \left[-\dfrac{2}{3};\ +\infty\right)$; б) $f(g(x)) = \dfrac{8}{x} + 1$, $f(g) \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $f(g) \searrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; $g(f(x)) = \dfrac{4}{2x - 1}$, $g(f) \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 0,5)$ и $g(f) \searrow$ при $x \in (0,5;\ +\infty)$. Вариант 2. **1.** а) $[1,7] = 1$, $\{1,7\} = 0,7$; б) $[-1,7] = -2$, $\{-1,7\} = 0,3$. **3.** а) убывающая; б) возрастающая; в) $y \nearrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \nearrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; г) $y \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \searrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$. **4.** а) $y \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 1]$; б) возрастающая; в) $y \nearrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \nearrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; г) $y \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 2)$ и $y \searrow$ при $x \in (2;\ +\infty)$. **5.** а) 2; б) -1. **6.** а) $f(g(x)) = 2 - 3\sqrt{x}$, $f(g) \searrow$ при $x \in [0;\ +\infty)$; $g(f(x)) = \sqrt{2 - 3x}$, $g(f) \searrow$ при $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{2}{3}\right]$; б) $f(g(x)) = -\dfrac{10}{x} + 5$, $f(g) \nearrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $g(f) \nearrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; $g(f(x)) = -\dfrac{5}{2x + 5}$, $g(f) \nearrow$ при $x \in (-\infty;-2,5)$ и $g(f) \nearrow$ при $x \in (-2,5;\ +\infty)$. Вариант 3. **1.** а) $[5,75] = 5$, $\{5,75\} = 0,75$; б) $[-5,75] = -6$, $\{-5,75\} = 0,25$. **3.** а) убывающая; б) возрастающая; в) $y \nearrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \nearrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; г) $y \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \searrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$. **4.** а) $y \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 2]$; б) $y \nearrow$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y \nearrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; в) $y \searrow$ при $x \in (-\infty;\ 2)$; г) $y \nearrow$ при $x \in (-\infty;-1)$ и $y \nearrow$ при $x \in (-1;\ +\infty)$. **5.** а) 2; б) -2. **6.** а) $f(g(x)) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f(g) \nearrow$ при $x \in (0;\ +\infty)$; $g(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$,

$g(f) \nearrow$ при $x \in (-\infty; 1)$; б) $f(g(x)) = \dfrac{12}{x} - 2$, $f(g) \searrow$ при $x \in (-\infty; 0)$ и $f(g) \searrow$ при $x \in (0; +\infty)$; $g(f(x)) = \dfrac{4}{3x-2}$, $g(f) \searrow$ при $x \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right)$ и $g(f) \searrow$ при $x \in \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

Самостоятельная работа № 2

Подготовительный вариант. **2.** а) $y \geqslant -2$; б) $y \leqslant 3$; в) $0 < y < 1$. **4.** а) $E(\varphi) = (-\infty; 2]$; б) $E(\omega) = \left(-\infty; \sqrt{2}\right]$; в) $E(\alpha) = [-2; 2]$. **5.** 1. **7.** а) $f(x) = \big||x| - 1\big| - 1$; б) $f(x) = |x - 1| - |x + 1| + x$. Вариант 1. **2.** а) $y \geqslant 0{,}75$; б) $y \leqslant 1$; в) $0 < y < 1$. **4.** а) $E(\varphi) = (-\infty; 3]$; б) $E(\omega) = \left[-2\sqrt{2}; 0\right)$; в) $E(\alpha) = \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$. **5.** 1. **7.** а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = x$. Вариант 2. **2.** а) $y \geqslant 0{,}75$; б) $y \leqslant 1$; в) $0 < y < 1$. **4.** а) $E(\varphi) = (-\infty; 2]$; б) $E(\omega) = \left[-\sqrt{3}; 0\right)$; в) $E(\alpha) = \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$. **5.** -1. **7.** а) $f(x) = -|x|$; б) $f(x) = -x$. Вариант 3. **2.** а) $y \geqslant 3$; б) $y \leqslant 5$; в) $-1 < y < 0$. **4.** а) $E(\varphi) = (-\infty; 3]$; б) $E(\omega) = \left(-\infty; \sqrt{3}\right]$; в) $E(\alpha) = [0; 2)$. **5.** 1. **7.** а) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{|x|}} - 1$; б) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}\left(\sqrt{|x|} - 1\right)$.

Самостоятельная работа № 3

Подготовительный вариант. **1.** а) $(1; -1)$, $x = 1$; б) $(-1; -2)$, $x = -1$; в) $(-4; 9)$, $x = -4$. **2.** $p = 0$, $q = -3$. **4.** а) при $c < -4$; б) при $c \leqslant 1$. **6.** $y = -2x^2 + 4x + 3$. **7.** $1\frac{1}{8}$. **8.** $y = \dfrac{1}{8}x^2$. Вариант 1. **1.** а) $(-1{,}5; -7{,}5)$, $x = -1{,}5$; б) $(1{,}5; -4{,}5)$, $x = 1{,}5$; в) $(2; -1)$, $x = 2$. **2.** $p = 2$, $q = 1$. **4.** а) при $c > 1$; б) при $c \geqslant 3$. **6.** $y = 2x^2 - 4x + 1$. **7.** 18. **8.** $y = -\dfrac{(x+1)^2}{4}$. Вариант 2. **1.** а) $(-1{,}5; -1{,}5)$, $x = -1{,}5$; б) $(-1{,}5; -4{,}5)$, $x = -1{,}5$; в) $(-2; 5)$, $x = -2$. **2.** $p = 2$, $q = 1$. **4.** а) при $c > 1$; б) при $c \geqslant -1$. **6.** $y = -2x^2 - 4x + 1$. **7.** 18. **8.** $y = \dfrac{(x-1)^2 + 3}{6}$. Вариант 3. **1.** а) $(0{,}5; 1{,}5)$, $x = 0{,}5$; б) $(0{,}5; -0{,}5)$, $x = 0{,}5$; в) $(1; 1{,}5)$, $x = 1$. **2.** $p = -1$, $q = 2$. **4.** а) при $c > \dfrac{1}{4}$; б) при $c \geqslant 2\frac{1}{4}$. **6.** $y = -2x^2 - 2x + 1$. **7.** 16. **8.** $x = \dfrac{1}{4}y^2$.

Самостоятельная работа № 4

Подготовительный вариант. **1.** а) $D(y) = [-6; 4]$, $E(y) = [-1; 3]$; б) $D(y) = [-12; 8]$, $E(y) = [-1; 3]$; в) $D(y) = [-4; 6]$, $E(y) = [0; 3]$; г) $D(y) = [-6; 6]$, $E(y)$ определить невозможно. **2.** а) $y = -2x - 2$; б) $y = 4x - 2$; в) $y = |2x - 2|$; г) $y = 2|x| - 2$. **3.** а) $y = x^2 + 2x$; б) $y = 4x^2 + 4x$; в) $y = |x^2 - 2x|$; г) $y = x^2 - 2|x|$. **4.** а) $y = 2 + \dfrac{4}{x+1}$; б) $y = 2 - \dfrac{8}{x-2}$; в) $y = \left|2 - \dfrac{4}{x-1}\right|$;

