Карпова Ирина Викторовна, к. п. н., доцент, кафедра алгебры и методики преподавания математики ДВГГУ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Пояснительная записка

Решение различного вида уравнений является одной из содержательных линий школьного курса математики, но при этом, методы решения уравнений с несколькими неизвестными практически не рассматриваются. Вместе с тем, решение уравнений от нескольких неизвестных в целых числах является одной из древнейших математических задач. Большинство методов решения таких уравнений основаны на теории делимости целых чисел, интерес к которой в настоящее время определяется бурным развитием информационных технологий. В связи с этим, учащимся будет небезынтересно познакомиться с методами решения некоторых уравнений в целых числах, тем более что на олимпиадах разного уровня очень часто предлагаются задания, предполагающие решение какого-либо уравнения в целых числах.

Предлагаемый курс рассчитан в первую очередь на школьников 8 -11 классов, обучающихся по естественно-математическому, экономическому и общеобразовательному профилю. На первых занятиях предполагается рассмотреть вопросы теории делимости целых чисел, которые используются при решении уравнений в целых числах.

Цель курса развитие устойчивого познавательного интереса к математике через знакомство учащихся с методами решения некоторых уравнений в целых числах.

В результате освоения курса учащиеся должны знать и уметь:

- познакомиться с историей развития теории диофантовых уравнений;
- получить опыт самостоятельного решения уравнений в целых числах, используя имеющиеся алгоритмы;
- на основе усвоенных теоретических знаний творчески перерабатывать известные алгоритмы для решения задач с изменившимися условиями.

Объем курса: предлагаемый курс рассчитан на 20 часов

Тематическое планирование

№ п/п	Темы занятий	Количество часов
1.	Проблема решения уравнений в целых числах: от Диофанта до доказательства теоремы Ферма	2
2.	Отношение делимости на множестве целых чисел. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики.	2
3.	Наибольший общий делитель целых чисел	2
4.	Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида	2
5.	Различные методы решения диофантовых уравнений первой степени от двух переменных.	4
6.	Пифагоровы тройки	2
7.	Методы решения некоторых нелинейных неопределенных уравнений	6
	Итого	20

Текст пособия

1. Проблема решения уравнений в целых числах: от Диофанта до доказательства теоремы Ферма

Алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, имеющие число неизвестных, превосходящее число уравнений, когда стоит задача найти целые или рациональные решения называются диофантовыми (неопределенными).

Решение уравнений в целых числах является одной из древнейших математических задач. Наибольшего расцвета эта область математики достигла в Древней Греции. Основным источником, дошедшим до нашего времени, является произведение Диофанта – «Арифметика». Диофант суммировал и расширил накопленный до него опыт решения неопределенных уравнений в целых числах.

История сохранила нам мало черт биографии замечательного александрийского ученого-алгебраиста Диофанта. По некоторым данным Диофант жил до 364 года н.э. Достоверно известно лишь своеобразное жизнеописание Диофанта, которое по преданию было высечено на его надгробии и представляло задачу-головоломку:

«Бог ниспослал ему быть мальчиком шестую часть жизни; добавив к сему двенадцатую часть, Он покрыл его щеки пушком; после седьмой части Он зажег ему свет супружества и через пять лет после вступления в брак даровал ему сына. Увы! Несчастный поздний ребенок, достигнув меры половины полной жизни отца, он был унесен безжалостным роком. Через четыре года, утешая постигшее его горе наукой о числах, он [Диофант] завершил свою жизнь» (попробуйте решить задачу самостоятельно).

Эта головоломка служит примером тех задач, которые решал Диофант. Он специализировался на решении задач в целых числах. Такие задачи в настоящее время известны под названием диофантовых.

Наиболее известной, решенной Диофантом, является задача «о разложении на два квадрата». Ее эквивалентом является известная всем теорема Пифагора. Эта теорема была известна в Вавилонии, возможно ее знали и в Древнем Египте, но впервые она была доказана, в пифагорейской школе. Так называлась группа интересующихся математикой философов по имени основателя школы Пифагора (ок. 580-500г. до н.э.).

Жизнь и деятельность Диофанта протекала в Александрии, он собирал и решал известные и придумывал новые задачи. Позднее он объединил их в большом труде под названием «Арифметика». Из тринадцати книг, входивших в состав «Арифметики», только шесть сохранились до Средних веков и стали источником вдохновения для математиков эпохи Возрождения, в том числе и для Пьера де Ферма.

Пьер де Ферма родился 20 августа 1601 года на юго-западе Франции. Он не занимался профессионально математикой, но был одним из величайших в истории математики «любителем».

Изучая задачи и решения Диофанта, Ферма черпал в них вдохновение и занимался решением аналогичных и более интересных задач. Ферма записывал для себя лишь самое необходимое для того, чтобы убедиться в правильности полученного решения.

При чтении второй книги «Арифметики», Ферма наткнулся на целую серию наблюдений, задач и решений, связанных с теоремой Пифагора и пифагоровыми тройками. Например, Диофант рассматривал существование особых троек, образующих так называемые «хромые треугольники», у которых две более короткие стороны x и y отличаются по длине только на единицу (например, $x = 20$, $y = 21$, $z = 29$ и $20^2 + 21^2 = 29^2$).

Вместо уравнения Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$ Ферма занялся рассмотрением уравнения $x^3 + y^3 = z^3$. Он всего лишь изменил степень на единицу, но его новое уравнение не допускало никаких решений в целых числах. Таким образом, незначительное изменение превратило уравнение, допускающее бесконечно много решений в целых числах, в уравнение, не имеющее ни одного решения в целых числах.

Ферма подверг уравнение Пифагора еще большему изменению, попробовав заменить степень 2 на целые числа бóльшие 3, и обнаружил, что найти решение в целых числах каждого из этих уравнений очень трудно. И Ферма доказал, что вообще не существует трех целых чисел x, y, z, которые удовлетворяли бы уравнению

$$x^n + y^n = z^n, \quad \text{где } n = 3, 4, 5, \ldots$$

На полях «Арифметики» Диофанта, рядом с задачей 8, Ферма оставил такое замечание: «Невозможно для куба быть записанным в виде суммы двух кубов, или для четвертой степени быть записанной в виде суммы двух четвертых степеней, или, в общем, для любого числа, которое есть степень больше двух, быть записанной в виде суммы двух таких же степеней. Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но поля здесь слишком узки для того, чтобы вместить его». Это замечание Ферма сделал в1637 году.