г) $y = 2 - \frac{4}{|x| - 1}$. **5.** При $1 < a \leqslant 2$. Вариант 1. **1.** а) $D(y) = [-3; 2]$, $E(y) = [-2; 5]$; б) $D(y) = [-1{,}5; 1]$, $E(y) = [-2; 5]$; в) $D(y) = [-2; 3]$, $E(y) = [0; 5]$; г) $D(y) = [-3; 3]$, $E(y)$ определить невозможно. **2.** а) $y = 2x + 1$; б) $y = 4x + 1$; в) $y = |-2x + 1|$; г) $y = -2|x| + 1$. **3.** а) $y = x^2 + 2x - 3$; б) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$; в) $y = |x^2 - 2x - 3|$; г) $y = x^2 - 2|x| - 3$. **4.** а) $y = \frac{4}{-x - 1} + 1$; б) $y = \frac{4}{2x - 1} + 1$; в) $y = \left|\frac{4}{x - 1} + 1\right|$; г) $y = \frac{4}{|x| - 1} + 1$. **5.** При $-2 < a \leqslant 2$. Вариант 2. **1.** а) $D(y) = [-2; 4]$, $E(y) = [-5; 2]$; б) $D(y) = [-2; 1]$, $E(y) = [-5; 2]$; в) $D(y) = [-4; 2]$, $E(y) = [0; 5]$; г) $D(y) = [-2; 2]$, $E(y)$ определить невозможно. **2.** а) $y = \frac{1}{2}x + 2$; б) $y = -\frac{1}{4}x + 2$; в) $y = \left|-\frac{1}{2}x + 2\right|$; г) $y = -\frac{1}{2}|x| + 2$. **3.** а) $y = x^2 - 2x - 3$; б) $y = 4x^2 + 4x - 3$; в) $y = |x^2 + 2x - 3|$; г) $y = x^2 + 2|x| - 3$. **4.** а) $y = \frac{4}{-x + 1} + 1$; б) $y = \frac{4}{-2x + 1} + 1$; в) $y = \left|\frac{4}{x + 1} + 1\right|$; г) $y = \frac{4}{|x| + 1} + 1$. **5.** При $a < -2$ и $a > 1$. Вариант 3. **1.** а) $D(y) = [-2; 6]$, $E(y) = [-4; 2]$; б) $D(y) = [-12; 4]$, $E(y) = [-4; 2]$; в) $D(y) = [-6; 2]$, $E(y) = [0; 4]$; г) $D(y) = [-2; 2]$, $E(y)$ определить невозможно. **2.** а) $y = -\frac{1}{2}x - 2$; б) $y = -\frac{1}{4}x - 2$; в) $y = \left|\frac{1}{2}x - 2\right|$; г) $y = \frac{1}{2}|x| - 2$. **3.** а) $y = -x^2 + 2x + 15$; б) $y = -4x^2 + 4x + 15$; в) $y = |-x^2 - 2x + 15|$; г) $y = -x^2 - 2|x| + 15$. **4.** а) $y = \frac{2}{-x + 2} + 3$; б) $y = \frac{1}{x + 1} + 3$; в) $y = \left|\frac{2}{x + 2} + 3\right|$; г) $y = \frac{2}{|x| + 2} + 3$. **5.** При $-1 < b < 0$.

Самостоятельная работа № 5

Подготовительный вариант. **1.** а) $\pm 1, \pm\sqrt{13}$; б) $\pm\frac{1}{\sqrt{7}}$; в) $\varnothing$. **2.** $2 \pm \sqrt{3}$. **3.** 0; 2; 5. **4.** 1. **5.** а) -4; -1; 2; б) 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **6.** а) $1 \pm \sqrt{2}$; б) -1; 9; $\frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$. Вариант 1. **1.** а) $\pm 3, \pm\sqrt{2}$; б) $\pm\sqrt{2}$; в) $\varnothing$. **2.** $1 \pm \sqrt{3}$. **3.** -3; 0; 2. **4.** 1. **5.** а) 0; $\frac{2}{3}$; б) $\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$. **6.** а) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) 3; 5; $9 \pm \sqrt{66}$. Вариант 2. **1.** а) ± 2, $\pm\sqrt{7}$; б) $\pm\sqrt{7}$; в) $\varnothing$. **2.** $-2 \pm \sqrt{2}$. **3.** -1; 2; 4. **4.** 1. **5.** а) 1; 3; б) $4 \pm \sqrt{15}$. **6.** а) $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$; б) -2; $-0{,}5$. Вариант 3. **1.** а) $\pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $\pm\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; б) $\pm\sqrt{1 + \sqrt{3}}$; в) $\varnothing$. **2.** $2 + \sqrt{6}$; 2. **3.** -1; 3. **4.** 1. **5.** а) ± 1; ± 3; ± 5; б) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$. **6.** а) $-2 \pm \sqrt{5}$; б) 1; 3.

Самостоятельная работа № 6

Подготовительный вариант. **1.** $(1; 4)$. **2.** а) $(-\infty; -3) \cup (1; 4)$; б) $(-3; 1) \cup (4; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup [1; 4]$; г) $(-3; 1] \cup [4; +\infty)$. **3.** Длина катета может быть больше 2 и меньше 6. **4.** $[1; 3]$. **5.** $\boldsymbol{R}$. **6.** -6. **7.** При $a \in (3; 5)$ и $a = 0$. Вариант 1. **1.** $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$. **2.** а) $(-\infty; -5) \cup (0; 1)$; б) $(-5; 0) \cup (1; +\infty)$; в) $(-\infty; -5] \cup (0; 1]$; г) $[-5; 0) \cup [1; +\infty)$. **3.** Длина прямоугольника может быть больше 6 и меньше 8. **4.** $[1; 2]$. **5.** $(-\infty; 1) \cup$ $\cup [4; +\infty)$. **6.** 9. **7.** При $b \in [-3{,}5; -2) \cup (1; 3] \cup [4; +\infty)$. Вариант 2. **1.** $(-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$. **2.** а) $(-\infty; -3) \cup (-1; 0)$; б) $(-3; -1) \cup (0; +\infty)$; в) $(-\infty; -3] \cup [-1; 0)$; г) $[-3; -1] \cup (0; +\infty)$. **3.** Длина прямоугольника может быть больше 6 и меньше 9. **4.** $[2; 3]$. **5.** $(-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$. **6.** -7. **7.** При $a \in (0; 1)$ и $a = 5$. Вариант 3. **1.** $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **2.** а) $(-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right)$; б) $(-1; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -1] \cup \left(0; \frac{2}{3}\right]$; г) $[-1; 0) \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **3.** Длина высоты может быть больше 10,5 и меньше 12 см. **4.** $[1; 2)$. **5.** $\left(-\infty; \sqrt{2}\right) \cup [3; +\infty)$. **6.** 14. **7.** При $b \in (-\infty; -2) \cup$ $\cup (-1; 0] \cup [3; 5]$.

Самостоятельная работа № 7

Подготовительный вариант. **1.** $|x - 7| = 5$; 2; 12. **2.** а) $x = a \pm 2$; б) $x = a$; в) $\varnothing$; г) при $b < 0$ нет корней, при $b = 0$ $x = a$, при $b > 0$ $x = a \pm b$. **3.** ± 1. **4.** 5. **5.** 1. **6.** -3. **7.** 2; $\frac{5 + \sqrt{33}}{2}$. **8.** 1. **9.** $x \in [0{,}5; 3]$. Вариант 1. **1.** $|x + 1| = 3$; 2; -4. **2.** а) -3; -1; б) -2; в) $\varnothing$; г) при $a < 0$ нет корней, при $a = 0$ $x = -2$, при $a > 0$ $x = -2 \pm a$. **3.** 1; -3. **4.** 6. **5.** 0; 2. **6.** -4. **7.** 1. **8.** $x \in [0; 1] \cup \{4\}$. **9.** -1; 5. Вариант 2. **1.** $|x + 3| = 2$; -5; -1. **2.** а) 1; 3; б) 2; в) $\varnothing$; г) при $a < 0$ нет корней, при $a = 0$ $x = 2$, при $a > 0$ $x = 2 \pm a$. **3.** -3; 0; 2; 5. **4.** 1. **5.** -2; -1; 0. **6.** 1. **7.** 2,5. **8.** $\varnothing$. **9.** 2; -4. Вариант 3. **1.** $|x + 0{,}5| = 5{,}5$; 5; -6. **2.** а) 24; -10; б) 7; в) $\varnothing$; г) при $a > 1$ нет корней, при $a = 1$ $x = 7$, при $a < 1$ $x = 8 - a$, $x = a + 6$. **3.** -2; 6. **4.** -6. **5.** 0; ± 1. **6.** -3. **7.** -2; 0. **8.** 1; 2,5. **9.** $x \in [-2; +\infty)$.