За прошедшие столетия были доказаны все утверждения Ферма, содержавшиеся в примечаниях на полях «Арифметики» Диофанта, и только Великая теорема Ферма, до недавнего времени, упорно не поддавалась усилиям математиков. Великая теорема Ферма обрела известность как самая трудная «головоломка» математики. 358 лет многие великие математики (К.Г. Баше, Л. Эйлер, Дж. Валлис Ж. Лагранж и др.) пытались доказать эту теорему, но только в конце 20 века в 1995 году она была доказана американскими математиками Э. Уайлсом и Р. Тейлором.

В настоящее время проблема решения неопределенных уравнений в целых числах хорошо разработана. Мы рассмотрим здесь некоторые методы решения уравнений в целых числах и способы доказательства того, что уравнение не имеет решений в целых числах. Многие из этих методов предполагают применение некоторых понятий и алгоритмов теории делимости. В связи с этим, прежде чем переходить непосредственно к методам решения неопределенных уравнений в целых числах обратимся к основным понятиям и алгоритмам теории делимости целых чисел.

2. Делимость целых чисел. Простые и составные числа.Основная теорема арифметики

Везде далее будем рассматривать только целые числа.

Определение 2.1. Число a делится на число b (или b делит a) если существует такое число c, что $a = bc$. При этом число c называется частным от деления a на b.

Обозначения: $a \vdots b$ (a делится на b) или $b \mid a$ (b делит a).

Перечислим простейшие свойства делимости, которые справедливы для любых целых чисел.

1. Если $a \vdots b$ и c – частное от деления, то c – единственное.
2. Любое целое число делится на себя $a \vdots a$.
3. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.
4. Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то или $a=b$, или $a= -b$.
5. Если $a \vdots b$ и $|b| > |a|$, то $a=0$.

6. Если $a \vdots b$ и $a \neq 0$, то $|a| \geq |b|$.

7. Для того чтобы $a \vdots b$ необходимо и достаточно чтобы $|a| \vdots |b|$.

8. Если $a_1 \vdots b, a_2 \vdots b, ... a_n \vdots b$, то $(a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n) \vdots b$.

9. Если сумма $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \vdots b$ и $a_1 \vdots b,\ a_2 \vdots b,\ ...,\ a_{n-1} \vdots b$, то $a_n \vdots b$.

Замечание 2.2. На основании свойства 7 в дальнейшем достаточно ограничиваться рассмотрением случая, когда делитель есть положительное число. Равным образом делимость произвольных целых чисел сводится к делимости неотрицательных чисел.

В соответствии с замечанием 2.2 будем рассматривать целые положительные числа.

Определение 2.3. Целое положительное число $p > 1$ называется простым, если оно имеет ровно два положительных делителя: 1 и p.

Определение 2.4. Целое положительное число $m > 1$ называется составным, если оно имеет, по крайней мере, один положительный делитель отличный от 1 и m.

Примеры:

1) 3 имеет ровно 2 делителя: 1 и 3, по определению 2.3, оно простое.
2) 4 имеет своими делителями 1, 4 и 2, по определению 2.4, число 4 – составное.

Замечание 2.5. В соответствии с определениями 2.3 и 2.4 все множество целых положительных чисел можно разбить на три подмножества: простые числа; составные числа; 1.

Замечание 2.6. Существует единственное простое четное число 2. Все остальные четные числа являются составными.

Перечислим основные свойства простых чисел.

Теорема 2.7. Если p и p_1 – простые числа и $p \neq p_1$, то p не делится на p_1, и p_1 не делится на p.

Теорема 2.8. Если произведение нескольких целых чисел делится на простое число p, то по меньшей мере один из сомножителей делится на p.

Теорема 2.9. Для любого целого положительного числа $n>1$ наименьший, отличный от единицы положительный делитель всегда представляет собой простое число.

Теорема 2.10.(основная теорема арифметики). Всякое целое положительное число, отличное от единицы, может быть представлено в виде произведения простых сомножителей и при том единственным образом (с точностью до порядка следования сомножителей).

Таким образом, если m – целое положительное число, а $p_1, p_2, ...p_k$- простые числа, то $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Если, при этом, среди чисел $p_1, p_2, ..., p_k$ есть одинаковые, то можно записать каноническое представление целого числа, представив произведение одинаковых сомножителей в виде степени:

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$$

Мы выяснили, что множество натуральных чисел можно разбить на три подмножества. Встает вопрос о числе простых чисел в бесконечном натуральном ряду. Существуют ли простые числа среди больших натуральных чисел, или с какого то определенного числа все натуральные числа, следующие за ним, будут составными? Оказывается, что хотя в натуральном ряду можно найти участки составных чисел любой длины, множество простых чисел бесконечно. Это утверждение было доказано ещё древнегреческим математиком Евклидом и входит в его знаменитые «Начала». Приведём здесь доказательство этого утверждения:

Теорема 2.11. Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть множество простых чисел конечно, и пусть p – наибольшее простое число. Рассмотрим натуральное число N, которое является произведением всех простых чисел, т.е.

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot p$$

и прибавим к этому числу 1: $N + 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot p + 1$. Очевидно, что полученное число не делится ни на одно простое число от 1 до p, следовательно получаем, что $N = 1$, но непосредственно видно, что $N > 1$. Получили противоречие, которое возникло из за того, что мы сделали неправильное предположение. Следовательно, множество натуральных чисел бесконечно.

Таким образом, какую бы длинную серию последовательных составных чисел мы ни встретили в ряду натуральных чисел, мы можем быть убеждены в том, что за нею найдется ещё бесконечное множество простых чисел.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Доказать, что если $ab + cd$ делится на $a - c$, то $ad + bc$ делится на $a - c$.

2.2. Найти необходимое и достаточное условие, того, чтобы сумма чисел a и b делилась бы на c, если a и b на c не делятся.

2.3. Доказать, что если сумма всех делителей некоторого числа вдвое больше этого числа, то сумма чисел, обратных этим делителям, равна 2.

2.4. Найдите каноническое представление числа 60984.

2.5. Докажите, что $p^2 - 1$ кратно 24, если p – простое число, большее 3.

2.6. Найти такие значения A, при которых все три числа A, $A+4$, $A+14$ будут простыми.

2.7. Найти все простые числа p такие, что $p+10$ и $p+14$ тоже являются простыми числами.

2.8. Доказать, что $a^4 + 4$ есть составное число при любом натуральном a, больше 1.

2.9. Доказать, что любое простое число можно представить или в виде $4n$-1 либо $4n$+1.

3. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное целых чисел

Рассмотрим понятия, которые в дальнейшем широко будем использовать при разработке методов решения неопределенных уравнений.

Определение 3.1. Наибольшим общим делителем (НОД) целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется такой их положительный общий делитель, который делится на любой другой общий делитель этих чисел.

Обозначение: если d есть НОД чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то это записывается так: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d$

Таким образом, из определения 3.1, если $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d$, то

1) $d > 0$,

2) $d \mid a_1, d \mid a_2, \ldots, d \mid a_n$,

3) если существует целое число k, такое что $k \mid a_1, k \mid a_2, \ldots, k \mid a_n$, то $k \mid d$.

Рассмотрим основные свойства НОД целых чисел.

Теорема 3.2. 1) Для любых целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, существует НОД.

2) Если $a_1 = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}, \ldots, a_n = p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\gamma_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ – различные простые числа, то $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = p_1^{\min(\alpha_1, \ldots, \gamma_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min(\alpha_1, \ldots, \gamma_s)}$.

Замечание. Из теоремы 3.2 следует способ нахождения НОД целых чисел, а именно: 1) разложить каждое число на простые множители, записав разложение в каноническом виде; 2) найти произведение минимальных степеней простых множителей, входящих в разложения.

Рассмотрим пример. Найти НОД чисел 5775, 15246, 399.

1) Разложим числа на простые множители

$5775 = 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11 \qquad 15246 = 2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11^2 \qquad 399 = 3\cdot 7\cdot 19$

2) Найдем произведение минимальных степеней простых чисел, входящих в разложения.

$d = 2^0\cdot 3^1\cdot 5^0\cdot 7\cdot 11^0\cdot 19^0 = 3\cdot 7 = 27$, таким образом $(5775{,}15246{,}399) = 27)$

Теорема 3.3. Если $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d,\ b \mid d$ и $b>0$, то $(\frac{a_1}{b},\ldots,\frac{a_n}{b}) = \frac{d}{b}$.

Теорема 3.4. $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$.

НОД n чисел ($n\geq 3$) можно найти, найдя сначала НОД n-1 чисел, и взяв затем НОД от полученного таким образом числа $d= (a_1, \ldots, a_n)$ и последнего числа a_n.

Теорема 3.5. Если $(a,b) = d$, то существуют такие целые числа x и y, что имеет место равенство $ax + by = d$.

Замечание. Это равенство называется линейной комбинацией или линейным представлением НОД двух чисел через эти числа.

Определение 3.6. Пусть $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ – отличные от нуля целые числа. Наименьшим общим кратным (НОК) называют наименьшее положительное число, делящееся на все эти числа.

Обозначение Если m – НОК, то $m = [a_1,...,a_n]$

Таким образом, если $m = [a_1,...,a_n]$, то

1) $m > 0$,

2) $a_1 | m,..., a_2 | m$,

3) если $M > 0$ и $a_1 | M,...a_n | M$, то $m \leq M$.

Теорема 3.7. Если $a_1 = p^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p^{\alpha_s},\ldots,a_n = p^{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot p^{\gamma_s}$ - каноническое разложение чисел $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ на простые множители, то

$$m = [a_1,...,a_n] = p_1^{\max(\alpha_1,\ldots,\gamma_1)}\cdot\ldots\cdot p_s^{\max(\alpha_n,\ldots,\gamma_n)}$$

Теорема 3.8. Пусть $a>0, b>0$ - целые, $(a,b)=d, [a,b]=m$, тогда $m=\frac{ab}{d}$.

Определение 3.9. Числа a и b называются взаимно простыми, если НОД этих чисел равен 1.

Теорема 3.10. Если a и p – целые числа, причем p-простое, то либо $a \vdots p$, либо числа a и p взаимно простые.

Теорема 3.11. НОК двух взаимно простых чисел равно их произведению.

Теорема 3.12. Для того чтобы a делилось на взаимно простые числа b и c, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на их произведение.

Теорема 3.13. Если $a \cdot b \vdots c$, причем $(a,c)=1$, то $b \vdots c$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Каким может быть наибольший общий делитель по сравнению с их разностью?

3.2. Доказать, что два последовательных нечетных числа взаимно простые.

3.3. Доказать, что наибольший общий делитель последовательных чётных чисел равен 2.

3.4. Наименьшее общее кратное двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 90, а их натбольший общий делитель равен 6. Найдите эти числа.

3.5. Доказать, что если даны три последовательных натуральных числа, то произведение двух последовательных чисел и третье число либо взаимно простые, либо имеют наибольшим общим делителем число 2.

3.6. Доказать, что если числа a и c взаимно простые, то каждое из этих чисел взаимно простое с суммой и разностью данных чисел.

4. Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида

Основную роль во всей арифметике целых чисел играет теорема о делении с остатком.

Теорема 4.1. Для любого целого a и целого $b>0$ существуют и единственные целые q и r, такие что $a=b\cdot q+r, \quad 0\le r<b$.

Замечание 4.3. Если $a=b\cdot q+r, \quad 0\le r<b$ то q называется неполным частным, а r – остатком от деления a на b.

Замечание 4.2. В частности, если $r=0$, то $a=b\cdot q$ и a делится на b.