Самостоятельная работа № 8

Подготовительный вариант. **1.** а) $\left[\begin{array}{l} x < 4 \\ x > 10 \end{array}\right.$; б) $\begin{cases} x \leqslant 12 \\ x \geqslant 2 \end{cases}$. **2.** а) $(-\infty; a-2) \cup$ $\cup (a + 2; +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(a - 2; a + 2)$; г) $\varnothing$. **3.** $(-1; 1)$. **4.** $(-7; -3) \cup (5; 9)$. **5.** $(-1; 1)$. **6.** $\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$. **7.** 30. **8.** $[-5; 5]$. Вариант 1. **1.** а) $\left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 3 \end{array}\right.$; б) $\begin{cases} x \leqslant 5 \\ x \geqslant -1 \end{cases}$. **2.** а) $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(-3; 1)$; г) $\varnothing$.

3. $(-4; 4)$. **4.** $(-5; -4) \cup (-2; -1)$. **5.** $[-2; 0] \cup \{2\}$. **6.** $\left(-\infty; 2 - \sqrt{5}\right] \cup \left[2 + \sqrt{5}; +\infty\right)$. **7.** 12. **8.** $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$. Вариант 2. **1.** а) $\left[\begin{array}{l} x < -17 \\ x > -7 \end{array}\right.$; б) $\begin{cases} x \leqslant -10 \\ x \geqslant -14 \end{cases}$. **2.** а) $(-\infty; 2) \cup$ $\cup$ $(8; +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(2; 8)$; г) $\varnothing$. **3.** $(-1; 1)$. **4.** $(0; 2) \cup (8; 10)$. **5.** $[-4; -2] \cup$ $\cup$ $\{4\}$. **6.** $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$. **7.** $5 + \sqrt{5}$. **8.** $[0; 2]$. Вариант 3. **1.** а) $\left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 5 \end{array}\right.$; б) $\begin{cases} x \leqslant 4 \\ x \geqslant 2 \end{cases}$. **2.** а) $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(-4; 2)$; г) $\varnothing$. **3.** $(-4; 4)$. **4.** $(-8; -7) \cup (-3; -2)$. **5.** $[-3; 1]$. **6.** $(-\infty; -1] \cup$ $\cup$ $[1; +\infty)$. **7.** 20. **8.** $[-3{,}5; 2{,}5]$.

Самостоятельная работа № 9

Подготовительный вариант. **1.** а) при $k = 1$ нет корней, при $k \neq 1$ $x = \frac{3}{1 - k}$; б) при $k = -1$ x — любое число, при $k \neq -1$ $x = -3$; в) при любых k $x = \frac{1}{k^2 + 1}$. **2.** а) при $a = 0$ уравнение не имеет смысла, при $a = 2$ уравнение не имеет корней, при $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $x = \frac{a}{a - 2}$; б) при $a = 0$ уравнение не имеет смысла, при $a = 2$ x — любое число, при $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $x = 3a + 2$. **3.** а) при $a > 2$; б) при $-1 \leqslant a \leqslant 0$. **4.** При $a = 0$ $x = \frac{3}{7}$, при $a < -3\frac{1}{16}$ корней нет, при $a = -3\frac{1}{16}$ $x = -\frac{1}{7}$, при $a > -3\frac{1}{16}$ и $a \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{2a + 7 \pm \sqrt{16a + 49}}{2a}$. **5.** При $b = -6, -3, 0, 3$. **6.** При $b = -6$ и $b = 0$ нет корней, при $b \neq -5$ и $b \neq 0$ $x = \frac{15 - 3b}{b + 5}$. **7.** $y = -2x + 4$. Вариант 1. **1.** а) при $k = 1$ нет корней, при $k \neq 1$ $x = \frac{3}{k - 1}$; б) при $k = 1$ x — любое число, при $k \neq 1$ $x = 3$; в) при любых k $x = \frac{2}{k^2 + 2}$. **2.** а) при $a = 1$ уравнение не имеет смысла, при $a = \frac{1}{2}$ уравнение не имеет корней, при $a \neq 1$ и $a \neq \frac{1}{2}$ $x = \frac{3a - 3}{2a - 1}$; б) при $a = 0$ уравнение не имеет смысла, при $a = 3$ x — любое число, при $a \neq 0$ и $a \neq 3$ $x = 3a$. **3.** а) при $a < -0{,}5$, $a \neq -1$; б) при $a = 1$, $a = -3$. **4.** При $a = 0$ $x = -2$, при $a < -\frac{1}{2}$ корней нет, при $a = -\frac{1}{12}$ $x = -5$, при $a > -\frac{1}{12}$ и $a \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{2a + 1 \pm \sqrt{12a + 1}}{2a}$. **5.** При $b = -5, -4, 3, 4$. **6.** При $b = -1$ и

$b = 0$ нет корней, при $b \neq -1$ и $b \neq 0$ $x = \dfrac{2 - 2b}{b + 1}$. **7.** $y = 2x + 4$. Вариант 2. **1.** а) при $k = -1$ нет корней, при $k \neq -1$ $x = \dfrac{3}{k + 1}$; б) при $k = -\dfrac{1}{3}$ x — любое число, при $k \neq -\dfrac{1}{3}$ $x = 1$; в) при любых k $x = \dfrac{4}{k^2 + 3}$. **2.** а) при $a = -1$ уравнение не имеет смысла, при $a = -3$ уравнение не имеет корней, при $a \neq -1$ и $a \neq -3$ $x = \dfrac{2a + 2}{a + 3}$; б) при $a = 0$ уравнение не имеет смысла, при $a = 3$ x — любое число, при $a \neq 0$ и $a \neq 3$ $x = 3a$. **3.** а) при $0 < a < 0{,}5$; б) при $a = 4$, $a = -2$. **4.** При $a = 0$ $x = -\dfrac{2}{3}$, при $a > \dfrac{9}{20}$ корней нет, при $a = \dfrac{9}{20}$ $x = -\dfrac{7}{3}$, при $a < \dfrac{9}{20}$ и $a \neq 0$ $x_{1,2} = \dfrac{2a - 3 \pm \sqrt{9 - 20a}}{2a}$. **5.** При $b = -2$, -1, 2, 3. **6.** При $b = 1$ и $b = 0$ нет корней, при $b \neq 1$ и $b \neq 0$ $x = x = \dfrac{1 + b}{b - 1}$. **7.** $y = 2x + 4$. Вариант 3. **1.** а) при $k = 1$ и $k = 0$ нет корней, при $k \neq 1$ и $k \neq 0$ $x = \dfrac{2}{k - k^2}$; б) при $k = 1$ x — любое число, при $k \neq 1$ $x = -2$; в) при любых k $x = \dfrac{1}{4k^2 + 2}$. **2.** а) при $a = 0$ уравнение не имеет смысла, при $a = \dfrac{1}{3}$ уравнение не имеет корней, при $a \neq 0$ и $a \neq \dfrac{1}{3}$ $x = \dfrac{2a}{3a - 1}$; б) при $a = 0$ уравнение не имеет смысла, при $a = 7$ x — любое число, при $a \neq 0$ и $a \neq 7$ $x = 0$. **3.** а) при $a > 2$; б) при $1 \leqslant a \leqslant 4$. **4.** При $a = 1$ $x = \dfrac{1}{3}$, при $a < \dfrac{7}{16}$ корней нет, при $a = \dfrac{7}{16}$ $x = \dfrac{5}{3}$, при $a > \dfrac{7}{16}$ и $a \neq 1$ $x_{1,2} = \dfrac{2a + 1 \pm \sqrt{16a - 7}}{2 - 2a}$. **5.** При $b \in (-6; -3] \cup [0; 3)$. **6.** При $b = 1$ и $b = 2$ нет корней, при $b \neq 1$ и $b \neq 2$ $x = \dfrac{3 + b}{2 - b}$. **7.** $y = 2x + 4$.

Самостоятельная работа № 10

Подготовительный вариант. **1.** а) $(2; -1)$, $(-2; 1)$; б) $(-2; 1)$. **2.** а) окружность с центром в точке $(4; -3)$ и радиусом 5; парабола с вершиной в точке $(-4; -1)$ и ветвями, направленными влево. **3.** а) $(5; 1)$, $(1; 5)$; б) $(5; 1)$, $(1; 5)$, $(-5; -1)$, $(-1; -5)$. **4.** Первое уравнение системы можно записать в виде $(x - 1)^2 + y^2 + 2 = 0$, откуда ясно, что это уравнение не имеет действительных решений. **5.** Два решения. **6.** $p = 2$. Вариант 1. **1.** а) $(2; -1)$, $(-2; 1)$; б) $(-1; 2)$. **2.** а) окружность с центром в точке $(-2; 1)$ и радиусом $\sqrt{5}$; парабола с вершиной в точке $(4; 1)$ и ветвями, направленными влево.