Из теоремы 4.1 следует, что при фиксированном целом $m>0$ любое целое число a можно представить в одном из следующих видов:

$$a = m \cdot q$$
$$a = m \cdot q_1 + 1$$
$$a = m \cdot q_2 + 2$$
………………
$$a = m \cdot q_{m-1} + (m-1)$$

При этом если $a < m$, то будем иметь $a = m \cdot 0 + a$, если $a > 0$ и

$a = m \cdot (-1) + (m + a)$, если $a < 0$.

Примеры.

1. Любое целое число можно представить в виде $a = 2 \cdot k$ или $a = 2 \cdot k + 1$.
2. Любое целое число можно представить в виде $a = 3 \cdot k$ или $a = 3 \cdot k + 1$ или $a = 3 \cdot k + 2$.

Важным следствием из теоремы о делении с остатком является еще одно свойство делимости.

Теорема 4.4. Разность целых чисел a и b делится на натуральное число m в том и только в том случае, когда числа a и b при делении на m дают одинаковые остатки.

Замечание. Такие числа называют еще равноостаточными, или сравнимыми по модулю m.

На следующей теореме основан ещё один способ нахождения наибольшего общего делителя целых чисел.

Теорема 4.5. Пусть a и b – два целых числа, $b \neq 0$ и $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$ тогда $(a,b) = (b,r)$.

Этот способ называется алгоритмом Евклида. Задача нахождения НОД чисел a и b сводится к более простой задаче нахождения НОД b и r, $0 \leq r < |b|$. Если $r = 0$, то $(a,b) = b$. Если же $r \neq 0$, то рассуждения повторяем, отправляясь от b и r. В результате получаем цепочку равенств:

$$a = bq_0 + r_0, \qquad 0 \leq r_0 < |b|,$$
$$b = r_0 q_1 + r_1, \qquad 0 \leq r_1 < |b|,$$
$$r_0 = r_1 q_2 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < |b|, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \qquad 0 \leq r_n < |b|,$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}.$$

Мы получим убывающую последовательность натуральных чисел

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_n > \ldots \geq 0$$

которая не может быть бесконечной. Поэтому существует остаток, равный нулю: пусть $r_{n+1} = 0, r_n \neq 0$. На основании теоремы 4.5 из (**) следует, что $(a,b) = r_n$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Могут ли все натуральные числа *a, b, c, d* оказаться нечетными, если *c* – частное отделения *a* на *b*, а *d* – остаток от этого деления?

4.2. Установить, как изменится остаток (при делении с остатком), если делимое и делитель увеличить (или уменьшить) в одно и то же число раз.

4.3. Доказать, что если делимое (при делении с остатком) есть сумма нескольких чисел, то остаток от деления этой суммы на некоторое число не изменится, если уменьшить или увеличить одно или несколько слагаемых на число, кратное делителю.

4.4. Доказать, что если делимое (при делении с остатком) есть произведение нескольких чисел, то остаток от деления этого произведения на некоторое число не изменится, если уменьшить или увеличить один из множителей на число, кратное делителю.

4.5. Доказать, что при делении большего числа на меньшее делимое всегда больше двойного остатка.

4.6. Какое число можно прибавить к делимому (при делении с остатком), чтобы частое не изменилось?

4.7. Какие числа можно прибавить одновременно к делимому и делителю (при делении с остатком), чтобы частное не изменилось?

4.8. При каком условии деление числа *A* (с остатком) на два последовательных числа *a* и *a+1* дает в частном одно и то же число?

4.9. Найти линейное представление наибольшего общего делителя чисел 1232 и 1672.

5. Решение неопределенных уравнений первой степени от двух переменных в целых числах

Многие «математические фокусы» основаны на методах решения неопределенных уравнений. Например, фокус с угадыванием даты рождения.

Предложите Вашему знакомому угадать его день рождения по сумме чисел равных произведению даты его рождения на 12 и номера месяца рождения на 31.

Для того чтобы угадать день рождения Вашего знакомого нужно решить уравнение: $12x + 31y = A$.

Пусть Вам назвали число 380, т.е. имеем уравнение $12x + 31y = 380$. Для того чтобы найти x и y можно рассуждать так:

число $12x + 24y$ делится на 12, следовательно, по свойствам делимости (теорема 4.4), числа $7y$ и 380 должны иметь одинаковые остатки при делении на 12. Число 380 при делении на 12 дает остаток 8, следовательно $7y$ при делении на 12 тоже должно давать в остатке 8, а так как y - это номер месяца, то $1 \le y \le 12$, следовательно $y = 8$. Теперь нетрудно найти $x = 11$. Таким образом, Ваш знакомый родился 11 августа.

Уравнение, которое мы решили, является диофантовым уравнением 1-ой степени с двумя неизвестными. Для решения таких уравнений может быть использован, так называемый метод спуска. Алгоритм этого метода рассмотрим на конкретном уравнении $5x + 8y = 39$.

1. Выберем неизвестное, имеющее наименьший коэффициент (в нашем случае это x), и выразим его через другое неизвестное: $x = \frac{39-8y}{5}$. Выделим целую часть: $x = (7-y) + \frac{4-3y}{5}$. Очевидно, что x будет целым, если выражение $\frac{4-3y}{5}$ окажется целым, что, в свою очередь, будет иметь место тогда, когда число $4 - 3y$ без остатка делится на 5.

2. Введем дополнительную целочисленную переменную z следующим образом: $4 - 3y = 5z$. В результате получим уравнение такого же типа, как и первоначальное, но уже с меньшими коэффициентами. Решать его будем уже относительно переменной y, рассуждая точно также как в п.1: $y = \frac{4-5z}{3}$. Выделяя целую часть, получим:

$$y = 1 - z + \frac{1-2z}{3}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, вводим новую переменную u: $3u = 1 - 2z$.

3. Выразим неизвестную с наименьшим коэффициентом, в этом случае переменную z: $z = \frac{1-3u}{2} = \frac{1-u}{2} - u$. Требуя, чтобы $\frac{1-u}{2}$ было целым, получим: $1 - u = 2v$, откуда $u = 1 - 2v$. Дробей больше нет, спуск закончен.

4. Теперь необходимо «подняться вверх». Выразим через переменную v сначала z, потом y и затем x:

$$z = \frac{1-u}{2} - u = \frac{1-1+2v}{2} - 1 + 2v = 3v - 1; \qquad y = \frac{4-5z}{3} = \frac{4-5(3v-1)}{3} = 3 - 5v.$$

$$x = \frac{39-8y}{5} = \frac{39-8(3-5v)}{5} = 3+8v.$$

5. Формулы $x = 3+8v$ и $y = 3 - 5v$, где v – произвольное целое число, представляют общее решение исходного уравнения в целых числах.

Замечание. Таким образом метод спуска предполагает сначала последовательное выражение одной переменой чрез другую, пока в представлении переменной не останется дробей, а затем, последовательное «восхождение» по цепочке равенств для получения общего решения уравнения.

Это уравнение и любое другое линейное уравнение с двумя неизвестными может быть решено и другим методом, с использованием алгоритма Евклида, более того можно доказать, что уравнение, рассмотренное выше всегда имеет единственное решение. Приведем здесь формулировки теорем, на основании которых может быть составлен алгоритм решения неопределенных уравнений первой степени от двух переменных в целых числах.

Теорема 5.1. Если в уравнении $ax + by = 1$, $(a,b) = 1$, то уравнение имеет, по крайней, мере одно решение.

Теорема 5.2. Если в уравнении $ax + by = c$, $(a,b) = d > 1$ и c не делится на d, то уравнение целых решений не имеет.

Теорема 5.3. Если в уравнении $ax + by = c$, $(a,b) = d > 1$ и $c \vdots d$, то оно равносильно уравнению $a_1 x + b_1 y = c_1$, в котором $(a_1, b_1) = 1$.

Теорема 5.4. Если в уравнении $ax + by = c$, $(a,b) = 1$, то все целые решения этого уравнения заключены в формулах:

$$x = x_0 c + bt$$
$$y = y_0 c - at$$

где x_0, y_0 – целое решение уравнения $ax + by = 1$, t - любое целое число.

Как уже отмечалось выше, сформулированные теоремы позволяют составить следующий ***алгоритм*** решения в целых числах уравнения вида $ax + by = c$.

1. Найти наибольший общий делитель чисел a и b,

если $(a,b)=d>1$ и c не делится на d, то уравнение целых решений не имеет;

если $(a,b)=d>1$ и $c \vdots d$, то

2. Разделить почленно уравнение $ax+by=c$ на d, получив при этом уравнение $a_1x+b_1y=c_1$, в котором $(a_1,b_1)=1$.
3. Найти целое решение (x_0, y_0) уравнения $a_1x+b_1y=1$ путем представления 1 как линейной комбинации чисел a и b;
4. Составить общую формулу целых решений данного уравнения

$$x = x_0c + bt$$
$$y = y_0c - at$$

где x_0, y_0 – целое решение уравнения $ax+by=1$, t - любое целое число.

Пример.

Решить уравнение в целых числах $407x - 2816y = 33$.

Воспользуемся составленным алгоритмом.

1. Используя алгоритм Евклида, найдем наибольший общий делитель чисел 407 и 2816:

$$2816 = 407 \cdot 6 + 374;$$
$$407 = 374 \cdot 1 + 33;$$
$$374 = 33 \cdot 11 + 11;$$
$$33 = 11 \cdot 3$$

Следовательно (407,2816) = 11, причем 33 делится на 11

2. Разделим обе части первоначального уравнения на 11, получим уравнение $37x - 256y = 3$, причем (37, 256) = 1

3. С помощью алгоритма Евклида найдем линейное представление числа 1 через числа 37 и 256.

$$256 = 37 \cdot 6 + 34;$$
$$37 = 34 \cdot 1 + 3;$$
$$34 = 3 \cdot 11 + 1$$

Выразим 1 из последнего равенства, затем последовательно поднимаясь по равенствам будем выражать 3; 34 и полученные выражения подставим в выражение для 1.

$1 = 34 - 3 \cdot 11 = 34 - (37 - 34 \cdot 1) \cdot 11 = 34 \cdot 12 - 37 \cdot 11 = (256 - 37 \cdot 6) \cdot 12 - 37 \cdot 11 =$
$- 83 \cdot 37 - 256 \cdot (-12)$

Таким образом, $37\cdot(-83)-256\cdot(-12)=1$, следовательно пара чисел $x_0=-83$ и $y_0=-12$ есть решение уравнения $37x-256y=3$.

4. Запишем общую формулу решений первоначального уравнения

$$x=-83c+bt=-83\cdot 3-256t=-249-256t$$
$$y=-12c-at=-12\cdot 3-37t=-36-37t$$

где t - любое целое число.

Замечание. Можно доказать, что если пара (x_1,y_1) - целое решение уравнения $ax+by=c$, где $(a,b)=1$, то все целые решения этого уравнения находятся по формулам:

$$x=x_1+bt$$
$$y=y_1-at$$

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнение, составленное в начале параграфа по представленным алгоритмам.

Решить уравнения в целых числах:

а) $27x-40y=1$; б) $54x+37y=7$; в) $107x+84y=1$;

г) $13x-15y=7$; д) $81x+52y=5$; е) $24x-56y=72$;

ж) $127x-52y+1=0$; з) $6x+10y-7z=11$.

На какое наименьшее число надо умножить 7, чтобы произведение оканчивалось на 123.

Найти все четырёхзначные простые числа, начинающиеся и оканчивающиеся цифрой 1.

Кусок проволоки длиной 102 см нужно разрезать на части длиной 15 см и 12 см, так чтобы была использована вся проволока. Как это сделать?

6. Пифагоровы тройки

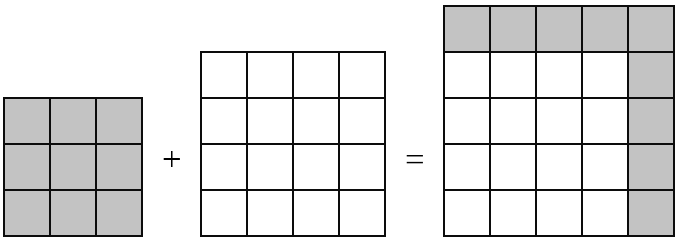
Всем вам хорошо известно уравнение

$$x^2+y^2=z^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

где x, y, z – натуральные числа. Это уравнение тоже является диофантовым уравнением второй степени. Известно, что числа x, y, z можно рассматривать как длины двух катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника. Такие числа называют в математике пифагоровыми тройками.