3. а) (3; 1), (1; 3); б) (3; 1), (1; 3), (−3; −1), (−1; −3). **4.** Первое уравнение системы можно записать в виде $(x + 2)^2 + y^2 + 1 = 0$, откуда ясно, что это уравнение не имеет действительных решений. **5.** Два решения. **6.** $p = 8$. Вариант 2. **1.** а) (−2; −2), (2; 2); б) (1; 4). **2.** а) окружность с центром в точке (−3; 1) и радиусом $\sqrt{10}$; парабола с вершиной в точке (2,25; −0,5) и ветвями, направленными влево. **3.** а) (4; −1), (−1; 4); б) (4; −1), (−1; 4), (−4; 1), (1; −4). **4.** Первое уравнение системы можно записать в виде $x^2 + (y - 1)^2 + 1 = 0$, откуда ясно, что это уравнение не имеет действительных решений. **5.** Два решения. **6.** $p = 2$. Вариант 3. **1.** а) (−2; −1); б) (−2; −1), (1; 2). **2.** а) окружность с центром в точке (−4; 2) и радиусом 8; парабола с вершиной в точке (9; −1) и ветвями, направленными влево. **3.** а) (5; −1), (−1; 5); б) (5; −1), (−1; 5), (−5; 1), (1; −5). **4.** Первое уравнение системы можно записать в виде $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{3}{4} = 0$, откуда ясно, что это уравнение не имеет действительных решений. **5.** Два решения. **6.** $p = 8$.

Самостоятельная работа № 11

Подготовительный вариант. **1.** (3; 2). **2.** 32. **3.** $\left(3 + 2\sqrt{2};\ 3 - 2\sqrt{2}\right)$, $\left(3 - 2\sqrt{2};\ 3 + 2\sqrt{2}\right)$. **4.** Первая — за 45 минут, вторая — за 30 минут. **5.** а) $\left(6\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}\right)$, $\left(-6\sqrt{3};\ -2\sqrt{3}\right)$, (4; 1), (−4; −1); б) (1; −2), (−1; 2), $\left(\frac{11}{\sqrt{13}};\ \frac{5}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(-\frac{11}{\sqrt{13}};\ -\frac{5}{\sqrt{13}}\right)$. **6.** При $|p| > \sqrt{2}$. Вариант 1. **1.** (−1; −1). **2.** −3. **3.** (1; 1), $\left(\frac{4 + \sqrt{14}}{2};\ \frac{4 - \sqrt{14}}{2}\right)$, $\left(\frac{4 - \sqrt{14}}{2};\ \frac{4 + \sqrt{14}}{2}\right)$. **4.** Первая — 4,5 м^3 в час, вторая — 1,5 м^3 в час. **5.** а) $\left(\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right)$, $\left(-\sqrt{10};\ -\sqrt{10}\right)$, (4; 2), (−4; −2); б) (1; 1), (−1; −1), $\left(\frac{3}{\sqrt{10}};\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}};\ -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. **6.** При $a \in (0; 4)$. Вариант 2. **1.** (2; 1). **2.** 5. **3.** (2; 2). **4.** $\frac{1}{9}$. **5.** а) (2; 1), (−2; −1); б) (1; 0), (−1; 0), (1; 1), (−1; −1). **6.** При $a \in (1; 2)$. Вариант 3. **1.** (−3; −10). **2.** 8. **3.** (2; 1), (1; 2), (−4; 1), (1; 4). **4.** Первая — за 45 минут, вторая — за 36 минут. **5.** а) (1; 3), (−1; −3); б) (2; 1), (−2; −1), $\left(\frac{4}{\sqrt{7}};\ -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(-\frac{4}{\sqrt{7}};\ \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$. **6.** При $a \in (4; 16)$.

Самостоятельная работа № 12

Подготовительный вариант. **1.** а) не является; б) является. **2.** а) не пересекает; б) пересекает. **4.** $\begin{cases} 2x + 3y \geqslant 6 \\ x - 2y \geqslant -4 \\ 3x + y \leqslant 9 \end{cases}$. **5.** 8. **6.** При $b < 8$. Вариант 1. **1.** а) является; б) является. **2.** а) не пересекает; б) пересекает.

4. $\begin{cases} x + 3y \geqslant -3 \\ 2x + y \leqslant -1 \\ x - 2y \geqslant -3 \end{cases}$. 5. 8. 6. При $b > 2$. Вариант 2. 1. а) является; б) является. 2. а) не пересекает; б) пересекает. 4. $\begin{cases} 3x - 2y \geqslant -6 \\ 2x + y \leqslant 3 \\ x - 3y \leqslant -2 \end{cases}$. 5. 4. 6. При $b < 18$.

Вариант 3. 1. а) не является; б) не является. 2. а) не пересекает; б) пересекает. 4. $\begin{cases} -x + 2y \geqslant 2 \\ x + y \leqslant 1 \\ -2x + y \leqslant 4 \end{cases}$. 5. 4. 6. При $b < 16$.

Самостоятельная работа № 13

Подготовительный вариант. 1. $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$. 2. а) 5; 8; 11; 14; 17. 3. а) возрастающая; б) убывающая; в) не монотонная. 4. а) ограниченная снизу: $x_n \geqslant -4$; б) ограниченная: $2 < c_n \leqslant 5$; в) ограниченная снизу: $b_n \geqslant -15$. Вариант 1. $x_1 = x_5 = 0$, $x_2 = x_4 = 3$. 2. а) 3; 5; 9; 17; 33. 3. а) не монотонная; б) возрастающая; в) возрастающая. 4. а) ограниченная сверху: $x_n \leqslant 4$; б) ограниченная: $\frac{8}{3} \leqslant c_n < 4$; в) ограниченная снизу: $b_n \geqslant 6$. Вариант 2. 1. $x_1 = x_5 = -3$, $x_3 = 1$. 2. а) 4; 10; 28; 82; 244. 3. а) не монотонная; б) возрастающая; в) возрастающая. 4. а) ограниченная сверху: $x_n \leqslant 1$; б) ограниченная: $\frac{8}{5} \leqslant c_n < 2$; в) ограниченная снизу: $b_n \geqslant 6$. Вариант 3. 1. $x_1 = 4$, $x_2 = 12$. 2. а) 11; 15; 19; 23; 27. 3. а) не монотонная; б) возрастающая; в) убывающая. 4. а) ограниченная сверху: $x_n \leqslant 9$; б) ограниченная снизу: $c_n \geqslant \sqrt{3} - 2$; в) ограниченная: $-2 < b_n \leqslant 1$.

Самостоятельная работа № 14

Подготовительный вариант. 1. $5 - 2\sqrt{3}$. 2. $-62{,}5$. 3. 23; $a_{23} = 0{,}7$. 4. $-2{,}8$; 2,4; 7,6; 12,8. 5. 1; 2. 6. 0,5. 7. а) 70336; б) 424214. 8. При $n = 23$ и $n = 24$. Вариант 1. 1. $15 - 8\sqrt{5}$. 2. 1326. 3. 13; $a_{13} = -2{,}4$. 4. 12,5; 17; 21,5. 5. -1; 4. 6. $\frac{31}{22}$. 7. 456876. 8. При $n = 5$ и $n = 6$. Вариант 2. 1. $14 - 14\sqrt{2}$. 2. -285. 3. 26; $a_{26} = 0{,}1$. 4. 8,5; 13; 17,5. 5. 1; 6. 6. $\frac{14}{25}$. 7. 465718. 8. При $n = 2$. Вариант 3. 1. $2 - \sqrt{5}$. 2. 170. 3. 16; $a_{17} = -0{,}9$. 4. -5; -2; 1; 4. 5. 1; 9. 6. 2. 7. а) 44550; б) 450000. 8. При $n = 11$ и $n = 12$.