Вы можете без труда привести примеры пифагоровых троек, например 3; 4; 5.

Пифагорейцами был предложен способ получения пифагоровых троек с помощью перестройки квадратов. Если взять квадрат 3×3, состоящий из 9 квадратных плиток, и квадрат 4×4, состоящий из 16 плиток, то все эти плитки можно расположить по-новому, так, чтобы они образовывали квадрат 5×5, состоящий из 25 плиток.



$3^2 \quad + \quad 4^2 \quad = \quad 5^2$

$9 \quad + \quad 16 \quad = \quad 25$

Конечно, этот способ не годится, если пифагоровы тройки состоят из больших чисел, например $x = 99$, $y = 4900$ и $z = 4901$.

При возрастании чисел пифагоровы тройки встречаются все реже и находить их становится все труднее и труднее. Пифагорейцы изобрели метод отыскания таких троек и, пользуясь им, доказали, что пифагоровых троек существует бесконечно много.

Рассмотрим один из способов нахождения пифагоровых троек.

Заметим, что если два числа из пифагоровой тройки имеют общий делитель, то на него делится и третье число. Поделив их все на общий делитель, вновь получим пифагорову тройку. Обратно, если x, y, z – пифагорова тройка, то числа nx, ny, nz, где n - целочисленный множитель, тоже образуют пифагорову тройку. По этой причине сначала исследуем пифагоровы тройки взаимно простых чисел. Такие тройки иногда называют примитивными.

Заметим:

– в примитивной пифагоровой тройке два числа не могут быть чётными (объясните почему);

– все три числа не могут быть нечётными одновременно (объясните почему).

Учитывая это, получаем, что в примитивной пифагоровой тройке два числа нечётные, а одно чётное. Исследуем эту ситуацию.

Предположим, что z является четным, т.е. $z=2m$, тогда числа x и y – нечётные. Пусть $x = 2k+1$, $y = 2k + 1$. В этом случае сумма

$x^2 + y^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$ не делится на 4, а $z^2 = 4m^2$ должно делиться на 4. Таким образом, число z четным быть не может, следовательно, чётным числом является либо x, либо y.

Пусть, например, x – число четное, а y и z – нечётные числа. Из уравнения (1) имеем: $y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$.

Числа $z + x$ и $z - x$ являются взаимно простыми (доказать). При этом их произведение есть точный квадрат. Следовательно, каждое из этих чисел есть точный квадрат, то есть $\begin{cases} z + x = a^2 \\ z - x = b^2 \end{cases}$. Откуда получаем:

$z = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ и $x = \dfrac{a^2 - b^2}{2}$, тогда $y^2 = (z + x)(z - x) = a^2b^2$, откуда $y = ab$.

Таким образом, мы получили, что примитивная тройка пифагоровых чисел имеет вид:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad y = ab, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

где a и b – некоторые взаимно простые нечетные числа.

Попробуйте самостоятельно доказать, что числа вида (2) образуют пифагорову тройку чисел.

Теперь, выбирая произвольно a и b можно по формулам (2) получать различные примитивные пифагоровы тройки:

$a = 3;\ b = 1 \Rightarrow x = 4; y = 3; z = 5;$

$a = 5;\ b = 3 \Rightarrow x = 8; y = 15; z = 17;$

$a = 9;\ b = 7 \Rightarrow x = 16; y = 63; z = 65$ и.т.д.

Осталось добавить, что пифагоровы тройки обладают рядом любопытных особенностей, которые нетрудно доказать:

– один из «катетов» должен быть кратен трем;

– один из «катетов» должен быть кратен четырем;

– одно из чисел должно быть кратно пяти.

Найти целочисленные решения уравнения (1), т.е. пифагоровы тройки, было достаточно несложно, но если показатель степени изменить с 2 на 3 (т.е. заменить квадраты кубами), как решение полученного уравнения в целых числах становится невозможным. Это доказал в 1753 года великий математик Леонард Эйлер.

А еще ранее французский математик Пьер Ферма в 1637 году заявил о том, что он доказал, что уравнение вида $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых числах. Но этого доказательства научной общественности не представил. Это утверждение в последствии и стали называть теоремой Ферма, которую на протяжении 358 лет не удавалось доказать никому.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Сколько имеется прямоугольных треугольников, длины сторон которых выражаются целыми числами, если один из катетов этих треугольников равен 15?

6.2. Найдите все прямоугольные треугольники, длины сторон которых являются целыми числами, а периметр каждого из них численно равен площади.

7. Методы решения некоторых нелинейных неопределенных уравнений

Общие подходы к решению нелинейных диофантовых уравнений достаточно сложны и предполагают серьезную подготовку по теории чисел. Мы рассмотрим здесь некоторые уравнения и элементарные методы их решения.

Рассмотрим проблему существования решений уравнения $x^2 - y^2 = k$ в целых числах.

Докажем, что если целые числа x и y есть решение этого уравнения, то число k при делении на 4 не дает в остатке 2

Итак, пусть существуют целые числа x и y, которые удовлетворяют этому уравнению, тогда:

если оба числа x и y – четные, то числа x^2 и y^2 делятся на 4, откуда следует, что и разность $x^2 - y^2 = k$ делится на 4;

если одно из чисел x или y четное, а другое нечетное, то число $x^2 - y^2$, а значит и число k нечетное;

если оба числа x и y – нечетные, то так как квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1 (докажите это самостоятельно), заключаем, что число $x^2 - y^2 = k$ делится на 4.

Таким образом, мы убедились, что если целые x и y – решение уравнения, то число k при делении на 4 не может давать в остатке 2.

Докажем обратное утверждение: если целое число k при делении на 4 не дает в остатке 2, то уравнение имеет решение.

Если k удовлетворяет этому условию и является четным числом, то оно делится на 4, следовательно, $\frac{k}{4}$ есть целое число. Тогда нетрудно убедится в том, что целые числа $x = \frac{k}{4} + 1$ и $y = \frac{k}{4} - 1$ являются решением этого уравнения.

Если k удовлетворяет условию и является нечетным числом, то $k=2m+1$, где m некоторое целое число. Тогда нетрудно убедиться в том, что числа $x= m+1$, $y= m$ – целые и удовлетворяют уравнению.

Таким образом, мы доказали теорему.

Теорема 7.1. Уравнение $x^2 - y^2 = k$ имеет по крайней мере одно решение в целых числах в том и только в том случае, когда число k при делении на 4 не дает в остатке 2.

Замечание. Труднее обстоит дело с решением аналогичного вопроса для уравнения $x^2 + y^2 = k$. Без доказательства отметим, что такое уравнение имеет, по меньшей мере, одно решение в целых числах тогда и только тогда, когда частое от деления натурального числа k на наибольший из квадратов не имеет ни одного натурального делителя, который при делении на 4 давал бы в остатке 3.

Учитывая это замечание можно утверждать, что уравнение $x^2 + y^2 = k$ для $k = 1$; 2; 4; 5; 8; 9; 10 разрешимо в целых числах, но не разрешимо для $k =3$; 7 (убедиться самостоятельно).

Далее рассмотрим некоторые методы решения неопределенных уравнений высших степеней.

Метод разложения на множители

Первоначальное уравнение путем группировки слагаемых и вынесения общих множителей приводится к виду, когда в левой части уравнения стоит произведение сомножителей, содержащих неизвестные, а справа стоит некоторое число. Рассматриваются все делители числа, стоящего в правой части уравнения. Проводится исследование, в котором каждый сомножитель, стоящий в правой части уравнения приравнивается к соответствующему делителю числа, стоящего в правой части уравнения.

Пример 1. Решить уравнение в целых числах $y^3 - x^3 = 91$.

Решение. 1) Используя формулы сокращенного умножения, разложим правую часть уравнения на множители:

$$(y - x)(y^2 + xy + x^2) = 91 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

2) Выпишем все делители числа 91: ± 1; ± 7; ± 13; ± 91

3) Проводим исследование. Заметим, что для любых целых x и y число

$$y^2 + yx + x^2 \geq y^2 - 2|y||x| + x^2 = (|y| - |x|)^2 \geq 0,$$

следовательно, оба сомножителя в левой части уравнения должны быть положительными. Тогда уравнение (1) равносильно совокупности систем уравнений:

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y^2 + xy + x^2 = 91 \end{cases}; \begin{cases} y - x = 91 \\ y^2 + xy + x^2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} y - x = 7 \\ y^2 + xy + x^2 = 13 \end{cases}; \begin{cases} y - x = 13 \\ y^2 + xy + x^2 = 7 \end{cases}$$

4) Решив системы, получим: первая система имеет решения (5; 6), (-6; -5); третья (-3; 4),(-4;3); вторая и четвертая решений в целых числах не имеют.

Ответ: уравнение (1) имеет четыре решения (5; 6); (-6; -5); (-3; 4); (-4;3).

Пример 2. Решить в целых числах уравнение $x + y = xy$.

Решение. 1) Перенесем все члены уравнения влево и к обеим частям полученного уравнения прибавим (–1)

$$x + y - xy - 1 = -1$$

Сгруппируем первое – четвертое и второе – третье слагаемые и вынесем общие множители, в результате получим уравнение:

$$(x - 1)(y - 1) = 1$$

2) Произведение двух целых чисел может равняться 1 в том и только в том случае, когда оба этих числа равны или 1, или (–1).

3) Записав соответствующие системы уравнений и решив их, получим решение исходного уравнения.

Ответ: (0,0) и (2,2).

Пример 3. Доказать, что уравнение $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$ не имеет решений в целых числах.

Решение. 1) Разложим левую часть уравнения на множители и обе части уравнения разделим на 3, в результате получим уравнение:

$$(x - y)(y - z)(z - x) = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

2) Делителями 10 являются числа ±1, ±2, ±5, ±10. Заметим также, что сумма сомножителей левой части уравнения (2) равна 0. Нетрудно проверить, что сумма любых трех чисел из множества делителей числа 10, дающих в произведении 10, не

будет равняться 0. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

Метод испытания остатков

Этот метод основан на исследовании возможных остатков левой и правой частей уравнения от деления на некоторое фиксированное натуральное число.

Замечание. Говоря строго математическим языком, для решения уравнения в данном случае применяется теория сравнений.

Рассмотрим примеры, которые раскрывают сущность данного метода.

Пример 4. Решить в целых числах уравнение $x^2 + 1 = 3y$.

Решение. 1) Заметим, что правая часть уравнения делится на 3 при любом целом y.

2) Исследуем какие остатки может иметь при делении на три левая часть этого уравнения.

По теореме о делении с остатком целое число x либо делится на 3, либо при делении на три в остатке дает 1 или 2.

Если $x = 3k$, то правая часть уравнения на 3 не делится.

Если $x = 3k+1$, то $x^2 + 1= (3k+1)^2+1=3m+2$, следовательно, опять левая часть на 3 не делится.

Если $x = 3k+2$, то $x^2 + 1= (3k+2)^2+1=3m+2$, следовательно, и в этом случае левая часть уравнения на три не делится.

Таким образом, мы получили, что ни при каких целых x левая часть уравнения на 3 не делится, при том, что левая часть уравнения делится на три при любых значениях переменной y. Следовательно, уравнение в целых числах решений не имеет.

Пример 5. Решить в целых числах $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$

Решение. 1) Очевидно, что решением уравнения будет тройка чисел (0; 0; 0).

2) Выясним, имеет ли уравнение другие решения. Для этого преобразуем уравнение к виду $x^3 = 3y^3 + 9z^3$. ………………….. (3)

Так как правая часть полученного уравнения делится на 3, то и левая обязана делится на три, следовательно, так как 3 - число простое, x делится на 3, т.е. $x = 3k$, подставим это выражение в уравнение (3): $27k^3 = 3y^3 + 9z^3$, откуда

$9k^3 = y^3 + 3z^3$ ……………………..(4)

следовательно, y^3 делится на 3 и $y = 3m$. Подставим полученное выражение в уравнение (4): $9k^3 = 27m^3 + 3z^3$, откуда

$$3k^3 = 9m^3 + z^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

В свою очередь, из этого уравнения следует, что z^3 делится на 3, и $z = 3n$. Подставив это выражение в (5), получим, что k^3 должно делиться на 3.

Итак, оказалось, что числа, удовлетворяющие первоначальному уравнению, кратны трём, и сколько раз мы не делили бы их на 3, опять должны получаться числа, кратные трём. Единственное целое число, удовлетворяющее этому условию, будет нуль, т. е. решение данного уравнения (0; 0; 0) является единственным.

Другие методы решения уравнений

На отдельных примерах рассмотрим несколько частных методов решения уравнений.

Замечание. При решении следующего уравнения применяется неравенство Коши, справедливое для любых положительных чисел:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Пример 6. Решить в целых числах уравнение $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.

Решение. 1) Заметим, что слагаемые в левой части уравнения имеют одинаковый знак, а поскольку их сумма положительна, то каждое слагаемое также положительно. Поэтому к сумме, стоящей слева, применим неравенство Коши, получим:

$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \ge 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} = 3\sqrt[3]{xyz}$$

Откуда, $xyz = 1$.

2) Исследуем возможные наборы трех целых чисел, которые в произведении дают 1. Это могут быть тройки (1,1,1), (1,-1,-1), (-1,-1,1), (-1,1,-1). Непосредственной проверкой убеждаемся, что каждая из них является решением исходного уравнения.

Ответ: (1,1,1); (1,-1,-1); (-1,-1,1); (-1,1,-1).

Пример 7. Найти все пары простых чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению $3x^4 + 5y^4 + 15 = 13x^2y^2$

Решение. 1) Если хотя бы одно из чисел x или y четное, то справа будет стоять число четное, при этом, число, стоящее слева тоже обязано быть четным, а это возможно только в том случае, когда только одно из чисел четно.

2) Пусть $x = 2$ (это единственное простое четное число), тогда непосредственно, решив биквадратное уравнение относительно y, находим $y = 3$.

3) Пусть $y = 2$, непосредственно убеждаемся, что в этом случае натуральных значений x, удовлетворяющих уравнению не существует.

4) Если x и y оба нечетные числа: $x = 2m+1$и $y = 2n+1$, то левая часть первоначального уравнения при делении на 4 дает в остатке 3, при этом правая часть делится на 4 с остатком 1. Следовательно, не существует нечетных простых чисел, удовлетворяющих данному уравнению.

Ответ: (2; 3)

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Решить в натуральных числах уравнение $y^2 - x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 1$.

7.2. Решить в простых числах уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$.

7.3. Доказать, что уравнение $x^3 + x + 10y = 20004$ неразрешимо в целых числах.

7.4. Доказать, что уравнение $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5 = 33$ неразрешимо в целых числах.

7.5. Решить в целых числах уравнение $2x^3 + xy - 7 = 0$.

7.6. Доказать, что уравнения не имеют целочисленных решений:

а) $y^2 = 5x^2 + 6$; б) $x^3 = 2 + 3y^2$

7.7. Решить в целых числах уравнения: а) $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$;

б) $x^2 - y^2 = 91$; в) $2xy = x^2 + 2y$; г) $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$

7.8. Решите в натуральных числах уравнения:

а) $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$; б) $x^2 - 4xy - 5y^2 = 1996$.

7.9. Докажите, что система уравнений не имеет решений в целых числах.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ z^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

7.10. Найти все пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению

а) $x^2 = y^2 + 2y + 13$; б) $xy = 20 - 3x + y$; в) $xy + 1 = x + y$; г) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$

7.11. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению

$$m^2 + 1994 = n^2$$

7.12. Найти все простые числа, которые одновременно являются суммой двух простых чисел и разностью двух простых чисел.

7.13. Докажите, что уравнение $x^2 - y^2 = 30$ не имеет решений в целых числах.

7.14. Решите уравнение $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$.

7.15. Если первую цифру трехзначного числа увеличить на n, то полученное число будет в n раз больше исходного. Найдите число n и исходное число.

7.16. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

7.17. Решить в целых числах уравнение $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$.

7.18. Решите в натуральных числах систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 + 30y^2 + 3z^2 + 12xy + 12yz = 308, \\ 2x^2 + 6y^2 - 3z^2 + 12xy - 12yz = 92 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + yz = 19 \end{cases}$

7.19. Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 45.

7.20. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению:

а) $x^2 - y^2 = 105$; б) $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$

7.21. Решите в целых числах уравнение:

а) $xy + 3x - 5y = -3$; б) $x - y = \dfrac{x}{y}$

7.22. Докажите, что система не имеет целочисленных решений

$$\begin{cases} x^2 + y^5 = 11 \\ z^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Рекомендуемая литература

1. Башмакова, И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972.
2. Фоминых, Ю.Ф. Диофантовы уравнения //Математика в шк. – 1996. - №6.
3. Школьная энциклопедия. Математика. / под редакцией С. М. Никольский – М.: Издательство «Большая российская энциклопедия», 1996.
4. Бабинская, И. Л. Задачи математических олимпиад. – М., 1975.
5. Васильев, Н.Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М., 1998.
6. Курляндчик, Л. Метод бесконечного спуска // Приложение к журналу «Квант». 1999. – №3.
7. Яковлев, Г.Н. Всесоюзные математические олимпиады школьников. М., 1992.
8. Серпинский, В. О решении уравнений в целых числах. – М, 1961.

9. Синг, С. Великая теорема Ферма [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://evrika.tsi.lv/index.php?name=texts&file=show&f=211#note2 - Загл. с экрана.
10. Перельман, Я.И. Занимательная алгебра. – М.: Наука, 1975.