Самостоятельная работа № 15

Подготовительный вариант. 1. а) $\sqrt{2}$; б) $4\sqrt{2} - 4$; в) $\left(\sqrt{2}\right)^n - \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$; г) 15. 3. 189. 4. 4. 5. 36. 6. -12; 24; -48; 96.

7. 24310,125 рубля. Вариант 1. 1. а) 0,5; б) 3,75; в) $60 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$; г) $59\frac{1}{16}$. 3. 341. 4. 3. 5. $b_2 = 6$; $b_3 = 18$. 6. 2; 10; 50; 250. 7. 699,6025 рубля. Вариант 2. 1. а) 0,5; б) −4; в) $-64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$; г) $-63\frac{3}{4}$. 3. 242. 4. 9. 5. $b_1 = 27$; $b_3 = 3$. 6. 5; 15; 45; 135. 7. 364,651875 рубля. Вариант 3. 1. а) $\sqrt{2} + 1$; б) $3 + 2\sqrt{2}$; в) $\left(\sqrt{2} + 1\right)^{n-2}$; г) $11 + 9\sqrt{2}$. 3. 728. 4. 3. 5. 72. 6. −24; 12; −6; 3. 7. 56243,2 рубля.

Самостоятельная работа № 16

Подготовительный вариант. 1. а) $\frac{5}{33}$; б) $\frac{23}{110}$. 2. а) 2; б) −0,25. 3. 0,5. 4. а) −0,25; б) $-\frac{1}{2}$. 5. 6667. 6. 0,2. 7. 10π. Вариант 1. 1. а) $\frac{4}{33}$; б) $\frac{89}{165}$. 2. а) 0,25; б) −1. 3. $\frac{\overbrace{444...440}^{101\text{ цифра}} - 400}{9}$. 4. а) $\frac{7}{4}$; б) $\frac{3}{2}$. 5. 2999. 6. 0,1. 7. $3\sqrt{3}$. Вариант 2. 1. а) $\frac{7}{33}$; б) $\frac{113}{330}$. 2. а) $-\frac{4}{3}$; б) −2. 3. $\frac{\overbrace{333...330}^{101\text{ цифра}} - 300}{9}$. 4. а) 4,25; б) $-\frac{3}{4}$. 5. 2999. 6. 0,25. 7. $8\pi\left(2 + \sqrt{2}\right)$. Вариант 3. 1. а) $\frac{17}{33}$; б) $\frac{42}{55}$. 2. а) −1,5; б) 2. 3. $\frac{7}{12}$. 4. а) −1,5; б) 1,5. 5. 2502. 6. $\frac{1}{30}$. 7. $\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$.

Самостоятельная работа № 17

Подготовительный вариант. 1. $D(g) = \mathbf{R}$, $E(g) = (-\infty; 0]$. 2. а) $y = 0,5x - 2,5$; б) $y = x^2 - 10x + 29$, где $x \geqslant 5$. 3. а) $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$; б) $x \neq -2$; в) $(-\infty; -1,3] \cup [0,3; +\infty)$. 5. а) $\sqrt[5]{5}$; б) $\pm\sqrt[6]{6}$; в) $\varnothing$; г) −512. 6. а) при $a < 0$ и $a = 4$; б) при $a \in (0; 4)$. 7. $(-\infty; 0]$. Вариант 1. 1. $D(g) = [-1; 1]$, $E(g) = [0; \pi]$. 2. а) $y = -0,2x + 0,4$; б) $y = x^2 - 4x + 3$, где $x \leqslant 2$. 3. а) $(-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$; б) $x \neq 2$; в) $[-1; 5]$. 5. а) $-\sqrt[3]{3}$; б) $\pm\sqrt[4]{2}$; в) $\varnothing$; г) −243. 6. а) при $a < 0$; б) при $a \in (0; 0,5)$. 7. $(-\infty; -2]$. Вариант 2. 1. $D(g) = [-1; 1]$, $E(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. 2. а) $y = -0,5x + 1,5$; б) $y = x^2 - 2x - 1$, где $x \leqslant 1$. 3. а) $(-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$; б) $x \neq -2$; в) $[-2; 3]$. 5. а) $-\sqrt[3]{2}$; б) $\pm\sqrt[4]{3}$; в) $\varnothing$; г) 128. 6. а) при $a > 0$ и $a = -0,5$; б) при $a \in (-0,5; 0)$. 7. $(-\infty; -1]$. Вариант 3. 1. $D(g) = \mathbf{R}$, $E(g) = [0; +\infty)$. 2. а) $y = -0,5x + 0,5$; б) $y = -x^2 + 2x + 1$, где $x \leqslant 1$. 3. а) $[-1; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $x \neq 0$; в) $[-1; 3]$. 5. а) $-\sqrt[7]{7}$; б) $\pm\sqrt[6]{2}$; в) $\varnothing$; г) 2048. 6. а) при $a < 0$; б) при $a \in (0; 1)$. 7. $[-3; 0,2]$.

Самостоятельная работа № 18

Подготовительный вариант. **1.** а) 6; б) 2. **2.** а) −6; б) −2. **3.** а) a^2; б) $a^{\frac{11}{24}}$. **4.** а) $ab^2 \cdot \sqrt[5]{27a^2}$; б) $-ab^3 \cdot \sqrt[4]{9a}$. **5.** а) $\sqrt[4]{0{,}12} > \sqrt[3]{0{,}12^2}$; б) $\sqrt[4]{1{,}2} < \sqrt[3]{1{,}2^2}$. **6.** а) −2; $\sqrt[3]{7}$; б) 256. **7.** 2. Вариант 1. **1.** а) −1; б) 1. **2.** а) −3; б) −1. **3.** а) a; б) $a^{\frac{3}{8}}$. **4.** а) $-2x \cdot \sqrt{-x}$; б) $-ab^3 \cdot \sqrt[4]{5}$. **5.** а) $\sqrt[5]{0{,}3^3} > \sqrt{0{,}3}$; б) $\sqrt[5]{3^3} < \sqrt{3}$. **6.** а) −1; $\sqrt[3]{5}$; б) 81. **7.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Вариант 2. **1.** а) −2; б) −1. **2.** а) −2; б) −1. **3.** а) a^3; б) $a^{\frac{41}{120}}$. **4.** а) $-3x \cdot \sqrt{-x}$; б) $-ab^2 \cdot \sqrt[4]{7}$. **5.** а) $\sqrt[5]{0{,}7^2} > \sqrt{0{,}7}$; б) $\sqrt[5]{7^2} < \sqrt{7}$. **6.** а) $\sqrt[3]{3}$; −1; б) 625. **7.** 4. Вариант 3. **1.** а) $1 - \sqrt{3}$; б) −2. **2.** а) −4,5; б) 2. **3.** а) a; б) $a^{\frac{167}{216}}$. **4.** а) $2ab^2 \cdot \sqrt[5]{2ab^2}$; б) $-3ab^2 \cdot \sqrt[4]{3a^2b^2}$. **5.** а) $\sqrt{0{,}5} > \sqrt[3]{0{,}5^2}$; б) $\sqrt{5} < \sqrt[3]{5^2}$. **6.** а) $\sqrt[3]{3}$; $-\sqrt[3]{4}$; б) 2401. **7.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Самостоятельная работа № 19

Подготовительный вариант. **1.** а) −4; б) ∅; в) 8; г) ∅. **2.** а) ∅; б) $5 - \sqrt{14}$. **3.** а) 78; б) 16; в) ±5. **4.** а) [−2; 22); б) (−2; 2). Вариант 1. **1.** а) −3; б) ∅; в) −1; г) ∅. **2.** а) ∅; б) 3. **3.** а) 2; б) 81; в) ±3. **4.** а) (1; 26) ∪ ∪ (82; +∞); б) [−2; 2). Вариант 2. **1.** а) −26; б) ∅; в) 10; г) ∅. **2.** а) ∅; б) 2. **3.** а) 4; б) 256; в) ±2. **4.** а) (−2; 14) ∪ (34; +∞); б) [2; 3). Вариант 3. **1.** а) −10; б) ∅; в) 7; г) ∅. **2.** а) 2; б) 3. **3.** а) −1; б) 1; в) ±1. **4.** а) [−1; 5,25) ∪ ∪ [8; +∞); б) [0,5; 5).

Самостоятельная работа № 20

Подготовительный вариант. **1.** а) II четверть; б) I четверть; в) III четверть; г) IV четверть; д) II четверть. **2.** а) $\frac{23\pi}{36}$; б) $-\frac{5\pi}{6}$; в) $\frac{117\pi}{36}$; г) -7π. **3.** а) 135°; б) −750°; в) $\frac{450°}{\pi} \approx 142{,}5°$; г) −17,1°. **4.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** а) 1; б) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) 1. **6.** а) $-\frac{1}{4}$; б) $\frac{9 + \sqrt{6}}{3}$. **7.** $1 > 2 - \frac{\sqrt{5}}{2}$. **8.** πn, где $n = 0; \pm1; \pm2; \ldots$. Вариант 1. **1.** а) III четверть; б) I четверть; в) II четверть; г) III четверть; д) II четверть. **2.** а) $\frac{2\pi}{5}$; б) $-\frac{37\pi}{9}$; в) $\frac{17\pi}{3}$; г) $-\frac{46\pi}{9}$. **3.** а) 108°; б) −660°; в) 28,6°; г) −229,1°. **4.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$. **5.** а) $\sqrt{3}$; б) −1; в) $\sqrt{3}$. **6.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2$; б) 4. **7.** а) наименьшее значение равно −1, наибольшее значение равно 5; б) наименьшее значение равно 1, наибольшее значение равно 5. **8.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0; \pm1; \pm2; \ldots$. Вариант 2. **1.** а) II четверть;

б) III четверть; в) III четверть; г) IV четверть; д) IV четверть. **2.** а) $\frac{\pi}{10}$; б) $-\frac{65\pi}{18}$; в) $\frac{64\pi}{9}$; г) $-\frac{13\pi}{3}$. **3.** а) 144°; б) −600°; в) 40,1°; г) −286,5°. **4.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $-\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **6.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$; б) 6. **7.** а) наименьшее значение равно 1, наибольшее значение равно 5; б) наименьшее значение равно −1, наибольшее значение равно 9. **8.** πn, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$. Вариант 3. **1.** а) III четверть; б) IV четверть; в) IV четверть; г) II четверть; д) IV четверть. **2.** а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$; в) $\frac{95\pi}{36}$; г) -12π. **3.** а) 72°; б) −690°; в) 256,5°; г) −39,9°. **4.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$. **5.** а) 1; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{3}$. **6.** а) $\frac{1}{4}$; б) $4\frac{1}{3}$. **7.** $-1 < \frac{4-\sqrt{5}}{2}$. **8.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$.

Самостоятельная работа № 21

Подготовительный вариант. **1.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1; в) −1; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** а) III четверть; б) IV четверть. **3.** а) чётная; б) нечётная; в) нечётная. **4.** а) больше нуля; б) больше нуля. **5.** а) $\left[2\sqrt{3} - 3; 2\sqrt{3} + 3\right]$; б) $\left[0; 2\sqrt{2} + 3\right]$. **6.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) 2π; в) $\frac{4\pi}{3}$; г) 2π. **7.** а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$; в) $\frac{4\pi n}{3}$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$; г) $\frac{13\pi}{7} + 2\pi n$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$. Вариант 1. **1.** а) $-\frac{1}{2}$; б) 1; в) −1; г) $-\frac{1}{2}$. **2.** а) IV четверть; б) III четверть. **3.** а) нечётная; б) нечётная; в) нечётная. **4.** а) больше нуля; б) больше нуля. **5.** а) [−1; 2]; б) [0; 5]. **6.** а) $\frac{2\pi}{3}$; б) 2π; в) 3π; г) $\frac{\pi}{2}$. **7.** а) $\frac{\pi n}{3}$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$; б) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$; в) $\frac{3\pi}{2} + 3\pi n$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$; г) $\frac{5\pi}{14} + \frac{\pi n}{2}$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$. Вариант 2. **1.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** а) III четверть; б) II четверть. **3.** а) нечётная; б) нечётная; в) нечётная. **4.** а) больше нуля; б) меньше нуля. **5.** а) [−1; 3]; б) [0; 7]. **6.** а) 4π; б) 2π; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$. **7.** а) $\pi + 2\pi n$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$; б) $-\frac{3\pi}{4} + \pi n$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$; в) $\frac{\pi n}{3}$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$; г) $-\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{2}$, где $n = 0; \pm1; \pm2; ...$.

Вариант 3. **1.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** а) I четверть; б) II четверть. **3.** а) нечётная; б) нечётная; в) нечётная. **4.** а) больше нуля; б) меньше нуля. **5.** а) $\left[4\sqrt{3}-7;\ 4\sqrt{3}+7\right]$; б) $\left[0;\ 4\sqrt{3}+7\right]$. **6.** а) π; б) 2π; в) 4π; г) $\frac{\pi}{2}$. **7.** а) $\frac{\pi n}{2}$, где $n = 0; \pm1; \pm2;...$; б) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, где $n = 0; \pm1; \pm2;...$; в) $4\pi n$, где $n = 0; \pm1; \pm2;...$; г) $\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi n}{2}$, где $n = 0; \pm1; \pm2;...$.

Самостоятельная работа № 22

Подготовительный вариант. **1.** $\cos^2\alpha$. **2.** а) $\cos^2\alpha$; б) 1. **3.** $\sin\beta = -\frac{5}{13}$, $\cos\beta = \frac{12}{13}$, $\mathrm{ctg}\,\beta = -\frac{12}{5}$. **5.** 1. **6.** $-\frac{4}{3}$. **7.** 1. **8.** а) 0,22; б) 1,1232. Вариант 1. **1.** $\cos^2\alpha$. **2.** а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $\frac{1}{\cos\alpha}$. **3.** $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\,\beta = -\frac{5}{12}$. **5.** 1. **6.** 1,25. **7.** 1. **8.** а) 0,48; б) 0,296. Вариант 2. **1.** $\sin^2\alpha$. **2.** а) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; б) $\frac{1}{\sin\alpha}$. **3.** $\sin\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\mathrm{ctg}\,\beta = -\frac{4}{5}$. **5.** 1. **6.** 7,5. **7.** 1. **8.** а) $-0{,}48$; б) 0,296. Вариант 3. **1.** $\cos^2\alpha$. **2.** а) 1; б) $-\cos^2\alpha$. **3.** $\sin\beta = -\frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\mathrm{ctg}\,\beta = -\frac{3}{4}$. **5.** -1. **6.** $-0{,}24$. **7.** 1. **8.** а) $-0{,}105$; б) 0,9845.

Самостоятельная работа № 23

Подготовительный вариант. **1.** а) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\mathrm{tg}\,2\alpha$. **3.** а) $-\frac{8+15\sqrt{3}}{34}$; б) $\frac{9\sqrt{3}-40}{82}$; в) $-\frac{1}{5}$. **4.** а) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$; в) $\sqrt{3}-2$. **5.** 15° и 75°. **7.** 0,125. **8.** Наименьшее значение равно -2, наибольшее значение равно 2. Вариант 1. **1.** а) 1; б) 0,25. **2.** $-\mathrm{tg}\,\alpha$. **3.** а) $-\frac{8+15\sqrt{3}}{34}$; б) $\frac{40-9\sqrt{3}}{82}$; в) $\frac{1}{3}$. **4.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$; в) $\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$. **5.** 30° и 60°. **7.** 0,25. **8.** Наименьшее значение равно $-\sqrt{13}$, наибольшее значение равно $\sqrt{13}$. Вариант 2. 1. **1.** а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $2\frac{3}{4}$. **2.** $\mathrm{tg}\,2\alpha$. **3.** а) $\frac{8\sqrt{3}-15}{34}$; б) $-\frac{9+40\sqrt{3}}{82}$; в) $-\frac{1}{2}$. 4 а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$; в) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$. **5.** 30° и 60°. **7.** 0,25. **8.** Наименьшее значение равно $-\sqrt{13}$, наибольшее значение равно $\sqrt{13}$. Вариант 3. **1.** а) $\sqrt{3}-1$; б) 0,5. **2.** $\operatorname{ctg} 2\alpha$. **3.** а) $\frac{15-8\sqrt{3}}{34}$; б) $-\frac{9+40\sqrt{3}}{82}$; в) 0,5. 4 а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$; в) $-\sqrt{3}-2$. **5.** 30° и 60°. **7.** $\frac{1}{16}$. **8.** Наименьшее значение равно −2, наибольшее значение равно 2.

Самостоятельная работа № 24

Подготовительный вариант. **1.** а) 15120; б) 2520; в) 105. **2.** а) 24; б) 96. **3.** 24. **4.** 210. **5.** 32432400. **6.** 210. **7.** 11. Вариант 1. **1.** а) 720; б) 60; в) 20. **2.** а) 6; б) 18. **3.** 24. **4.** 30. **5.** 332640. **6.** 126. **7.** 15. Вариант 2. **1.** а) 120; б) 120; в) 15. **2.** а) 6; б) 18. **3.** 24. **4.** 60. **5.** 665280. **6.** 252. **7.** 16. Вариант 3. **1.** а) 40320; б) 210; в) 35. **2.** а) 24; б) 96. **3.** 120. **4.** 840. **5.** 3524400. **6.** 126. **7.** 10.

Самостоятельная работа № 25

Подготовительный вариант. **1.** 0,65. **2.** $\frac{1}{120}$. **3.** 0,2. **4.** 0,25. **5.** 0,874. **6.** $\frac{1425}{19778} \approx 0{,}072$. Вариант 1. **1.** 0,7. **2.** $\frac{1}{720}$. **3.** 0,25. **4.** 0,05. **5.** 0,66. **6.** $\frac{464508}{1363783} \approx 0{,}34$. Вариант 2. **1.** 0,67. **2.** $\frac{1}{720}$. **3.** 0,25. **4.** 0,25. **5.** 0,015. **6.** $\frac{105}{336226} \approx 0{,}00312$. Вариант 3. **1.** 0,8. **2.** $\frac{1}{40320}$. **3.** 0,2. **4.** 0,125. **5.** 0,045; 0,955. **6.** $\frac{45675}{1051688} \approx 0{,}04343$.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1

Подготовительный вариант. **1.** Нечётная. **2.** При $a = -6$. **3.** а) $(0; 4]$; б) $[-2; 2]$. **5.** $a < 0, b > 0, c > 0, D > 0$. **6.** а) нули функции $\pm 1, \pm 2$; б) значения функции положительны при $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$; в) $f(x) \nearrow$ при $x \in [-1{,}5; 0)$, $x \in [1{,}5; +\infty)$, на остальных промежутках функция убывает; г) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$. **7.** При $a < 0$ решений нет, при $a = 0$ и $a = 1$ — одно решение, при $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ — два решения. Вариант 1. **1.** Чётная. **2.** При $a = -2$. **3.** а) $(0; 1]$; б) $[-1; 1]$. **5.** $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $D > 0$. **6.** а) нули функции $0, \pm 4$; б) значения функции положительны при $x \in (-4; 0) \cup (4; +\infty)$; в) $f(x) \nearrow$ при $x \in (-\infty; -2]$ и при $x \in [2; +\infty)$, $f(x) \searrow$ при $x \in [-2; 2]$; г) $(-\infty; +\infty)$. **7.** При $a < 0$ решений нет, при $a = 0$ и $a = 2$ — одно решение, при $a \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$ — два решения. Вариант 2. **1.** Чётная. **2.** При $a = 4$. **3.** а) $(0; 1]$; б) $[-1; 1]$. **5.** $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $D > 0$. **6.** а) нули функции $\pm 1, 0$; б) значения функции положительны при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; в) $f(x) \nearrow$ при $x \in [-0{,}5; 0]$ и при $x \in [0{,}5; +\infty)$, на остальных промежутках функция убывает; г) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **7.** При $a < 0$ решений нет, при $a = 0$ и $a = 1$ — одно решение, при $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ — два решения. Вариант 3. **1.** Чётная. **2.** При $a = -4$. **3.** а) $(0; 4]$; б) $\left[-\frac{2}{\sqrt{7}}; \frac{2}{\sqrt{7}}\right]$. **5.** $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D > 0$. **6.** а) нули функции ± 1; б) значения функции положительны при $x \in (-1; 1)$; в) $f(x) \nearrow$ при $x \in (-\infty; 0]$, $f(x) \searrow$ при $x \in [0; +\infty)$; г) $(-\infty; 4]$; $f(x) = -x^2 - 3|x| + 4$. **7.** При $a < 0$ решений нет, при $a = 0$ и $a = 1$ — одно решение, при $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ — два решения.

Контрольная работа № 2

Подготовительный вариант. **1.** $[-1; 4) \cup \left[\sqrt{63}; 8\right]$. **2.** $\pm 1; \pm 3; \pm 5$. **3.** $[-3; 2) \cup (3; 4]$. **4.** $\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}$. **5.** $[0; 1] \cup [5; 6]$. **6.** При $b \in [-1; -0{,}75]$ и $b = -1{,}5$. Вариант 1. **1.** $(-\infty; -4) \cup [4; 5) \cup \{2\}$. **2.** $0; \pm\frac{2}{3}$. **3.** $(5; +\infty)$. **4.** $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$. **5.** $(-\infty; -1] \cup [0; 2] \cup [3; +\infty)$. **6.** При $b = \pm 3$, $b = 0$ и $b = -6$. Вариант 2. **1.** $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup (3;5]$. **2.** $\pm 1; \pm 3$. **3.** $(-\infty; -1]$. **4.** $1 \pm \sqrt{2}; \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$. **5.** $[-7; 3]$. **6.** При $b = \pm 2$, $b = 3$ и $b = -1$. Вариант 3. **1.** $(0; 3] \cup \{-2\}$. **2.** ± 3. **3.** $(0; 2]$. **4.** $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; -1 \pm \sqrt{2}$. **5.** $(-\infty; -1] \cup \{0{,}5\} \cup [2; +\infty)$. **6.** При $b = 3$, $b = -2$, $b = 0$ и $b = -1$.

Контрольная работа № 3

Подготовительный вариант. **1.** а) (2; 1), $\left(-\frac{5}{7}; -4\frac{3}{7}\right)$; б) (−3; 4), (3; −4), (−4; 3), (4; −3). **2.** 16 − 4π. **3.** (4; 2), (−4; −2), $\left(\frac{4}{\sqrt{13}}; -\frac{10}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(-\frac{4}{\sqrt{13}}; \frac{10}{\sqrt{13}}\right)$. **4.** 4 км/ч, 6 км/ч. **5.** Точка с наименьшей ординатой $x = 2$, наименьшая ордината $y = -1$; точка с наибольшей ординатой $x = 5$, наибольшая ордината $y = 8$. **6.** (1; 0), (−0,6; 0,8), (−1; 0), (0; 1). Вариант 1. **1.** а) (−2; 4), (10,75; −0,25); б) (3; 7), (−3; −7), (−7; −3), (7; 3). **2.** 16 − 4π. **3.** (4; 1), (−4; −1), $\left(\sqrt{6}; \frac{3}{2}\sqrt{6}\right)$, $\left(-\sqrt{6}; -\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)$. **4.** 18 км/ч, 2 км/ч. **5.** Точка с наименьшей ординатой $x = 2$, наименьшая ордината $y = -4$; точка с наибольшей ординатой $x = 6$, наибольшая ордината $y = 12$. **6.** (1; 0), $\left(-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right)$, (−1; 0), (0; 1). Вариант 2. **1.** а) (3; 1), $\left(-\frac{7}{13}; -9\frac{8}{13}\right)$; б) (6; 4), (−6; −4), (−4; −6), (4; 6). **2.** 36 − 9π. **3.** (−10; 4), (10; −4), $\left(\frac{4\sqrt{14}}{3}; \frac{\sqrt{14}}{3}\right)$, $\left(-\frac{4\sqrt{14}}{3}; -\frac{\sqrt{14}}{3}\right)$. **4.** 60 км/ч, 80 км/ч. **5.** Точка с наименьшей ординатой $x = 1$, наименьшая ордината $y = -1$; точка с наибольшей ординатой $x = 4$, наибольшая ордината $y = 8$. **6.** (1; 0), $\left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$, (−1; 0). Вариант 3. **1.** а) (2; 3), $\left(-\frac{8}{9}; -8\frac{5}{9}\right)$; б) (2; 5), (−2; −5), (5; 2), (−5; −2). **2.** 4π − 8. **3.** (6; 15), (−6; −15), $\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$. **4.** 16 км/ч, 2 км/ч. **5.** Точка с наименьшей ординатой $x = 3$, наименьшая ордината $y = -1$; точка с наибольшей ординатой $x = 7$, наибольшая ордината $y = 15$. **6.** (1; 0), (0,6; 0,8), (−1; 0), (0; 1).

Контрольная работа № 4

Подготовительный вариант. **1.** а) 3; б) 7. **2.** а) 0; б) 1; в) 0,75. **4.** 62. **5.** $\frac{9}{32}$. **6.** 2; 6; 18. Вариант 1. **1.** 8. **2.** а) 0; б) 3; в) 1,4. **4.** $\frac{6}{11}$. **5.** $\frac{1}{9}$. **6.** 1; 4; 16. Вариант 2. **1.** 8. **2.** а) 0; б) 2; в) 0,8. **4.** $-\frac{6}{11}$. **5.** $\frac{1}{16}$. **6.** 5; 10; 20. Вариант 3. **1.** а) 3; б) 2. **2.** а) 0; б) 2; в) −1. **4.** 33. **5.** $\frac{16}{3}$. **6.** 2; 6; 18.

Контрольная работа № 5

Подготовительный вариант. **1.** а) $x^{\frac{1}{6}}\left(x^{\frac{1}{6}}+1\right)$; б) $\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-4\right)$; в) $\left(x^{\frac{1}{4}}+3\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{4}}+9\right)$. **2.** (2; −4). **3.** а) $\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^2$; б) $\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)^3$. **4.** а) $-2x^{\frac{1}{2}}$; б) $x-x^{\frac{1}{2}}$; в) $\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}+3}$. **5.** $1{,}25\cdot\sqrt[9]{0{,}8}>0{,}8\cdot\sqrt[9]{1{,}25}$. **6.** $\frac{1-x}{x}$. **7.** $\frac{32}{47}$. Вариант 1. **1.** а) $x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}-3\right)$; б) $\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+5\right)$; в) $\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4\right)$. **2.** (6; −3). **3.** а) $\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)^2$; б) $\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^3$. **4.** а) $-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{5}$; б) $x-3x^{\frac{1}{2}}$; в) $\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}-3}$. **5.** $2{,}5\cdot\sqrt[7]{0{,}4}>0{,}4\cdot\sqrt[7]{2{,}5}$. **6.** 1. **7.** $\frac{4}{7}$. Вариант 2. **1.** а) $x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+2\right)$; б) $\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+3\right)$; в) $\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+4\right)$. **2.** (3,5; 1,5). **3.** а) $\left(x^{\frac{1}{6}}+2\right)^2$; б) $\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^3$. **4.** а) $-0{,}2x^{0{,}1}$; б) $x+3x^{\frac{1}{2}}$; в) $\frac{3}{x^{\frac{1}{2}}-3}$. **5.** $\frac{3}{5}\cdot\sqrt[8]{1\frac{2}{3}}<\frac{5}{3}\cdot\sqrt[8]{0{,}6}$. **6.** 1. **7.** $\frac{4}{11}$. Вариант 3. **1.** а) $x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)$; б) $\left(x^{\frac{1}{4}}+2\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+4\right)$; в) $\left(x^{\frac{1}{4}}-5\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+5x^{\frac{1}{4}}+25\right)$. **2.** (2; 9). **3.** а) $\left(x^{\frac{1}{5}}-3\right)^2$; б) $\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)^3$. **4.** а) $-2x^{\frac{1}{2}}$; б) $x+x^{\frac{1}{2}}$; в) $\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}-3}$. **5.** $1{,}6\cdot\sqrt[5]{0{,}675}>0{,}675\cdot\sqrt[5]{1{,}6}$. **6.** $\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{3}}+1}$. **7.** $y=\frac{1}{x}$.

Контрольная работа № 6

Подготовительный вариант. **1.** а) 0,6; б) $\frac{1}{3}$. **2.** $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}$. **5.** 1. **6.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Вариант 1. **1.** а) $\frac{1}{3}$; б) $2\sqrt{2}-3$. **2.** а) $\sin 2\alpha$; б) 0. **4.** $\frac{7}{9}$. **5.** $\sqrt{2}$. Вариант 2. **1.** а) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $-3-2\sqrt{2}$. **2.** а) 1; б) 0. **4.** $\frac{7}{8}$. **5.** $\sqrt{2}$. Вариант 3. **1.** а) $-2\sqrt{2}$; б) $\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$. **2.** $-2\cos\alpha$. **4.** $\frac{1}{9}$. **5.** 1. **6.** $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Контрольная работа № 7

Подготовительный вариант. **1.** 720. **2.** 336. **3.** 210. **4.** $\frac{5}{6}$. **5.** 8640.

Вариант 1. **1.** 120. **2.** 60. **3.** 90. **4.** 0,36. **5.** 6720. Вариант 2. **1.** 40320. **2.** 132. **3.** 5814. **4.** 0,8. **5.** 27720. Вариант 3. **1.** 120. **2.** 45. **3.** 24360. **4.** 0,4. **5.** 11880.

ТЕСТЫ

№ теста	№ варианта	1	2	3	4	5	6
Т1 Функции и их свойства	Вариант 1	2	4	1	3	2	4
	Вариант 2	1	4	2	4	3	1
Т2 Квадратный трёхчлен и его корни, квадратичная функция	Вариант 1	1	3	4	2	4	3
	Вариант 2	4	3	3	3	2	4
Т3 Уравнения с одной переменной	Вариант 1	1	4	4	3	2	4
	Вариант 2	1	2	2	3	4	2
Т4 Неравенства с одной переменной	Вариант 1	4	4	1	4	3	3
	Вариант 2	4	3	4	1	4	4
Т5 Уравнения с двумя переменными и их системы	Вариант 1	4	3	4	4	1	4
	Вариант 2	3	2	3	3	2	2
Т6 Арифметическая прогрессия	Вариант 1	4	1	2	1	3	1
	Вариант 2	3	2	4	1	2	2
Т7 Геометрическая прогрессия	Вариант 1	3	3	4	2	4	2
	Вариант 2	4	3	1	1	3	4
Т8 Корень n-ой степени	Вариант 1	3	2	1	4	2	1
	Вариант 2	3	3	2	1	4	2
Т9 Степень с рациональным показателем	Вариант 1	1	3	2	1	4	2
	Вариант 2	2	4	1	3	4	2
Т10 Тригонометрические функции	Вариант 1	2	2	4	2	4	3
	Вариант 2	1	1	4	3	2	4

№ теста	№ варианта	1	2	3	4	5	6
T11 Основные тригонометрические тождества	Вариант 1	2	4	3	1	1	4
	Вариант 2	2	3	4	1	3	1
T12 Формулы сложения и их следствия	Вариант 1	1	1	4	1	3	1
	Вариант 2	2	4	4	2	1	2
T13 Формулы сложения и их следствия	Вариант 1	3	2	4	1	2	4
	Вариант 2	1	1	2	3	4	2

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Феоктистов Илья Евгеньевич

АЛГЕБРА
9 класс

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *В. В. Черноруцкий*
Оформление и художественное редактирование: *И. В. Цыцарева*
Технический редактор *Т. В. Фатюхина*
Корректоры *Л. В. Дьячкова, Д. С. Ковалёв*
Компьютерная вёрстка и графика: *А. А. Горкин*

Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,5. Тираж 3000 экз. Заказ № 6066.

Издательство «Мнемозина».
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 6781.
E-mail: ioc@mnemozina.ru
www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин.
Тел.: 8 (495) 783 8284, 783 8286.
www.shop.mnemozina.ru

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Ульяновский Дом печати».
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК